سه‌شنبه Tue.
12 February
۶ جمادی‌الثانی
بهمن ۱۳۹۷

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases} \quad (-1)$$

$$3x_2 = 15 \Rightarrow x_2 = \frac{15}{3}$$

$$x_1 + \frac{15}{3} = 7 \Rightarrow x_1 = 7 - \frac{15}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{6}{3}$$

$$Z \Big|_B \quad \frac{-6}{3} - 3 \times \frac{15}{3} = \frac{-45}{3}$$

جواب بهینه

نقطه بهینه $B \begin{cases} \frac{6}{3} \\ \frac{15}{3} \end{cases}$

* فرم متعارفی مسئله برنامه ریزی خطی:

فرم استاندارد

فرم متعارفی

$$\min Cx \quad s.t \quad Ax \geq b \quad x \geq 0$$

$$\max Cx \quad s.t \quad Ax \leq b \quad x \geq 0$$

$$\min \text{ و } \max \quad Cx \quad s.t \quad Ax = b \quad x \geq 0$$

* مثال *

$$\max Z = 40x_1 + 50x_2$$

$$s.t \quad x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max Z = -40x_1 - 50x_2 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + S_1 = 40$$

$$4x_1 + 3x_2 + S_2 = 120$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

Right hand side

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	1	-40	-50	0	0	0
S_1	0	1	2	1	0	40
S_2	0	4	3	0	1	120

وارد شونده

خارج شونده

ستون لولا

$\left\{ \frac{40}{2}, \frac{120}{3} \right\}$

$\left\{ \frac{40}{20}, \frac{120}{40} \right\}$

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	1	-10	0	25	0	1000
x_2	0	1/2	1	1/4	0	20
S_2	0	5/2	0	-3/2	1	60

$S_1/2$

$-3x_2 + S_2$

ستون لولا

$\left\{ 20, \frac{60}{5/2} \right\}$

$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{5} \right\}$

$\frac{40}{24}$

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	1	0	0	17	4	1440
x_2	0	0	1	4/5	1/5	8
x_1	0	1	0	-3/5	2/5	24

$2/5 S_2 \to x_1$

$x_1^* = 24$

$x_2^* = 8$

$Z^* = 1440$

2019 / 1397

چهارشنبه Wed.
20 February
۱۴ جمادی‌الثانی
اسفند ۱۳۹۷

متغیر مصنوعی به محدودیت‌ها این مشکل رفع می‌شود اضافه کردن این متغیرهای مصنوعی تنها برای آسان شدن شروع حل روش simplex صورت می‌گیرد و مقدار آن‌ها در روش simplex تأثیری ندارد. روشی استفاده شود که simplex را مجبور می‌کند که متغیرهای مصنوعی را به سطح ۰ برساند دو روش اصلی برای انجام این کار روش‌های M بزرگ و دوفازی می‌باشد.

* روش M بزرگ:

در این روش ما توجه به نوع تابع هدف جریمه‌ی مناسبی را به صورت ضریبی از متغیرهای مصنوعی به تابع هدف مسئله اضافه می‌شود که به صورت زیر است.

n تعداد محدودیت — اگر مسئله max باشد $\longrightarrow -\sum_{i=1}^{n} MRi$

n تعداد محدودیت — اگر مسئله min باشد $\longrightarrow +\sum_{i=1}^{n} MRi$

این جریمه‌ها طوری طراحی می‌شود که اگر مسئله max باشد مقدار بزرگ متغیرهای مصنوعی باعث کاهش شدید تابع هدف و اگر مسئله min باشد باعث افزایش شدید تابع هدف می‌گردد بنابراین simplex مجبور خواهد بود برای خنثی کردن جریمه‌ای که به تابع هدف داده شده است متغیرهای مصنوعی را مجبور کند که از پایه خارج شود (مقدارشان به صفر تبدیل شود)

* در جدول نهای روش M بزرگ همواره ممکن است یکی از حالات زیر رخ دهد:

۱. در جدول نهای همه متغیرهای مصنوعی دارای مقدار ۰ می‌باشند این وضعیت به این مفهوم است که مسئله دارای جواب است.

۲. در جدول نهای حداقل یکی از متغیرهای مصنوعی با مقدار مخالف ۰ ممکن است وجود داشته باشد که این وضعیت به این مفهوم است که مسئله بدون فضای جواب است و در نتیجه مسئله جواب نخواهد داشت.

1990-2019

۹

- نکته ← برای درست کردن متغیر وارد شونده از قاعده min نسبت بصورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left\{ \left| \frac{\text{سطر تابع هدف}}{\text{اعداد منفی سطر خارج شونده}} \right| \right\}$$

* مسئله زیر را از روش Simplex دوفازی حل کنید:

$$\max Z = -4x_1 - 6x_2 - 18x_3 \rightarrow \max Z = 4x_1 + 6x_2 + 18x_3 = 0$$

s.t

$$2x_1 + 3x_3 \geq 3 \xrightarrow{(-1)} -2x_1 - 3x_3 \leq -3 \xrightarrow{s.t} -2x_1 - 3x_3 + s_1 = -3$$

$$3x_2 + 2x_3 \geq 5 \xrightarrow{(-1)} -3x_2 - 2x_3 \leq -5 \xrightarrow{s.t} -3x_2 - 2x_3 + s_2 = -5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

دوری

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
$Z \leftarrow Z + 2x_1$	1	4	0	18	0	2	-10
s_1 (خارج شونده)	0	-2	0	-3	1	0	-3
$x_2 \leftarrow \frac{s_2}{-3}$	0	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$

$$\left\{ \left| \frac{4}{-2}, \frac{18}{-3} \right| \right\} = x_1$$

ورودی

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	1	4	6	18	0	0	0
s_1	0	-2	0	-3	1	0	-3
s_2 (خارج شونده)	0	0	-3	-2	0	1	-5

$$\left\{ \left| \frac{6}{-3}, \frac{18}{-2} \right| \right\} = x_2$$

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	1	0	0	8	2	2	-16
x_1	0	1	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{4}{3}$
x_2	0	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$

$x_1 = \frac{4}{3}$

$x_2 = \frac{5}{3}$

$x_3 = 0$

$Z^* = -16$

مراحل بهینه

دوشنبه Mon. 11 February ۵ جمادی‌الثانی بهمن ۱۳۹۷

مسئله max سازی راستای تابع هدف را در جهت بردار تابع هدف تا جایی که در ناحیه شدنی باشیم حرکت می‌دهیم و در مسئله min سازی راستای تابع هدف را در خلاف جهت بردار تابع هدف تا جایی که در ناحیه شدنی باشیم حرکت می‌دهیم.

- مرحله ششم: نقطه گوشه‌ای (رأسی) که آخرین تماس با خط تابع هدف داده شده در جهت هدف مورد نظر با ناحیه شدنی را نشان می‌دهد نقطه بهینه است.

- مرحله هفتم: معادلات محدودیت های نقطه گوشه‌ای (رأسی) بهینه از برخورد آنها تشکیل شده است را مشخص کرده و با حل یک دستگاه معادله مختصات آن نقطه را بدست آورده با قرار دادن آن در تابع هدف مقدار بهینه تابع هدف را بدست می‌آوریم.

✱ مثال ✱

با روش ترسیمی مسئله زیر را حل کنید.

$$\max z = 40x_1 + 50x_2$$

$$s.t = x_1 + 2x_2 \leq 40$$

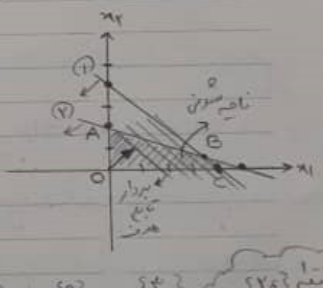
$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1	0	40
x_2	20	0

x_1	0	30
x_2	40	0

$C = (40, 50)$



$$B \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 40 \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 - 8x_2 = -160 \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 \end{cases}$$

$$-5x_2 = -40 \Rightarrow x_2 = 8$$

$$4x_1 + 3 \times 8 = 120 \Rightarrow 4x_1 = 96 \Rightarrow x_1 = 24$$

$A\{0, 20\}$ $O\{0, 0\}$ $C\{30, 0\}$ $B\{24, 8\}$ نقطه بهینه

جواب بهینه $Z|_B = 40 \times 24 + 50 \times 8 = 1360$

✱ مثال ✱

با روش ترسیمی مسئله زیر را حل کنید.

$$\min z = -x_1 - 3x_2$$

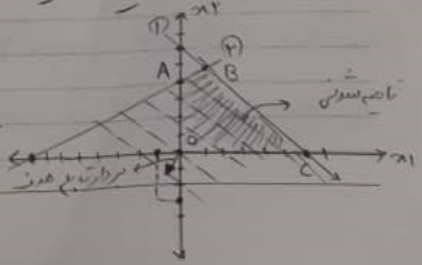
$$s.t \quad x_1 + x_2 \leq 6$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1	0	6
x_2	6	0

x_1	0	-8
x_2	4	0



۱۸

پنجشنبه Thu.
7 February
۱ جمادی‌الثانی
بهمن ۱۳۹۷

★ برنامه‌ریزی خطی :

از جمله قوی‌ترین تکنیک های است که مدیران می‌توانند در حل مسائل مختلف خود با توجه به شرایط مسئله بکار گیرند اگر ۳ وضعیتی منابع مالی تولید و فروش را وظایف اصلی هر شرکت تولیدی در نظر بگیریم برنامه‌ریزی خطی در وضعیت دوم (تولید) توانایی خود را در حل مسائل به خوبی نشان داده است در مجموع برنامه‌ریزی خطی مدلی ریاضی برای جستجو و انتخاب بهترین برنامه (روش انجام کار) از میان مجموع راه های ممکن است.

★ هر مدل برنامه‌ریزی خطی از ۳ قسمت تشکیل می‌شود :

۱) تابع هدف : تابعی است از ریاضی که از متغیرهای تصمیم تشکیل یافته و بیانگر هدف مدل است این تابع نشان دهنده خواسته های تصمیم گیرنده مانند حداکثر کردن سود و یا حداقل کردن هزینه است تابع هدف مدل برنامه‌ریزی خطی به یکی از دو صورت زیر است :

$$\min \text{ یا } \max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 \cdots c_nx_n$$

۲) محدودیت : عبارت است از یک معادله یا نامعادله‌ای متشکل از متغیرهای تصمیم که محدودیت مدل را برای دستیابی به اهداف مدل بیان می‌کند

۳) وضعیت متغیرهای تصمیم : متغیر تصمیم با توجه به مصداق واقعی تعیین شده برای آن معمولاً به یکی از ۲ صورت زیر است :

الف) متغیر تصمیم نامنفی : $x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$

ب) متغیر تصمیم آزاد در علامت : در این حالت x_j می‌تواند مقدار مثبت منفی یا صفر را بدست آورد.

۱۹

جمعه Fri.
8 February
۲ جمادی‌الثانی
بهمن ۱۳۹۷

۱۸

پنجشنبه Thu.
7 February
۱ جمادی‌الثانی
بهمن ۱۳۹۷

★ برنامه‌ریزی خطی :

از جمله قوی‌ترین تکنیک های است که مدیران می‌توانند در حل مسائل مختلف خود با توجه به شرایط مسئله بکار گیرند اگر ۳ وضعیتی منابع مالی تولید و فروش را وظایف اصلی هر شرکت تولیدی در نظر بگیریم برنامه‌ریزی خطی در وضعیت دوم (تولید) توانایی خود را در حل مسائل به خوبی نشان داده است در مجموع برنامه‌ریزی خطی مدلی ریاضی برای جستجو و انتخاب بهترین برنامه (روش انجام کار) از میان مجموع راه های ممکن است.

★ هر مدل برنامه‌ریزی خطی از ۳ قسمت تشکیل می‌شود :

۱) تابع هدف : تابعی است از ریاضی که از متغیرهای تصمیم تشکیل یافته و بیانگر هدف مدل است این تابع نشان دهنده خواسته های تصمیم گیرنده مانند حداکثر کردن سود و یا حداقل کردن هزینه است تابع هدف مدل برنامه‌ریزی خطی به یکی از دو صورت زیر است :

$$\min \text{ یا } \max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 \cdots c_nx_n$$

۲) محدودیت : عبارت است از یک معادله یا نامعادله‌ای متشکل از متغیرهای تصمیم که محدودیت مدل را برای دستیابی به اهداف مدل بیان می‌کند

۳) وضعیت متغیرهای تصمیم : متغیر تصمیم با توجه به مصداق واقعی تعیین شده برای آن معمولاً به یکی از ۲ صورت زیر است :

الف) متغیر تصمیم نامنفی : $x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$

ب) متغیر تصمیم آزاد در علامت : در این حالت x_j می‌تواند مقدار مثبت منفی یا صفر را بدست آورد.

۱۹

جمعه Fri.
8 February
۲ جمادی‌الثانی
بهمن ۱۳۹۷

چهارشنبه Wed.
13 February
۷ جمادی‌الثانی
بهمن ۱۳۹۷

★ تعریف متغیر اساسی:
متغیر اساسی یک محدودیت متغیری است که در محدودیت مورد نظر دارای ضریب یک باشد و در دیگر محدودیت‌ها ضریب آن صفر باشد (وجود نداشته باشد)

★ چند نکته مهم درباره جدول Simplx:

۱) ستون مربوط به متغیرهای اساسی واحد خواهد بود یعنی در سطر خود عدد ۱ و در بقیه سطرها ۰ خواهد بود

۲) مقدار متغیرهای اساسی و جدول برابر است با مقادیر سمت راست در همان سطر و مقدار متغیرهای غیر اساسی ۰ است

۳) شرط رسیدن به جواب بهینه در جدول Simplx برای مسئله max سازی وجود نداشتن ضریب منفی در سطر هدف و مقادیر سمت راست می‌باشد.

★ مراحل حل در جدول Simplx:

۱) بعد از تشکیل جدول Simplx اولین باید متغیر ورودی را انتخاب کنیم. متغیر ورودی متغیری است که تابع هدف نسبت به بقیه متغیرها زودتر به max می‌رساند و این متغیر را با توجه به ضرایب سطر هدف انتخاب خواهیم کرد و متغیری که منفی‌ترین مقدار را دارد را به عنوان متغیر ورودی انتخاب می‌کنیم.

۲) حال باید تعیین کنیم چه متغیری را از متغیرهای اساسی خارج کنیم برای این کار از قاعده min نسبت استفاده می‌کنیم.

★ قاعده min نسبت:
مقادیر سمت راست جدول را بر مقادیر مثبت (به غیر از ۰ و -) ستون لولا تقسیم می‌کند و هر کدام کوچکتر بود متغیر خروجی می‌باشد و سطر مربوط به متغیر خروجی سطر لولا نامیده می‌شود.

★ مثال

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$
$$s.t \quad 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$-4x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 0 = -Z$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 = 30$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 40$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

Sun. یکشنبه
10 February
۲ جمادی‌الثانی
بهمن ۱۳۹۷

۱۳ جواب : منظور از جواب ، جواب نهای مسئله است نکته هر مجموعه‌ای از مقادیر که به متغیرهای تقسیم اختصاص یابد یک جواب نامیده می‌شود خواه چنین جوابی مطلوب باشد یا نباشد یا این مجموع مقادیر در محدودیت صدق کند یا نه.

۱۴ جواب بهینه: بهترین جواب شدنی است که به اهدافی، آن تابع هدف به مطلوب‌ترین وضعیت در می‌آید.

۱۵ معادله مرزی : معادله‌ای هر محدودیت با جایگزین کردن علامت های ($\geq$ یا $\leq$) با علامت تساوی بدست می‌آید.

۱۶ جواب گوشه‌ای یا رأسی : مقادیر اختصاص داده شده به متغیرهای تقسیم حاصل از برخورد معادلات مرزی جواب گوشه‌ای یا رأسی نامیده می‌شود.

۱۷ ناصحیح شدن : مجموعه جواب های شدنی ناصحیح شدنی را ایجاد می‌کند.

* مراحل حل مسئله به روش ترسیمی یا هندسی:

- مرحله اول : اگر متغیرهای تقسیم نامنفی باشند فقط ناحیه اول محورهای مختصات را در نظر می‌گیریم.
- مرحله دوم : هر محدودیت را با توجه به علامت تساوی، آن متغیران یک معادله و صورت یک خط راست می‌کنیم.
- مرحله سوم : برای رسم هشت نامعادله محدودیت یک نقطه دلخواه را در یکی از دو طرف خط حاصل از مرحله دوم انتخاب کنید و مختصات آن را در نامعادله قرار دهید در صورت برقرار بودن نامعادله همان سمتی است که نقطه انتخابی در آن قرار دارد و در غیر این صورت سمت مقابل سمت مورد نظر می‌باشد.
- مرحله چهارم : برای تمام محدودیت ها مرحله ۳ را انجام می دهیم و ناحیه مشترک محدودیت ها را مشخص می‌کنیم.
- مرحله پنجم : با استفاده از ضرایب تابع هدف در مسئله بردار تابع هدف را رسم کرده و برای بدست آوردن راستای تابع هدف عمود بر بردار تابع هدف را بدست آوریم و برای بدست آوردن جواب بهینه در

۲۵

پنجشنبه Thu.
14 February
۸ جمادی‌الثانی
بهمن ۱۳۹۷

ورودی

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
Z	1	-۴	-۳	-۶	۰	۰	۰
S_1	۰	۲	۱	۱	۱	۰	۲۰
S_2	۰	۲	۲	۳	۰	۱	۴۰

خروجی

$\min\left\{\frac{40}{2}, \frac{30}{3}\right\} = S_1$

	20	10	0	0	0	0	Z
	0	1	1/2	1/2	0	0	x_1
	0	0	1	1	1	0	S_1
	0	0	1	2	0	1	S_2

$x_1 = 10$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ $Z = 20$

۲۶

جمعه Fri.
15 February
۹ جمادی‌الثانی
بهمن ۱۳۹۷

ورودی

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
Z	1	2	-1	0	2	0	40
S_1	0	1	1/3	1	1/3	0	10
S_2	0	-1	1	0	-1	1	10

خروجی

$\min\left\{\frac{10}{1/3}, \frac{10}{1}\right\} = S_2$

	70	1	0	0	1	1	Z
	20/3	0	4/3	1	2/3	-1/3	x_3
	10	0	-1	1	-1	1	x_2

$x_1 = 0$ $x_2 = 10$ $x_3 = 20/3$ $Z = 70$

★ دوگان یابی:

هر مدل برنامه‌ریزی خطی دارای یک مدل دوگان یا دوتایی است که ویژگی‌های زیر را دارد:

۱) مقدار بهینه برای تابع هدف مدل اصلی و مدل دوگان با یکدیگر مساوی هستند.

۲) همواره می‌توان جواب بهینه مدل اصلی را از مدل دوگان بدست آورد.

۳) تعداد متغیرهای مدل دوگان برابر تعداد محدودیت‌های مدل اصلی است و تعداد محدودیت‌های مدل دوگان برابر تعداد متغیرهای مدل اصلی است.

★ در شرایط زیر بجای مدل اصلی از مدل دوگان استفاده می‌کنیم:

۱) زمانی که حل مدل دوگان از مدل اصلی آسان‌تر باشد.

۲) زمانی که بخواهیم با کاهش محدودیت‌های مدل حجم محاسبات را کاهش دهیم.

★ ساخت یک مدل دوگان:

۱) اگر مدل اصلی بصورت max باشد باید محدودیت‌های آن را بصورت ≤ تبدیل کنیم و اگر مسئله min باشد باید محدودیت‌ها آن را بصورت ≥ تبدیل کنیم.

شنبه Sat. 9 February ۳ جمادی‌الثانی بهمن ۱۳۹۷

★ شکل کلی مدل برنامه ریزی خطی بصورت زیر است :

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\text{S.t} \quad x_1 + 2x_2 \leqslant 1$$

$$x_1 - x_2 \leqslant 0$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

$$\max \text{ یا } \min \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{S.t} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \left(\leqslant \text{یا} = \text{یا} \geqslant\right) b_1$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \left(\leqslant \text{یا} = \text{یا} \geqslant\right) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \left(\leqslant \text{یا} = \text{یا} \geqslant\right) b_m \end{matrix}$$

در مدل فوق :

$x_j \ (j = 1, \dots n)$: متغیر تصمیم

Z = مقدار تابع هدف

$(c_1, c_2, \dots c_n)$ = ضرایب تابع هدف

$(a_{11}, a_{12}, \dots a_{mn})$: ضرایب محدودیت ها

$(b_1, b_2, \dots b_n)$ = مقادیر سمت راست

n = تعداد متغیر تصمیم

m = تعداد محدودیت ها

★ تعریف برخی از ویژه های مورد استفاده در برنامه ریزی خطی :

۱) جواب شدنی : جوابی است که در تمام محدودیت ها صدق می کند

۲) جواب نشدنی : جوابی است که در محدودیت ها صدق نمی کند

۱۲ دوگان یک مسئله min سازی یک مسئله max سازی می‌باشد و برعکس.

۱۳ جدول زیر مدل اصلی را به مدل دوگان تبدیل کنید.

مسئله اولیه (ثانویه)		مسئله ثانویه (اولیه)
محدودیت	⟷	متغیر تقسیم
اعداد سمت راست	⟷	ضرایب متغیرهای تقسیم در تابع هدف
محدودیت‌ها به صورت نامعادله	⟷	متغیرهای تقسیم نامقید
محدودیت به صورت تساوی	⟷	متغیر آزاد در علامت
ضرایب متغیر تقسیم در هر محدودیت	⟷	ضریب متغیر متن هر محدودیت

* مثال:

دوگان مسئله‌های زیر را بدست آورید.

$$\min Z = 5x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7$$

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 1$$

$x_1, x_2 \geq 0$ x_3 آزاد در علامت

$$\max w = 4y_1 + y_2$$

$$2y_1 + 2y_2 \leq 5$$

$$-3y_1 + 2y_2 \leq 2$$

$y_1 - y_2 = 1$ آزاد در علامت $y_2 \geq 0$

$$\max Z = 5x_1 + 2x_2$$

$$x_1 - 4x_2 \geq 2$$

$$5x_1 + 7x_2 = -3$$

$$x_1 \leq 0$$

$x_2 \geq 0$

$$\min w = 2y_1 - 3y_2$$

$$y_1 + 5y_2 \leq 5$$

$$-4y_1 + 7y_2 \geq 2$$

$y_1 \leq 0$

y_2 آزاد در علامت

ورودی

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R	RHS
Z	۱	$-۳-M$	$-۲-۳M$	۰	M	۰	$-۶M$
S_1	۰	۲	۱	۱	۰	۰	۴
R	۰	۱	۲	۰	-۱	۱	۲

خروجی

ورودی

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R	RHS
Z	۱	-۲	۰	۰	-۱	$۱+M$	۲
S_1	۰	$۳/۲$	۰	۱	$۱/۲$	$-۱/۲$	۱
x_2	۰	$۱/۲$	۱	۰	$-۱/۲$	$۱/۲$	۳

خروجی

ورودی

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R	RHS
Z	۱	۰	۰	$۴/۳$	$-۱/۳$	$۲/۳M$	$۲۲/۳$
x_1	۰	۱	۰	$۲/۳$	$۱/۳$	$-۱/۳$	$۲/۳$
x_2	۰	۰	۱	$-۱/۳$	$-۲/۳$	$۲/۳$	$۸/۳$

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R	RHS
Z	۱	۱	۰	۲	۰	M	۸
S_2	۰	۳	۰	۲	۱	-۱	۲
x_2	۰	۲	۱	۱	۰	۰	۴

$x_1^* = ۰$
$x_2^* = ۴$
$S_1^* = ۰$
$S_2^* = ۲$
$Z^* = ۸$
$R^* = ۰$

* دوفازی simplex:

- نکته ← در جدول اولیه simplex (مسئله max سازی) متغیرهست راست همواره در حالت بهینه هستند (یعنی مثبت می‌باشد) اما سطر تابع هدف را باید به حالت بهینه تبدیل کنیم اما در simplex دوفازی سطر تابع هدف همواره در حالت بهینه می‌باشد (یعنی مثبت است) اما اعداد سمت راست را باید به حالت بهینه تبدیل کنیم.

- نکته ← در جدول simplex دوفازی برخلاف روش simplex معمولی ابتدا متغیر خارج شونده را انتخاب می‌کنیم برای متغیر ورودی بزرگترین عدد یا متغیر سمت راست را بعنوان متغیر خارج شونده در نظر می‌گیریم.

$\max Z = -2x_1 - 3x_2 \Rightarrow \max z + 2x_1 + 3x_2 = 0$

s.t $2x_1 + x_2 \geq 4 \xrightarrow{(-1)} -2x_1 - x_2 \leq -4 \xrightarrow{s.t} -2x_1 - x_2 + s_1 = -4$

$x_1 + 2x_2 \geq 4 \xrightarrow{(-1)} -x_1 - 2x_2 \leq -4 \xrightarrow{s.t} -x_1 - 2x_2 + s_2 = -4$

$x_1, x_2 \geq 0$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	1	2	3	0	0	0
s_1	0	-2	-1	1	0	-4
s_2	0	-1	-2	0	1	-4

$\left\{\left|\frac{2}{-2}, \frac{3}{-1}\right|\right\} = x_1$ (1, 2)

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	1	0	1	1	0	-4
x_1 ($s_1/(-2)$)	0	1	1/2	-1/2	0	2
$s_2 \to -x_2 + s_2 + x_2$	0	0	-3/2	-1/2	1	-2

ضریب ستون

$\left\{\left|\frac{1}{-3/2}, \frac{1}{-1/2}\right|\right\} = x_2$ ($\frac{2}{3}$, 1)

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
$Z \to 2x_2 + Z$	1	0	0	2/3	2/3	-8
$x_1 \to -\frac{1}{2}x_2 + x_1$	0	1	0	-2/3	1/3	2
$x_2 \to -\frac{2}{3}s_2 + x_2$	0	0	1	1/3	-2/3	2

$x_1 = 2$

$x_2 = 2$

$Z^* = -8$

دوشنبه Mon
18 February
۱۲ جمادی‌الثانی
بهمن ۱۳۹۷

$x_i L_i = 0$ $\quad y_j S_j = 0$ باشند همواره روابط زیر برقرار است.

*** مثال ***

در مدل زیر جواب یکی از جدول های Simplex بصورت $x_1=0, x_2=0, S_1=3, S_2=0$ است.

الف) جواب متناظر با این جدول در مدل دوگان را بدست آورید.

ب) آیا جواب بدست آمده بهینه است؟

$$\max Z = 8x_1 + 7x_2$$
$$\text{s.t} \quad x_1 - x_2 \leq 4$$
$$2x_1 + 6x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min w = 4y_1 + 8y_2$$
$$\text{s.t} \quad y_1 + 2y_2 \geq 8$$
$$-y_1 + 6y_2 \geq 7$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

$$\max Z = 8x_1 + 7x_2$$
$$\text{s.t} \quad x_1 - x_2 + S_1 = 4$$
$$2x_1 + 6x_2 + S_2 = 8$$
$$\text{اولیه} \rightarrow x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

$$\min w = 4y_1 + 8y_2$$
$$\text{s.t} \quad y_1 + 2y_2 - L_1 = 8$$
$$-y_1 + 6y_2 - L_2 = 7$$
$$\text{دوگان} \rightarrow y_1, y_2, L_1, L_2 \geq 0$$

$x_1 L_1 \xrightarrow{x_1=0} L_1 = ?$

$x_2 L_2 \xrightarrow{x_2=2} 2 \times L_2 = 0 \rightarrow L_2 = 0$

$y_1 S_1 \xrightarrow{S_1=3} y_1 \times 3 = 0 \rightarrow y_1 = 0$

$y_2 S_2 \xrightarrow{S_2=0} y_2 = ?$

مقادیر بدست آمده را در مدل دوگان قرار می دهیم که خواهیم داشت:

حل بقیه

سه‌شنبه Tue.
26 February
۲۰ جمادی‌الثانی
اسفند ۱۳۹۷

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 = 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$Z - 2x_1 + 3x_2 - MR = 0$$

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 - MR$$

$$x_1 + x_2 + S_1 = 4$$

$$x_1 + x_2 + R = 4$$

$$x_1, x_2, S_1, R \geq 0$$

	Z	x_1	x_2	S_1	R	RHS
Z	1	-2	-3	0	M	0
S_1	0	1	2	1	0	4
R	0	1	1	0	1	4

ورودی

	Z	x_1	x_2	S_1	R	RHS
$-MR+Z \to Z$	1	$-2-M$	$-3-M$	0	0	$-4M$
خروجی S_1	0	1	2	1	0	4
R	0	1	1	0	1	4

ورودی

	Z	x_1	x_2	S_1	R	RHS
$(3+M)x_2+Z \to Z$	1	$-\frac{1}{2}-\frac{M}{4}$	0	$\frac{3}{4}+\frac{M}{4}$	0	$4-M$
$S_1/2 \to x_2$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	2
$-x_2+R \to R$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1

خروجی

$x_1^* = 2$

	Z	x_1	x_2	S_1	R	RHS
Z	1	0	0	1	$1+M$	5
$-\frac{1}{2}x_1+x_2 \to x_2$	0	0	1	1	-1	1
x_1	0	1	0	-1	2	2

$x_2^* = 1 \quad Z^* = 5$

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max Z - 3x_1 + 2x_2 + MR = 0$$

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - MR$$

$$2x_1 + x_2 + S_1 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 - S_2 + R = 4$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R	RHS
$-MR+Z \to Z$	1	-3	-2	0	0	M	0
S_1	0	2	1	1	0	0	4
R	0	1	2	0	-1	1	4

ادامه مسئله بعد

2019 - ۱۴۴۰

$\min Z = 4x_1 + 2x_2 - x_3$

$x_1 + x_2 + x_3 = 20$

$2x_1 + x_2 \geq 6$

$x_3 \leq 4$

$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad , \quad x_3$ آزاد

$\max Z = 20y_1 + 6y_2 + 4y_3$

$y_1 + 2y_2 \geq 4$

$y_1 - y_2 \geq 2$

$y_1 + y_3 = -1$

$y_2 \geq 0 \quad , \quad y_3 \leq 0 \quad , \quad y_1$ آزاد

$\max Z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3$

$-x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20$

$12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \geq 90$

$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 50$

$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_3 \geq 0 \quad ,$ آزاد x_2

$\min w = 20y_1 + 90y_2 + 50y_3$

$-y_1 + 12y_2 - 4y_3 \geq -5$

$y_1 + 4y_2 + 2y_3 = 5$

$3y_1 + 10y_2 - 3y_3 \geq 13$

$y_1 \geq 0 \quad , \quad y_2 \leq 0 \quad ,$ آزاد y_3

★ روابط بین مدل اولیه و دوگان:

۱) مدل دوگان همان مدل اولیه است (یعنی اگر دوبار دوگان یک مدل را محاسبه کنیم حاصل همان مدل اولیه خواهد بود

۲) اگر z^* جواب مسئله‌ی اولیه و w^* جواب مسئله‌ی دوگان باشد در این صورت همواره داریم $z^* = w^*$

۳) اگر مسئله‌ی اولیه دارای جواب بهینه باشد در این حالت مسئله‌ی دوگان نیز جواب بهینه دارد اما اگر مسئله‌ی اولیه دارای تابع هدف نامحدود باشد مسئله‌ی دوگان بدون جواب بهینه است همچنین هر دو مسئله نیز می‌توانند بدون جواب بهینه باشند.

★ رابطه کمکی مکمل:

اگر x_i و s_i متغیرهای تصمیم و کمکی مدل اولیه و y_i و t_i متغیرهای تصمیم و کمکی مدل دوگان یک مسئله

سه‌شنبه Tue.
19 February
۱۳ جمادی‌الثانی
بهمن ۱۳۹۷

$\min w = 4y_1 + 8y_2$

$s.t \quad y_1 + 2y_2 - l_1 = 8 \xrightarrow{y_1=0} 2y_2 - l_1 = 8$

$-y_1 + 6y_2 - l_2 = 6 \xrightarrow{y_1=0} 6y_2 = 6 \Rightarrow y_2 = \frac{6}{6} = \frac{3}{2}$

$y_2 = \frac{4}{2}$

$2 \times \frac{3}{2} - l_1 = 8 \Rightarrow 3 - l_1 = 8$

$l_1 = -5$

$l_1 = -5, l_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = \frac{3}{2}$

توقف زمانی جواب تابع هدف مدل اصلی و دوگان هردو موجه می‌شوند که در حالت بهینه باشیم در این حالت مقدار هردو تابع هدف با هم برابر می‌شوند.

تابع هدف مسئله اولیه $z = 8x_1 + 6x_2$ | $z = 8x_0 + 6x_2 = 12$, $x_1 = 0, x_2 = 2$

تابع هدف مسئله دوگان $w = 4y_1 + 8y_2$ | $w = 4x_0 + 8 \times \frac{3}{2} = 12$, $y_1 = 0, y_2 = \frac{3}{2}$

★ روش M بزرگ:

$\max z =$	$2x_1 + 3x_2$	$\max z = 2x_1 + 3x_2 - MR_1 - MR_2$
$s.t$	$x_1 - x_2 \geq 0$	$x_1 - x_2 - s_1 + R_1 = 0$
	$0x_1 + 6x_2 \geq 8$	$0x_1 + 6x_2 - s_2 + R_2 = 8$
	$x_1, x_2 \geq 0$	

★ حل مسائلی که در آن حداقل یک محدودیت بزرگتر مساوی ≥ کوچکتر مساوی ≤ یا مساوی = وجود دارد:

مسائلی که به این شکل هستند جهت آماده سازی محدودیت ها نیاز به متغیر مصنوعی (R) دارند به عبارت دیگر مسائلی که محدودیت ها به فرم ≥ یا = هستند بدون اضافه کردن متغیر مصنوعی (R) دارای جواب اساسی نمی‌باشند و از آنجایی که روش simplex نیاز به داشتن یک جواب اساسی شروع می‌شود بنابراین با اضافه کردن

سه‌شنبه Tue.
12 February
۶ جمادی‌الثانی
بهمن ۱۳۹۷

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases} \quad (-1)$$

$$3x_2 = 15 \Rightarrow x_2 = \frac{15}{3}$$

$$x_1 + \frac{15}{3} = 7 \Rightarrow x_1 = 7 - \frac{15}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{6}{3}$$

$$Z \Big|_B \quad \frac{-6}{3} - 3 \times \frac{15}{3} = \frac{-45}{3}$$

جواب بهینه

نقطه بهینه $B \begin{cases} \frac{6}{3} \\ \frac{15}{3} \end{cases}$

* فرم متعارفی مسئله برنامه ریزی خطی:

فرم استاندارد

فرم متعارفی

$$\min Cx \quad s.t \quad Ax \geq b \quad x \geq 0$$

$$\max Cx \quad s.t \quad Ax \leq b \quad x \geq 0$$

$$\min \text{ و } \max \quad Cx \quad s.t \quad Ax = b \quad x \geq 0$$

* مثال *

$$\max Z = 40x_1 + 50x_2$$

$$s.t \quad x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max Z = -40x_1 - 50x_2 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + S_1 = 40$$

$$4x_1 + 3x_2 + S_2 = 120$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

Right hand side

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	1	-40	-50	0	0	0
S_1	0	1	2	1	0	40
S_2	0	4	3	0	1	120

وارد شونده

خارج شونده

ستون لولا

$\left\{ \frac{40}{2}, \frac{120}{3} \right\}$

$\left\{ \frac{40}{20}, \frac{120}{40} \right\}$

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	1	-10	0	25	0	1000
x_2	0	1/2	1	1/4	0	20
S_2	0	5/2	0	-3/2	1	60

$S_1/2$

$-3x_2 + S_2$

ستون لولا

$\left\{ 20, \frac{60}{5/2} \right\}$

$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{5} \right\}$

$\frac{40}{24}$

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	1	0	0	17	4	1440
x_2	0	0	1	4/5	1/5	8
x_1	0	1	0	-3/5	2/5	24

$2/5 S_2 \to x_1$

$x_1^* = 24$

$x_2^* = 8$

$Z^* = 1440$

2019 / 1397