بسم الله الرحمن الرحیم

جزوه‌ی ریاضی عمومی (۱)

مدرس: محمدعلی شیرازپور

واحد دانشگاهی

علمی و کاربردی

دانشگاه فنی حرفه‌ای چمران گرگان

Function تابع

فصل اول   مدرس: محمدعلی عزیزپور

تعریف: هرگاه بین دو شیء a ترتیب برقرار کنیم آن را زوج مرتب نامیده

به صورت (a,b) نمایش می‌دهیم. a مولفه‌ی اول و b مولفه‌ی

دوم می‌نامیم.

تعریف: حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه A و B را با نماد $A \times B$ نمایش داده و

به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, \ b \in B\}$$

تعریف: هر زیرمجموعه‌ی $A \times B$ را مانند R را یک رابطه از مجموعه

A به مجموعه B می‌نامند ($R \subset A \times B$)

مثال: هرگاه $A = \{1,2\}$ ، $B = \{3,4\}$ باشد آنگاه مجموعه‌های زیر

و رابطه‌های (ترتیب) را بنویسید.

الف) $A \times B =$

ب) $R_1 = \{(a,b) \mid a < b\}$

ج) $R_2 = \{(a,b) \mid a = b\}$

تعریف: مجموعه‌ای که هیچ دو زوج مرتب متمایز آن، دارای مولفه‌های اول مساوی نباشند، تابع می‌گویند. که معمولاً مولفه‌های اول همان xها یا متغیرهای مستقل که دامنه تابع را تشکیل می‌دهند و مولفه‌های دوم همان yها یا متغیرهای وابسته که برد تابع را تشکیل می‌دهند.

معمولاً توابع را با حروفی همانند f و g و ... به شکل زیر می‌نویسیم

$$x \xrightarrow{f \text{ ضابطه تابع}} y \qquad y=f(x)$$

دامنه و برد تابع:

به مجموعه‌ی تمام متغیرهایی که تابع به ازای آنها تعریف شده‌اند دامنه تابع می‌گویند و با D_f (Domain) نمایش می‌دهند.

به مجموعه‌ی تمام متغیرهایی که تابع در ازای هر یک از اعضای دامنه می‌گیرد، برد تابع گفته و با R_f (Range) نمایش می‌دهند.

تذکر: نمایش صوری تابع به اشکالی مانند زوج مرتب و نمودار ون و منحنی روی صفحه‌ی مختصات و نیز ضابطه یا قانون تابع می‌باشد.

تمرین: برای هر یک از صورت‌های مختلف نمایش تابع یک مثال بزنید.

روش‌های یافتن دامنه توابع:

۱- دامنه توابع چندجمله‌ای (جبری) همیشه $\mathbb{R}$ است.

مثال) $f(x)=5x^2-8x+11 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

۲- دامنه توابع کسری (توابع گویا):

مخرج کسر $=0$ $\Longrightarrow$ یافتن ریشه مخرج $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{$ریشه‌های مخرج$\}$

مثال) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-5x}$

$x^2-5x=0 \longrightarrow x(x-5)=0$

$\begin{cases} x=0 \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0,5\}$

۳- دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد:

بدون توجه به رادیکال دامنه عبارت زیر رادیکال را حساب می‌نماییم.

مثال) $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^2-4}}$ $\quad x^2-4=0 \longrightarrow x^2=4$

$\longrightarrow x=\pm 2$

$\longrightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$

۴- تابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج:

همیشه عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج بایستی مثبت باشد

پس کافی است محدوده‌ای از $\mathbb{R}$ که به ازای آن محدوده تابع

(≥ 0) می‌باشد را بیابیم.

مثال) $y=\sqrt{x^2+5x}$ $\quad x^2+5x\geq 0$

$\xrightarrow[\text{علامت}]{\text{با تعیین}}$ $x^2+5x=0 \longrightarrow x=0,-5$

x	$-\infty$	-5		0	$+\infty$
x^2+5x	$+$	0	$-$	0	$+$
	جواب				جواب

$D_f=(-\infty,-5]\cup[0,+\infty)$

۵- دامنه توابع مثلثاتی $y=\sin(P(x))$ و $y=\cos(P(x))$

بدون توجه به $\sin$ یا $\cos$ دامنه $P(x)$ را مشخص می‌کنیم

۶- دامنه توابع مثلثاتی $y = \tan(P(x))$ (الف)، $y = \cot(P(x))$ (ب)

الف) : $D_f : P(x) \neq K\pi + \frac{\pi}{2}$

ب) : $D_f : P(x) \neq K\pi$

مثال: دامنه توابع زیر را مشخص کنید:

۱) $y = \sin(\sqrt{3-x})$: $3 - x \geq 0 \rightarrow -x \geq -3$

$\rightarrow x \leq 3$

$\Rightarrow D_f = (-\infty, 3]$

۲) $y = \cos(\sqrt[3]{x^2 - 4x + 7}) \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

۳) $y = \tan(2x) \Rightarrow 2x \neq K\pi + \pi/2$

$x \neq \frac{K\pi}{2} + \pi/4$

۴) $y = \cot(x - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow x - \pi/4 \neq K\pi \Rightarrow x \neq K\pi + \pi/4$

⑦ دامنه توابع لگاریتمی: $y = \log_{q(x)}^{P(x)}$

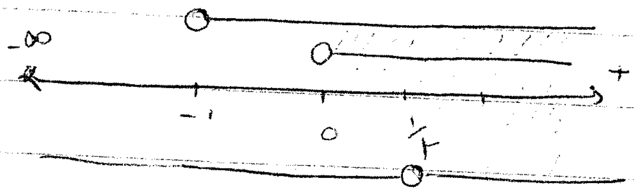
کافیست اشتراک جواب‌های نامعادلات مقابل را بدست آوریم.

$$D_f = \cap \begin{cases} P(x) > 0 \\ q(x) > 0 \\ q(x) \neq 1 \end{cases}$$

مثال:

$$f(x) = \log_{2x}^{x+1}$$

$$D_f = \bigcap \begin{cases} x+1>0 \longrightarrow x>-1 \\ 2x\neq 1 \longrightarrow x\neq \frac{1}{2} \\ 2x>0 \longrightarrow x>0 \end{cases} \Rightarrow D_f=(0,\tfrac{1}{2})\cup(\tfrac{1}{2},+\infty)$$



محدوده ی اشتراک

تمرین: دامنه ی توابع زیر مشخص کنید:

1) $f(x)=\dfrac{4x^2-9}{2x+3}$

2) $g(x)=\sqrt{x^2-3x}$

3) $h(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x}$

4) $y=\tan(3x-\frac{\pi}{4})$

5) $y=\sin\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2-x}}\right)$

6) $y=\cos\left(\dfrac{1}{|x|-2}\right)$

تساوی دو تابع:

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را مساوی می گوییم هرگاه:

الف) $D_f=D_g=D$

ب) $\forall x\in D: f(x)=g(x)$

مثال: آیا دو تابع حقیقی $f(x)=\frac{x^2-x}{x}$, $g(x)=x-1$ با هم مساوی‌اند؟

بررسی شرط اول: $D_f: x\neq 0$, $D_g=\mathbb{R}$

با برقرار نبودن شرط اول ⇐ نتیجه می‌گیریم نمی‌توانند مساوی باشند.

تمرین: تساوی توابع زیر را بررسی کنید؟

الف) دو تابع $f(x)=tg x \cdot cotg x$ و $g(x)=1$

ب) دو تابع $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2-4}$ و $g(x)=\frac{x^3-2x^2}{x^3-4x}$

نمایش ریاضی تابع (ضابطه‌ی تابع)

بعضی از توابع، شکل خطی $y=ax+b$ و بعضی؟ شکل سهمی $y=ax^2+bx+c$ و بعضی، شکل چندضابطه‌ای مانند $f(x)=\begin{cases} x+1 & , x<0 \\ 3x & , x\geq 0 \end{cases}$ و اشکال دیگری مانند قدر مطلقی و درجه سوم به بالا نمایش داده می‌شوند

$f(x)=2|x+5|-7$, $g(x)=x^3-5x$, ...

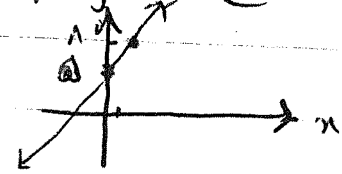
تذکر: برای رسم منحنی یک تابع کافی است به کمک نقطه‌یابی مثلاً برای توابع خطی با دو نقطه‌ی فرضی از آن تابع و درجات دوم بالا با تعداد نقاط بیشتر قابل رسم هستند.

لازم به ذکر است که در فصل‌های دیگر می‌توانیم به کمک مشتق و جدول تغییرات منحنی و رفتار تابع را رسم کرد.

مثال: توابع زیر را رسم کنید:

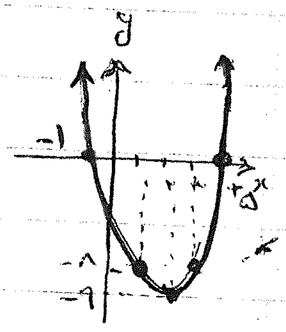
الف) $y=3x+5$

x	y
۰	۵
۱	۸



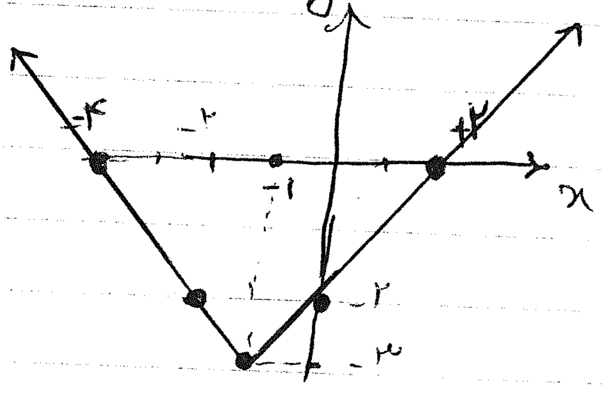
ب) $y=x^2-4x-5$

x	۱	۲	۳
y	-8	-9	-8



ج) $y=|x+1|-3$

$$y=\begin{cases} x-2 & x\geq -1 \\ -x-4 & x<-1 \end{cases}$$



تمرین: توابع زیر را رسم کنید:

1) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 0 \\ -2x & x<0 \end{cases}$

2) $y=\begin{cases} x^2 & x\geq -1 \\ 1-x & x<-1 \end{cases}$

3) $g(x)=-3|x+2|+1$

4) $y=3x^2+2x+1$

تمرین: مقادیر a، b و c را طوری بیابید که نمودار تابع:

الف) $y=3x^2+ax-2b$ از نقاط $A(1,-1)$ ، $B(2,1)$ بگذرد؟

ب) $f(x)=2x^3-ax^2+bx+c$ از نقاط $A(-1,4)$ ، $B(1,2)$ ، $C(0,1)$ بگذرد؟

تمرین: هرگاه داشته باشیم $f(x)=\frac{x}{x-1}$ و $g(x)=\frac{1}{x+2}$ آن گاه

ضابطه و دامنه توابع fog و $f+g$ را بیابید پس

$(2f-3g)(0)$ و $(gof)(2)$ را بیابید؟

تمرین: با فرض $f(x+2)=3x-7$ آن گاه $f(x)$ را بیابید.

تحقیق: (ارائه کنفرانس در کلاس)

1- مفاهیم زوج بودن و فرد بودن یک تابع را بنویسید؟

2- صعودی یا نزولی بودن تابع را بررسی کنید؟

3- معکوس یک تابع چگونه بدست می آید؟

4- تابع کراندار چیست؟ (9)

Limit

حد تابع: گاهی لازم است رفتار تابع را در نزدیکی نقطه‌ای بررسی کنیم تا معلوم شود وقتی متغیر مستقل تابع به آن نقطه نزدیک می‌شود، مقادیر تابع به عدد ثابت نزدیک می‌شوند یا خیر.

عدد L را حد تابع f در نقطه a می‌نامیم اگر برای هر $\varepsilon > 0$، عدد مثبتی مانند δ (وابسته به ε) وجود داشته باشد که:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

گاهی وقتی از یک مقادیری بزرگتر از a به a نزدیک می‌شویم می‌گوییم حد راست تابع بدست می‌آید که داریم:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$$

و وقتی که از مقادیری کمتر از a به a نزدیک می‌شویم حد چپ تابع بدست می‌آید که می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$$

در همسایگی نقطهٔ a

اگر $L_1 = L_2$ باشد می‌گوییم تابع دارای حد می‌باشد.

تذکر: معمولاً برای توابع چند ضابطه‌ای و قدر مطلق و جزء صحیح از تعریف حد چپ و حد راست به منظور حد تابع در یک نقطهٔ مشخص استفاده می‌کنیم.

مثال:

الف) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2+3x-5}{x+1} = -5$

ب) $\lim_{x \to 0} \left(f(x) = \begin{cases} 3x+1 & , x>0 \\ 3x-1 & , x \le 0 \end{cases} \right)$ حد چپ $= \lim_{x \to 0^-} (3x-1) = -1$

حد راست $= \lim_{x \to 0^+} (3x+1) = +1$

لذا با توجه به عدم تساوی حد چپ و حد راست، تابع فوق در $x=0$ حد ندارد.

ج) $\lim_{x \to 1} 2[x]+7$

حد چپ $= \lim_{x \to 1^-} 2[x]+7 = 2[1^-]+7 = 2\times 0+7 = 7$

حد راست $= \lim_{x \to 1^+} 2[x]+7 = 2[1^+]+7 = 2\times 1+7 = 9$

بنابراین با توجه به عدم تساوی حد چپ و حد راست، تابع سؤال در $x=1$ حد ندارد.

چند قضیه در حد:

1) اگر $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $k \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \to a} k f(x) = kL$

2) اگر $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \to a} g(x) = L_2 \Rightarrow \lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = L_1 \pm L_2$

$\lim_{x \to a} (f \times g)(x) = L_1 \cdot L_2$ و $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L_1}{L_2}$ $(L_2 \neq 0)$

۳) $\lim_{x\to a} (f(x))^n = L^n$ ۴) $\lim_{x\to a} \left(\sqrt[n]{f(x)}\right) = \sqrt[n]{L}$

نکته: هرگاه حد تابع در یک نقطه به صورت $\frac{0}{0}$ درآید آن را مبهم می‌نامیم که برای رفع ابهام آن از روش‌ها مختلفی می‌توان استفاده کرد.

مثال: حدود زیر را بدست آورید؟

۱) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{0}{0} \xrightarrow[\text{ابهام}]{\text{رفع}} \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = -1-1 = \boxed{-2}$

۲) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow[\text{ابهام}]{\text{رفع}} \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$

۳) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{0}{0} \xrightarrow[\text{ابهام}]{\text{رفع}} \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$= \boxed{\frac{1}{4}}$

تذکر: هرگاه x برحسب رادیان باشد داریم

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \end{cases}$$

۴) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{3\times 5x} = \frac{5}{3}\times 1 = \boxed{\frac{5}{3}}$

۵) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x \cdot \tan(x^2) \cdot \tan(x^3)}{5x^6}$

$= \dfrac{1}{5} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} \times \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x^2}{x^2} \times \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x^3}{x^3} = \dfrac{1}{5} \times 1 \times 1 \times 1 = \boxed{\dfrac{1}{5}}$

قضیهٔ فشردگی :

هرگاه توابع f و g و h به گونه‌ای باشند که در یک همسایگی محذوف a داشته باشیم : $g(x) \le f(x) \le h(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$

آن گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ خواهد بود ،

مثال: $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$ را بیابید؟ فرض $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$

$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \xrightarrow{x \ne 0} -x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$

$\longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} (-x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} (x^2) = 0 \end{cases} \xRightarrow[\text{فشردگی}]{\text{طبق قضیهٔ}} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

مثال: اگر برای هر x داشته باشیم ، $|f(x) + 5| \le (x-1)^2$

آنگاه $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ را بیابید؟

$-(x-1)^2 \le f(x) + 5 \le (x-1)^2$

$(x-1)^2 - 5 \le f(x) \le (x-1)^2 + 5 \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1} -(x-1)^2 - 5 = -5 \\ \lim\limits_{x\to 1} (x-1)^2 - 5 = -5 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = -5$

تمرین : حدود زیر را تعیین کنید؟

1) $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{x-1}{[x]-3}$

2) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x^2-4}$

3) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x \operatorname{sgn}(x^2-4)}{x^2-5x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \left[\dfrac{1}{x}\right]$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x-|x|}{[x+1]-x}$

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2-x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x+1)}{x^2-1}$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin 2x)(\sin 3x^2)}{x^2 \sin x}$

11) $\lim\limits_{x\to 2^-} \left((x^2-4)\cos\dfrac{1}{x-2}\right)$

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\tan 3x)-2x}{5x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{x^4}$

14) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3x-1}{x^5}$

تحقیق : مجانب قائم و مجانب افقی یک تابع چیست؟

تعریف: تابع f را در $x=a$ پیوسته می‌گوییم هرگاه آن تابع در $x=a$ دارای حد بوده و مقدار آن برابر $f(a)$ باشد بعبارتی:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=[x](x-1)$ را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید؟

$$\lim_{x\to 1^+} [x](x-1) = [1^+](1-1) = 1\times 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} [x](x-1) = [1^-](1^- -1) = 0\times 0^- = 0$$

$$f(1) = [1](1-1) = 0$$

$\Leftarrow$ تابع مفروض در $x=1$ پیوستگی کامل دارد.

مثال: مقدارهای a, b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد؟

$$f(x)=\begin{cases} ae^{x+1}+x, & x\le -1 \\ 2x-3x^3 & -1<x\le 0 \\ 2^{x+2}-b, & x>0 \end{cases}$$

اولاً: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

$$4-b = 0 \Rightarrow \boxed{b=4}$$

ثانیاً: $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) \Rightarrow a-1=1 \Rightarrow \boxed{a=2}$

قضیهٔ مقدار میانی: اگر تابع $f(x)$ در $[a,b]$ پیوسته و K عددی بین $f(a)$, $f(b)$ باشد

آنگاه حداقل یک نقطه مانند $c \in (a,b)$ هست که $f(c)=K$

نتیجه: اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته و $f(a)$, $f(b)$ مختلف العلامه باشند

آنگاه لااقل یک نقطه مانند $c \in (a,b)$ هست که $f(c)=0$

مثال: نشان دهید معادله $x^3+x-1=0$ در $(0,1)$ حداقل یک ریشه دارد؟

اولاً تابع $f(x)=x^3+x-1$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است لذا در $[0,1]$ هم پیوسته است ثانیاً $f(0)=-1$, $f(1)=1$

یعنی مختلف العلامه

پس بنابه نتیجه قضیه مقدار میانی یک c ای عضو $(0,1)$ هست که $f(c)=0$

تحقیق: پیوستگی روی بازه را تعریف کنید؟

تمرین: پیوستگی توابع زیر را در نقطه ی بیان شده بررسی کنید؟

الف) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{|\cos x|} & , x\neq 0 \\ 2 & , x=0 \end{cases}$ (در نقطه $x=0$)

ب) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & , x>3 \\ 2 & , x=3 \\ 5x-13 & , x<3 \end{cases}$ (در نقطه $x=3$)

ج) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} & , x\neq 1 \\ 5 & , x=1 \end{cases}$ (در نقطه‌ی $x=1$)

تمرین: مقدار تابع f را در نقطه $x=2$ چنان تعیین کنید که تابع

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} & , x\neq 2 \\ ? & , x=2 \end{cases}$ پیوسته باشد؟

تمرین: مقادیر a و b را طوری بیابید که

اولاً، تابع $f(x)=\begin{cases} 2ax+b & , x>-2 \\ 5 & , x=-2 \\ bx^2+3x & , x<-2 \end{cases}$ در $x=-2$ پیوسته باشد؟

ثانیاً، تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-1 & , x\geq 1 \\ 2ax-3b & , x<1 \end{cases}$ در $x=1$ پیوسته باشد؟

تمرین: نشان دهید معادله $x=\sin x+\frac{\pi}{2}$ در فاصله $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

دارای ریشه است؟

فصل سوم ← مشتق
مدرس: محمدعلی عزیزپور

یکی از مفاهیم بنیادی و مهم ریاضیات، مشتق است که در مسائل کاربردی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این فصل تعریف مشتق و قضیه‌ها آن ارائه می‌شود.

تعریف: هرگاه برای یک تابع فرضی f و $a\in D_f$، حد کسر

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad (1)$$

وقتی $(x\to a)$ وجود داشته باشد می‌گوئیم تابع f مشتق‌پذیر بوده و با $f'(a)$ نمایش داده می‌شود. عبارت‌های زیر هم معادل دیگری برای تعریف مشتق می‌باشند و عبارتند از:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{و} \quad f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

تذکر:

۱) اگر حد چپ و حد راست کسر (۱) وقتی $x\to a$ میل می‌کند موجود و باهم مساوی باشند، تابع مشتق‌پذیر است.

۲) قبل از بررسی مشتق‌پذیری تابع در نقطه‌ای مانند $x=a$ بایستی از پیوستگی آن در $x=a$ مطمئن باشیم.

تمرین: مشتق پذیری تابع $f(x)=|x|$ در نقطه‌ی $x=0$ و تابع $g(x)=[x]$ در $x=2$ و تابع $\left(h(x)=\begin{cases}x^2+2 & , x\geq 1\\ 2x+1 & , x<1\end{cases}\right)$ در

نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید؟

تمرین: مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}ax+b & , x<2\\ x^2 & , x\geq 2\end{cases}$

در نقطه‌ی $x=2$ مشتق پذیر باشد؟

* تحقیق: شرایط مشتق پذیری تابع $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ را بیان کنید.

تمرین: مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که توابع زیر در $x=1$ مشتق پذیر باشند.

الف) $f(x)=\begin{cases}ax+b & , x<1\\ x^2+1 & , x\geq 1\end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases}ax^2+1 & , x\leq 1\\ bx-8 & , x>1\end{cases}$

ج) $h(x)=\begin{cases}x^2+3x+a & , x\leq 1\\ bx+2 & , x>1\end{cases}$

قواعد و قوانین مشتق گیری :

۱) $f(x)=C \rightarrow f'(x)=0$ (۲) $f(x)=x^n \rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$

۳) $f(x)=K\,g(x) \longrightarrow f'(x)=K\,g'(x)$ (۴) $f(x)=g(x)\pm h(x) \Rightarrow f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$

فرض : V و U در توابع زیر ، یک تابع از جنس x باشند.

۵) $f(x)=U^n \rightarrow f'(x)=nU'U^{n-1}$ (۶) $f(x)=U.V \Rightarrow f'(x)=U'V+V'U$

۷) $f(x)=\dfrac{U}{V} \rightarrow f'(x)=\dfrac{U'V-V'U}{V^2}$ (۸) $f(x)=\sqrt{U} \rightarrow f'(x)=\dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$

۹) $f(x)=\sqrt[n]{U^m} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{mU'}{n\sqrt[n]{U^{n-m}}}$ (۱۰) $f(x)=\sin U \Rightarrow f'(x)=U'\cos U$

۱۱) $f(x)=\cos U \rightarrow f'(x)=-U'\sin U$ (۱۲) $f(x)=\tan U \rightarrow f'(x)=U'(1+\tan^2 U)$

۱۳) $f(x)=\cot U \rightarrow f'(x)=-U'(1+\cot^2 U)$

۱۴) $f(x)=\sec U \rightarrow f'(x)=U'\sec U\,.\tan U$

۱۵) $f(x)=\csc U \rightarrow f'(x)=-U'\csc U\,.\cot U$

تمرین : ثابت کنید :

اگر $f(x)=\tan x \longrightarrow f'(x)=\sec^2 x$

۱۶) $f(x)=\sin^{-1}(U) \longrightarrow f'(x)=\dfrac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$

۱۷) $f(x)=\cos^{-1}(U) \longrightarrow f'(x)=\dfrac{-U'}{\sqrt{1-U^2}}$

۱۸) $f(x)=\tan^{-1}(u) \longrightarrow f'(x)=\dfrac{u'}{1+u^{۲}}$

۱۹) $f(x)=\cot^{-1}(u) \longrightarrow f'(x)=\dfrac{-u'}{1+u^{۲}}$

۲۰) $f(x)=\sec^{-1}(u) \longrightarrow f'(x)=\dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^{۲}-1}}$

۲۱) $f(x)=CSC(u) \longrightarrow f'(x)=\dfrac{-u'}{|u|\sqrt{u^{۲}-1}}$

۲۲) $f(x)=a^{u} \longrightarrow f'(x)=u'(\ln a)a^{u}$
$(a\neq 1, a>0)$

۲۳) $f(x)=\log_a u \longrightarrow f'(x)=\dfrac{u'}{u(\ln a)}$
$(u>0)$

۲۴) $f(x)=e^{u} \longrightarrow f'(x)=u'e^{u}$ (۲۵) $f(x)=\ln(u) \longrightarrow f'(x)=\dfrac{u'}{u}$
$(u>0)$

۲۶) $y=f\circ g(x) \longrightarrow y'=g'(x)\cdot f'(g(x))$

مثال: از توابع زیر مشتق بگیرید:

۱) $f(x)=\frac{۱}{۴}x^{۸}-x^{۴} \longrightarrow y'=۲x^{۷}-۴x^{۳}$

۲) $y=e^{x}.\cos x \longrightarrow y'=e^{x}\cos x-e^{x}\sin x$

۳) $y=۵^{x}\sin x \longrightarrow y'=(\ln ۵)\,۵^{x}\sin x+(\cos x)(۵^{x})$

۴) $f(x)=۲^{x-1},\ g(x)=1+\sin x \longrightarrow (f\circ g)'(x)=?\ (\cos x)(\ln ۲)(۲^{\sin x})$
$f'(x)=(\ln ۲)\,۲^{x-1},\ g'(x)=\cos x$

۵) $y=f(xe^{x}) \longrightarrow y'=(e^{x}+xe^{x})f'(xe^{x})$

۶) $y=\sqrt{\tan(2x-x^2)} \rightarrow y' = \dfrac{(2-2x)(1+\tan^2(2x-x^2))}{2\sqrt{\tan(2x-x^2)}}$

۷) $y=\cos 5x - 2\sin 3x \rightarrow y' = -5\sin 5x - 6\cos 3x$

۸) $y=\ln(4+2x) \longrightarrow y' = \dfrac{2}{4+2x}$

۹) $y=\dfrac{(2x+1)^3}{(x-1)^4} \longrightarrow y' = \dfrac{6(2x+1)^2(x-1)^4 - 4(x-1)^3(2x+1)^3}{(x-1)^4}$

۱۰) $y=\cot(3x^2+3) \longrightarrow y' = -(6x)(1+\cot^2(3x^2+3))$

مشتق مراتب بالاتر:

برای هر تابع مفروض $y=f(x)$ ، به $y'=f'(x)$ مشتق مرتبه اول و به $y''=f''(x)$ (یعنی دوبار مشتق گرفتن) مشتق مرتبه دوم و به $y'''=f'''(x)$ یا نمایش $(y^{(3)}=f^{(3)}(x))$ مشتق مرتبه سوم و به همین منوال می‌توان ادامه داد ، گفته می‌شود.

مثال: مشتق تا مرتبه سوم توابع زیر را بنویسید؟

۱) $f(x)=(5x-7)^4 \rightarrow y'=20(5x-7)^3 \rightarrow y''=300(5x-7)^2$

$y'''=3000(5x-7)$

۲) $y=4x^3-3x^2+2x-8$

$y'=12x^2-6x+2 \longrightarrow y''=24x-6 \longrightarrow y'''=24$

تحقیق: مشتق مرتبه n ام تابع $y=\cos x$ و $y=\frac{1}{x}$ را بیابید؟

مشتق گیری ضمنی:

اگر در یک رابطه، y به طور صریح برحسب x بیان نشده باشد به آن رابطه ی ضمنی می گویند. مشتق چنین روابطی از فرمول زیر بدست می آید:

$$z=f(x,y) \Longrightarrow y'=-\frac{F_x}{F_y}$$

F_x → مشتق F نسبت به x

F_y → مشتق F نسبت به y

مثال:

1) $y=\sin(2x+y^2)+5 \to f(x,y)=y-\sin(2x+y^2)-5$

$$\to y'=f'(x,y)=-\frac{-2\cos(2x+y^2)}{1-2y\cos(2x+y^2)}$$

2) $x^2y^3=4x \to f(x,y)=x^2y^3-4x \Rightarrow y'=-\frac{2xy^3-4}{3x^2y^2}$

3) $x^2-3y^2=5 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=?$ (یعنی محاسبه ی y'')

ابتدا $y'=-\frac{2x}{6y}=-\frac{x}{-3y}=\frac{x}{3y}$

پس $y''=\frac{3y-3xy'}{9y^2}=\frac{3y-3x(\frac{x}{3y})}{9y^2}=\frac{3y^2-x^2}{9y^2}$

مشتق گیری پارامتری:

گاهی رفتار یک تابع را نمی‌توان به صورت صریح $y=f(x)$ بیان کرد بنابراین برحسب متغیر سومی به نام (t) که گاهاً پارامتر زمان یا زاویه هست بیان می‌گردد. یعنی به شکل:

$$\begin{cases} x=g(t) \\ y=h(t) \end{cases}$$

که به این دستگاه، تابع پارامتری می‌گویند.

برای مشتق این توابع به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

مثال:

$$1)\ \begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=t^2+1 \end{cases} \longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2t}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=4t\sqrt{t}$$

$$2)\ \begin{cases} x=e^t \\ y=2t+3 \end{cases} \longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2}{e^t}$$

$$3)\ \begin{cases} x=2\cos 3t \\ y=5\sin 3t \end{cases} \longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{15\cos 3t}{-6\sin 3t}=-\frac{5}{2}\cot(3t)$$

۴) $\begin{cases} x = t^2+1 \\ y = \frac{1}{t} \end{cases} \longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{1}{t^2}}{2t} = \frac{-1}{2t^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{6t^2}{4t^6}}{2t} = \frac{3}{4t^5}$$

تمرین: مشتقات مرتبه‌ی اول تا چهارم توابع زیر را بیابید؟

1) $y = 4\sin 2t$ (2) $y = e^{3x+1}$ (3) $y = Ln(x)$

تمرین: به کمک تعریف مشتق ضمنی $\frac{dy}{dx}$ را بیابید؟

1) $x^2+y^3 = 3xy+2$ (2) $Cos(2x+3y) = y\sin x$

3) $e^y = Ln(x^3+3y)$ (4) $3x^4y^2 - 7xy^2 = 8-3y$

تمرین: در توابع ضمنی زیر، $\frac{d^2y}{dx^2}$ را محاسبه کنید؟

1) $x^2y^3 = 4$ (2) $x^3+y^3 = 1$ (3) $x^2+6xy+y^2 = 8$

تمرین: در توابع پارامتری زیر $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ را بیابید؟

الف) $\begin{cases} x = t^2+5t \\ y = t^3+2t^2-1 \end{cases}$ (مقدار مشتق‌ها در $t=1$)   ب) $\begin{cases} x = 3t+2 \\ y = t^3 \end{cases}$ (در $t = 2$)

تمرین: از توابع زیر مشتق بگیرید.

1) $y = \ln(\sin 2x)$

(4) $y = (x^2+1)^5 (x^3-x)^4$

2) $y = (3x - x^3)^7$

(5) $y = (x^2+1)^5 e^{5x+1}$

3) $y = 2e^{5x} + 1$

(6) $y = \cos\left(\dfrac{(2x+1)^3}{(x-1)^4}\right)$

7) $y = \sin 5x \cot 4x$

(8) $y = \dfrac{x^2+2x-1}{3x+2}$

9) $y = \tan 2x + \cos 7x$

(10) $y = e^x \cdot \cos x \cdot \sin^3(5x)$

تحقیق: به کمک مشتق گیری ضمنی قوانین زیر را ثابت کنید.

الف) $(\cos^{-1}x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ و ب) $(\cot^{-1}x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

تحقیق: مشتق توابع هیپربولیک را بنویسید؟ (با راه حل ابتکاری)

الف) معادله خط مماس و خط قائم بر منحنی $y=f(x)$

اگر از تابع $y=f(x)$ مشتق بگیریم و مختصات نقطه‌ی فرضی A از منحنی را در آن قرار دهیم، مقدار مشتق بدست آمده، شیب خط مماس در آن نقطه بدست می‌آید و با جایگذاری مختصات و شیب خط در معادله‌ی خط $y-y_0=m(x-x_0)$ معادله‌ی خط مماس بدست می‌آید.

تذکر: می‌دانیم که خط مماس و خط قائم بر یک منحنی با هم زاویه‌ی ۹۰° می‌سازند لذا حاصلضرب شیب‌ها برابر (-۱) خواهد بود لذا شیب خط قائم برابر قرینه‌ی معکوس شیب خط مماس است. و به سادگی همانند معادله خط مماس می‌توان معادله‌ی خط قائم را هم نوشت.

مثال: معادله خط مماس و قائم بر منحنی $y=\sqrt{x}$ در نقطه‌ی $x=۴$ بنویسید؟

$x=۴ \longrightarrow y=\sqrt{۴}=۲ \longrightarrow (۴,۲)$ نقطه تماس

$y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۴}$ شیب خط مماس $\xrightarrow[\text{معکوس}]{\text{قرینه}}$ $m=-۴$ شیب خط قائم

$(y-۲)=\frac{۱}{۴}(x-۴) \Rightarrow y=\frac{۱}{۴}x+۱$ معادله خط مماس

معادله خط قائم = ؟

مثال: معادله خط مماس و قائم بر منحنی $y = x + e^x$ در نقطه $x=0$ بنویسید؟

$x=0 \xrightarrow{\text{در تابع}} y = 0 + e^0 = 1 \rightarrow (0,1)$ نقطه مماس

$y' = 1+e^x \longrightarrow m_p = 1 + e^0 = 2$ شیب خط مماس

$y - 1 = 2(x-0) \longrightarrow y = 2x+1$ معادله خط مماس

معادله خط قائم: تکلیف؟

تمرین: معادله خط مماس و قائم بر منحنی‌های داده شده در هریک از نقاط بیان شده بنویسید؟

الف) $f(x) = (x-1)^2+2$ (در نقطه‌ی $x=1$)

ب) $f(x) = x^2+x+1$ (در نقطه $x=1$)

ج) $x^2+y^2-2y=4$ (در نقطه $(-1,3)$)

د) $\begin{cases} x = 2t^3+1 \\ y = t^2+3 \end{cases}$ (در لحظه‌ی $t=2$) (معادله‌ی حرکت متحرکی در صفحه)

زاویه بین دو منحنی:

هرگاه دو منحنی در نقطه‌ای متقاطع باشند، زاویه بین خطوط مماس بر این دو منحنی

در آن نقطه را α زاویه بین دو منحنی می‌نامند و از فرمول $\tan\alpha = \left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$

که در آن m و m' شیب خطوط مماس می‌باشند ، به دست می‌آید.

مثال: زاویه بین دو منحنی $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ را به دست آورید؟

ابتدا یافتن نقطه برخورد:

$$f(x)=g(x)$$

$$\sqrt{x}=\frac{1}{x} \rightarrow x=\frac{1}{x^2} \rightarrow x^3=1 \longrightarrow x=1$$

$$\begin{cases} m = \text{شیب خط مماس بر تابع } f(x) : \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2} \\ m' = \text{شیب خط مماس بر تابع } g(x) : \quad g'(x)=\frac{-1}{x^2}=-1 \end{cases}$$

$$\tan\alpha=\left|\frac{\frac{1}{2}-(-1)}{1+(\frac{1}{2})(-1)}\right| = 3 \Rightarrow \alpha=\tan^{-1}(3)=71{,}56^\circ$$

تمرین: زاویه بین دو منحنی در هر مورد را بیابید؟

الف) $f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{2x}{x-1}$

ب) $f(x)=x^3+3x^2+2x$ و $g(x)=2x^3+4x$

تذکر: برای یافتن میزان متوسط تغییر یا میزان لحظه‌ای تغییر یک تابع به ترتیب از فرمول $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ و مقدار مشتق تابع در آن لحظه‌ی فرضی استفاده می‌کنیم.

مثال: میزان تغییر لحظه‌ای مساحت دایره‌ای نسبت به محیط آن، وقتی

شعاع دایره $= r$

محیط دایره برابر 8π باشد را بیابید. $\pi r^2 =$ مساحت دایره $= S$

$P =$ محیط دایره $= 2\pi r$ فرض مسأله $2\pi r = 8\pi \rightarrow r = 4$

$$\frac{dS}{dP} = \frac{2\pi r}{2\pi} = r = 4$$

مثال: مکان جسم متحرکی روی خط راست از معادله‌ی $s(t) = t^3 + 6t^2 + 9t$

به دست می‌آید: الف) سرعت متوسط این متحرک در فاصله زمانی $[0, 2]$ را بیابید؟

ب) سرعت لحظه‌ای آن در زمان $t=2$ را بیابید؟

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{S(2) - S(0)}{2 - 0} = \frac{50 - 0}{2} = 25 \quad (\text{واحد})$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای} = S'(2) = 45 \quad (\text{واحد})$$

$s'(t) = 3t^2 + 12t + 9$

تمرین: مقدار بار Q برحسب کولن که از سطحی در زمان t می‌گذرد توسط $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$ مشخص می‌شود. جریان را در لحظه‌های $t=1$ و $t=2$ بیابید؟ (جریان همان میزان تغییرات بار الکتریکی نسبت به t)

تمرین: هزینه یک شرکت برحسب تومان برای تولید x کیلوگرم ماده A در روز $C(x) = 2000 + 4x + ...$ می‌باشد. هزینه متوسط برای تولید 100 کیلوگرم ماده A در روز را بیابید؟ هزینه نهایی برای تولید این 100 کیلوگرم را محاسبه کنید؟

دیفرانسیل (خطا و تقریب)

می دانیم با فرض مشتق پذیری تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=x_0$:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\xrightarrow{\text{با فرض}}_{\text{خیلی کوچک } \Delta x}$$

$$f'(x_0)=\frac{\Delta y}{\Delta x}\longrightarrow \Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x$$

$$\longrightarrow f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$$

از فرمول اخیر در محاسبات خطا و مقدار تقریبی استفاده می‌گردد.

مثال: مقدار تقریبی موارد زیر را بیابید؟ (به کمک دیفرانسیل)

الف) $\sqrt{28}$ ب) $\cos 59^\circ$ ج) $\sqrt[4]{82}$

د) $\tan 46^\circ$

حل الف) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=25\longrightarrow f(x_0)=\sqrt{25}=5$

$\Delta x=28-25=3$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Longrightarrow f'(25)=\frac{1}{10}$

$\therefore\ \sqrt{28}\approx\sqrt{25}+\left(\frac{1}{10}\right)(3)\approx 5{,}3$

* سوال (ب)، (ج) و (د) بعنوان تمرین حل گردد.

تعریف:
$$f'(x)=\frac{dy}{dx}\longrightarrow dy=f'(x)\,dx \quad *$$

با مستقل در نظر گرفتن dx و dy به رابطه ی (*) دیفرانسیل تابع f می گویند.

مثال: دیفرانسیل توابع زیر را بنویسید؟

الف) $y=t^2+5t \Longrightarrow \frac{dy}{dt}=2t+5 \longrightarrow dy=(2t+5)\,dt$

ب) $y=e^{5x-2} \longrightarrow \frac{dy}{dx}=5e^{5x-2} \longrightarrow dy=(5e^{5x-2})\,dx$

ج) $x^2+3xy=5 \longrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+3y}{3x} \Longrightarrow dy=-\left(\frac{2x+3y}{3x}\right)dx$

د) $\sin(xy)+2x-3y=1$

ذ) $y=\ln(x^2-3)$

ر) $y=\sin^2(x)$

ز) $x^2y+xy^3=5$

ه) $\sin(2x+3y)=x^2y$

ی) $y=\frac{x-2}{x^2}$

* بقیه موارد حل نشده بعنوان تمرین به دانشجو واگذار می شود.

تحقیق: قاعده هوپیتال و کاربرد آن را معرفی کنید و به کمک آن

$$\lim_{x\to 0^+} x^x \quad , \quad \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

تحقیق: ثابت کنید: $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$.

قضیه رل: هرگاه برای تابع f داشته باشیم:

الف) روی $[a,b]$ پیوسته ب) روی (a,b) مشتق‌پذیر ج) $f(a)=f(b)$

آن‌گاه حداقل یک عدد مانند c در فاصله (a,b) موجود است، به طوری که $f'(c)=0$

مثال: شرایط قضیه رل را برای تابع $f(x)=x^3-x^2+1$ بررسی کرده و مقدار c را در فاصله $[0,1]$ بیابید؟

$f(x)$ یک چندجمله‌ای است $\longrightarrow$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته $\Rightarrow$ روی $[0,1]$ پیوسته و روی $(0,1)$ مشتق‌پذیر

$$f(0)=f(1)=1 \xrightarrow{\text{طبق قضیه رل}} \exists c\in(0,1)\ ,\ f'(c)=0 \Rightarrow 3x^2-2x=0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ ق ق} \\ x=\frac{2}{3} & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

قضیه لاگرانژ (قضیه مقدار میانگین): اگر تابع f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر، آن‌گاه حداقل یک عدد c وجود دارد که $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $(c\in(0,1))$

مثال: ثابت کنید بنا به قضیه‌ی مقدار میانگین تابع $f(x)=\frac{x}{x+1}$ در $(0,2)$ حداقل یک ریشه دارد؟

$f(x)=\frac{x}{x+1} \longrightarrow$ در $[0,2]$ پیوسته $\longrightarrow$ در $(0,2)$ مشتق‌پذیر

$$\xrightarrow[\text{مقدار میانگین}]{\text{بنا به قضیه}} f'(c)=\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3} \Rightarrow (x+1)^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}-1$$

با توجه به بازه $(0,2)$ $\longleftarrow$ $c=\sqrt{3}-1$ قابل قبول است.

تحقیق: قضیه تیلور را شرح کنید؟ سری مک‌لورن چیست؟

تشخیص صعودی و نزولی، نقاط ماکزیمم و مینیمم و نقطه عطف و جدول تعیین علامت

فرض کنیم تابع f روی (a,b) مشتق پذیر و برای هر دو نقطه دلخواه x و x_1 داریم

اگر $x < x_1 \xrightarrow{f \text{ صعودی}} f(x) < f(x_1) \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} > 0 \Rightarrow f'(x_1) > 0$ حاصله:
شرط تابع صعودی به کمک مشتق

اگر $(x < x_1) \xrightarrow{f \text{ نزولی}} f(x) > f(x_1) \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < 0 \Rightarrow f'(x_1) < 0$
شرط تابع نزولی به کمک مشتق

تعریف: اکسترمم مطلق: فرض کنیم f روی مجموعه A تعریف شده باشد و برای نقطه‌ای مانند $c \in A$ و برای هر $x \in A$ داشته باشیم

$f(x) \le f(c)$ و $f(x) \ge f(c)$

$f(c)$ ماکزیمم مطلق تابع f در A — $f(c)$ مینیمم مطلق در A

و همانند بررسی شرط صعودی و نزولی تابع به سادگی می‌توان به نتیجه زیر رسید:

نتیجه: برای هر نقطه دلخواه $c \in D_f$ اگر $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد به آن نقطه‌ی بحرانی می‌گویند.

نتیجه: اگر برای هر نقطه دلخواه $c \in D_f$: $f'(c)=0$
به c ماکزیمم یا مینیمم تابع می‌گویند.

نتیجه: اگر برای هر نقطه‌ی دلخواه $c \in D_f$، اگر $f''(c)=0$، به c نقطه عطف منحنی گویند.

تذکر: اگر تابع $f'(x)$ را تعیین علامت کنیم اگر $f'>0$ صعودی ($+$ ↗)

و اگر $f'<0$ نزولی ($-$ ↘) می‌باشد. (آزمون مشتق اول)

تذکر: اگر تابع $f''(x)$ را تعیین علامت کنیم اگر $f''>0$ تقعر رو به بالا ($\cup$)

و اگر $f''<0$ تقعر رو به پایین ($\cap$) می‌باشد. (آزمون مشتق دوم)

مثال: جدول تغییرات منحنی تابع های زیر را رسم کرده و به کمک آن مختصات نقاط ماکزیمم و می‌نیمم را پیدا کرده سپس با استفاده از مشتق دوم ابتدا مختصات نقطه عطف را تعیین کرده و جهت تقعر منحنی را تعیین کنید؟

الف) $y = x^3 - 3x + 5$

$y' = 3x^2 - 3 = 0 \longrightarrow x^2 = 1$

$\longrightarrow \begin{cases} x = +1 \longrightarrow y = 3 \\ x = -1 \longrightarrow y = 7 \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	7	↘	3	↗	
			Max		Min		

$y'' = 6x = 0 \longrightarrow x = 0 \longrightarrow y = 5$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	
y		$\cap$ رو به پایین	5 عطف	$\cup$ رو به بالا	

ب) $y = x^4 - 2x^3$ ج) $y = x^3 - 3x^2 + 1$ د) $y = x^4 + 4x - 1$

تمرین: مقادیر a و b را طوری بیابید که:

الف) تابع $f(x) = ax^3 + bx^2$ دارای نقطه عطف به مختصات $(1,2)$ باشد؟

ب) تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ دارای اکسترمم نسبی در $x=1$ و در $x=2$ دارای نقطه عطف باشد؟

تمرین، نمودار توابع زیر را به کمک جدول تغییرات رسم کنید؟

الف) $f(x)=x^2-4x+2$ ب) $f(x)=x^3-3x+3$

(کاربرد ماکزیمم و مینیمم)

تمرین: کارخانه‌ای در ماه x چتر زنانه تولید و هر یک را به قیمت $a=200-0/1x$ ریال می‌فروشد. ساختن x چتر، $C=50x+2000$ ریال هزینه دارد. این کارخانه برای کسب بیشترین سود از طریق فروش کالا باید در ماه چند چتر تولید کند؟

تمرین: هرگاه قیمت فروش کالایی x یورو و تعداد تقاضا برابر $(6000-30x)$ باشد، بیشترین درآمد به ازای چه قیمتی برای این کالا بدست می‌آید؟

تمرین: می‌خواهیم باغچه‌ای به شکل مستطیل بسازیم که محیط آن با نرده به طول ۱۰ متر محصور شود. طول و عرض این باغچه را باید چگونه انتخاب کنیم تا مساحت آن ماکسیمم شود.

تمرین: فرض کنید که کارخانه‌ای در روز x عدد از محصولش را از قرار هر عدد $P=6-\frac{1}{2}x$ هزار می‌فروشد. سطح تولید روزانه را چنان تعیین کنید که درآمد حاصل از فروش ماکزیمم شود؟

در بسیاری از مسائل ریاضی و کاربردهای آن، عکس عمل مشتق‌گیری لازم است،
یعنی با داشتن مشتق یک تابع می‌خواهیم تابع اولیه‌ی آن را بیابیم.

اگر $F(x)$ تابع اولیه برای $f(x)$ و c یک عدد حقیقی باشد هر تابع به صورت $F(x)+C$ یک تابع اولیه برای $f(x)$ می‌باشد. $\left(f(x)=F'(x) \right)$

و می‌نویسیم:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

قواعد انتگرال‌گیری:

1) $\int dx = x + C$

2) $\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx \quad (a \in R)$

3) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

4) $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

5) $\int u' u^n\,dx = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$

مثال: انتگرال‌های زیر را حساب کنید:

1) $\int x^5\,dx = \dfrac{x^6}{6} + C$

2) $\int \left(2x + \dfrac{1}{x^3}\right)dx = \int (2x + x^{-3})\,dx = x^2 - \dfrac{1}{2x^2} + C$

3) $\int (x^2 - 3x + 5)\,dx = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 5x + C$

4) $\int \dfrac{(x^3 + 2x^2)}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int 2x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{2x^{\frac{9}{2}}}{9} + \dfrac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} + C$

انتگرال معین:

برای بدست آوردن مساحت زیر نمودار منحنی تابع $y=f(x)$ در یک فاصله ی معین مانند $[a,b]$ از روش زیر کمک می‌گیریم.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \qquad (*)$$

تحقیق: رابطه $(*)$ فوق به چه صورت قابل اثبات است؟

مثال:

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{2^3}{3}-\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\int_1^2 (2x-1)^3\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{(2x-1)^4}{4}\right)\Bigg]_{x=1}^{2}$$

$$= \frac{1}{8}\left(3^4-1\right) = \frac{1}{8}\left(80\right) = 10$$

با آرزوی توفیق برای شما دانشجویان گرامی، ان شاء الله.

مبسوط بحث‌های انتگرال‌های معین و نامعین در ریاضیات (۲) ارائه پیدا خواهد کرد.

پیروز و سربلند باشید. عزیزپور