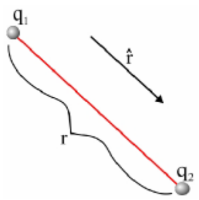
قوانین الکتریسیته ساکن در فضای خالی

قانون کولن:

هر دو بار الکتریکی به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند. نیروی بین دو بار الکتریکی q_1 و q_2 است که در فاصله‌ی r از یکدیگر هستند:



$$\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

r : فاصله دو بار از یکدیگر

$\hat{r}$: بردار یکه در جهت خط فاصل دو بار

می‌دانیم که:

$q_1 q_2 < 0 \rightarrow$ جاذبه $\quad q_1 q_2 > 0 \rightarrow$ دافعه

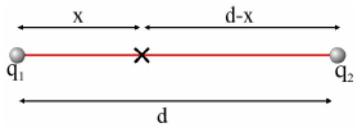
نقطه کور

یعنی نقطه‌ای که اگر باری در آن جا قرار دهیم، هیچ نیرویی به آن وارد نخواهد شد. یعنی میدان در آن نقطه برابر صفر است.

بررسی حالات مختلف نقطه کور

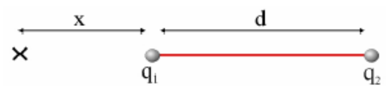
۱) اگر دو بار همنام باشند:

نقطه کور، بین دو بار، نزدیک‌تر به بار کوچک‌تر است.



$$\frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(d-x)^2}$$

۲) اگر دو بار ما غیرهمنام باشند:



$$\frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(d+x)^2}$$

مفهوم میدان الکتریکی

هر جرمی در اطراف خود یک میدان جاذبه گرانشی ایجاد می‌کند.

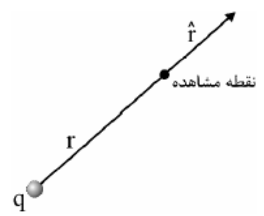
هر بار الکتریکی در اطراف خود یک میدان الکتریکی می‌آفریند.

هر بار متحرک (جریان) در اطراف خود ایجاد میدان مغناطیسی می‌کند.

میدان الکتریکی یک بار در یک نقطه برابر است با نیروی وارد بر بار مثبت $+1^{c}$ (بار آزمون)، یعنی:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

طبق رابطه نیرو، میدان الکتریکی یک بار q در فاصله r از آن برابر است با:



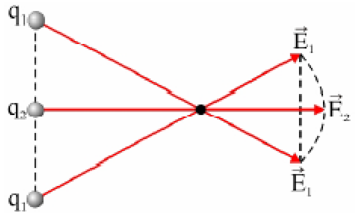
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$\text{if } q > 0 \Rightarrow$ میدان شعاعی دور شونده است.

$\text{if } q < 0 \Rightarrow$ میدان شعاعی نزدیک شونده است.

میدان الکتریکی ناشی از بارهای گسسته:

اگر N تا بار نقطه‌ای داشتیم و میدان برآیند این N تا بار را در یک نقطه مشاهده می‌خواستیم، باید چه کنیم؟
چون $E \propto q$ یعنی رابطه خطی با هم دارند، پس می‌توان از جمع آثار (**جمع برداری**) استفاده کرد.



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi \varepsilon_0 r_i^2}\,\hat{r}$$

r_i فاصله بین بار q_i تا نقطه مشاهده است.

دو بار نقطه‌ای $-q$ و $\frac{+q}{2}$ به ترتیب در مبدأ مختصات و در نقطه‌ای با مختصات $(a,0,0)$ قرار گرفته‌اند. در چه نقطه‌ای میدان صفر است؟ (سراسری ۱۳۷۲)

۱) $x = \frac{a}{2}$ ۲) $x = (2-\sqrt{2})a$ ۳) $x = 2a$ ۴) $x = (2+\sqrt{2})a$

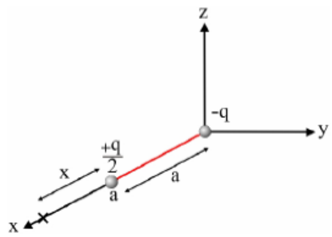
حل. گزینه ۴ درست است.

بارها غیر همنام هستند؛ پس در نقطه‌ای خارج و نزدیک به بار کوچک‌تر، نقطه‌ای کور داریم:

$$\frac{\frac{q}{2}}{x^2} = \frac{q}{(a+x)^2} \Rightarrow \frac{1}{2}(a+x)^2 = x^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(a+x) = x \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} = x\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = x\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}-1}$$



پس مختصات نقطه کور:

$$a + \frac{a}{\sqrt{2}-1} = a\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right] = a\left[\frac{\sqrt{2}-1+1}{\sqrt{2}-1}\right] = a\,(2+\sqrt{2})$$

گزینه ۴ درست است.

میدان الکتریکی ناشی از بارهای پیوسته

تا حالا بارهای نقطه‌ای را در نظر گرفته‌ایم و برای برآیند آن‌ها از $\sum$ استفاده کرده‌ایم در حالت پیوسته، جانشین $\sum$ (سیگما)، $\int$ (انتگرال) می‌شود.

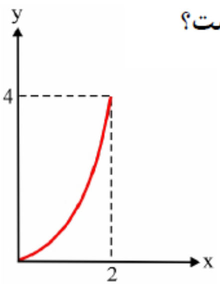
حالت‌های مختلف توزیع پیوسته

طولی: یعنی میله‌ای با قطر ناچیز

چگالی بار خطی:

$$\rho_\ell = \frac{dq}{d\ell} \Rightarrow dq = \rho_\ell d\ell \Rightarrow q = \int_\ell \rho_\ell d\ell$$

روی سیمی منطبق بر سهمی $y = x^2$ بار خطی با چگالی $\rho_\ell = y + 3x^2$ است. کل بار چقدر است؟



$$q = \int_\ell \rho_\ell d\ell$$

$$\overrightarrow{d\ell} = dx\hat{x} + dy\hat{y}$$

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad dy = 2xdx \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{d\ell} = dx\hat{x} + (2x\,dx)\hat{y}$$

ما در $q = \int_\ell \rho_\ell d\ell$ با $d\ell$ اسکالر سروکار داریم نه $\overrightarrow{d\ell}$ برداری!

پس:

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + 4x^2\ dx^2} \quad \Rightarrow \quad d\ell = dx\sqrt{1+4x^2}$$

$$\rho_\ell = y + 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \rho_\ell = 4x^2 \quad \Rightarrow \quad q = \int_0^2 4x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx = \cdots$$

میدان الکتریکی ناشی از توزیع پیوسته خطی

هر بار پیوسته متشکل از بی‌نهایت بار کوچک (dq) است. هر بار کوچک (dq) ، ایجاد یک میدان کوچک (dE) می‌کند؛ بنابراین برای میدان ناشی از یک بار پیوسته طولی، چنین داریم:

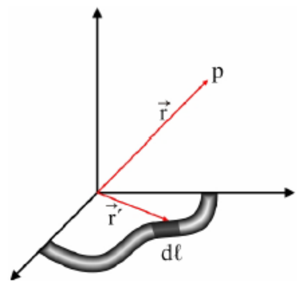
$$\vec{E} = \int \frac{\rho_\ell d\ell}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

رابطه بالا را می‌توان به این صورت هم نوشت:

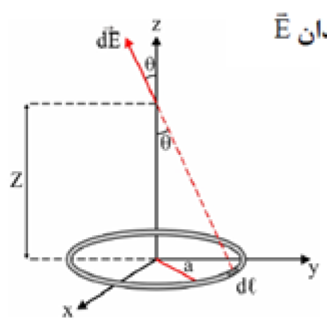
$$\vec{E} = \int_\ell \frac{\rho_\ell\ d\ell(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\ \varepsilon_0\ |\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$\vec{r}'$: برداری که مبدأ را به المان بار کوچک (dq) وصل می‌کند.

$\vec{r}$: برداری که مبدأ را به نقطه مشاهده وصل می‌کند.



حلقه‌ای داریم به شعاع a و چگالی بار خطی $\rho_\ell\left(\frac{c}{m}\right)$. مطلوب است محاسبه میدان $\vec{E}$ روی محور میله با فاصله z .



حل:

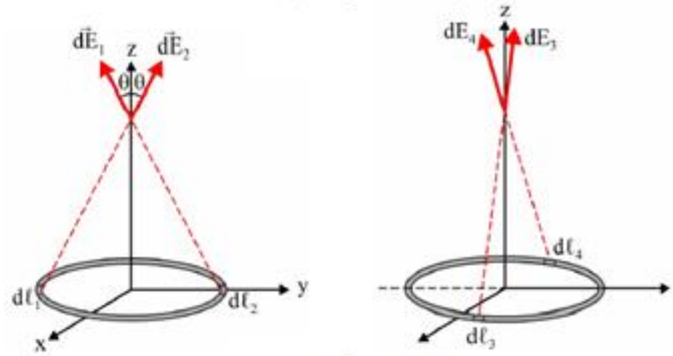
روش اول: در اکثر کتاب‌ها این مثال از روش برداری حل شده است:

$$\begin{cases} \vec{r}' = a\,\hat{r} \\ \vec{r} = z\,\hat{z} \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{r} - \vec{r}' = z\,\hat{z} - a\,\hat{r}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = \left(z^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$E = \int_{\ell} \frac{\rho_\ell d\ell (z\hat{z} - z\hat{r})}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \dots$$

المان سیم $d\ell_1$ را گرفته و میدان آن را در نقطه مورد نظر تعیین می‌کنیم «$\overrightarrow{dE}_1$»، سپس یک المان دیگر «$d\ell_2$» را که درست در مقابل آن قرار دارد، در نظر می‌گیریم و می‌بینیم که آن هم یک میدان «$\overrightarrow{dE}_2$» را ایجاد می‌کند:



$d\ell_1$ و $d\ell_2$ها به ما می‌گویند که برآیند ما در جهت $\hat{y}$ صفر است و فقط مؤلفه برآیند z داریم.
$d\ell_3$ و $d\ell_4$ها به ما می‌گویند که برآیند ما در جهت $\hat{x}$، صفر است و فقط مؤلفه برآیند $\hat{z}$ داریم.

و این یعنی اینکه حلقه باردار فقط میدان در راستای محور $\hat{z}$ دارد. با توجه به شکل می‌دانیم که:

$$\overrightarrow{dE} = \frac{\rho_\ell d\ell}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{r}$$

از طرفی:

$$d\ell = a d\varphi$$

پس:

$$\overrightarrow{dE} = \frac{\rho_\ell a d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 \left(a^2 + z^2\right)}\hat{r}$$

ما فقط مؤلفه $\hat{z}$ را می‌خواهیم که در نهایت برای ما باقی می‌ماند پس الان دیگر چون جهت میدان را می‌دانیم، می‌گوییم:

$$E = \int dE_z = \int \frac{\rho_\ell \, a \, d\varphi}{4\pi\,\varepsilon_0 \left(a^2 + z^2\right)} \cdot \cos\theta$$

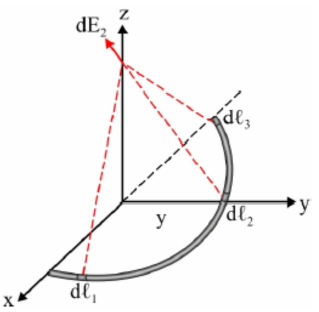
این انتگرال دیگر برداری نیست و عددی است پس مقدارش را حساب می‌کنیم. درواقع $\cos\theta$ عامل اسکالرساز ماست که مؤلفه E_z را برای ما جدا می‌کند.

$$\cos\theta = \frac{z}{\left(a^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \Rightarrow \quad E_z = \int \frac{\rho_\ell a d\varphi . z}{4\pi\varepsilon_0 \left(a^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\rho_\ell a . z}{4\pi\varepsilon_0 \left(a^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \times 2\pi \quad \Rightarrow \quad E_z = \frac{\rho_\ell \, a . z}{2\varepsilon_0 \left(a^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

حال که اندازه میدان را فهمیدیم جهتش را خودمان اضافه می‌کنیم:

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell \; a \cdot z}{2\varepsilon_0 \left(a^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} . \hat{z}$$

میدان ناشی از نیم‌دایره زیر را در نقطه p روی محور z بیابید.



میدان $d\ell_1$ و $d\ell_3$ را تجسم کنید.مؤلفه $\hat{x}$ نداریم اما مؤلفه $\hat{y}$ و $\hat{z}$ داریم.

در این شکل نسبت به حالت دایره، تقارن در راستای $\hat{y}$ به هم خورد، اما تقارن در راستای $\hat{x}$ به هم نخورده است.

$$\vec{E} = E_z\hat{z} - E_y\hat{y}$$

وقتی دایره کامل بود، در هر دو نیم‌دایره ، $d\ell$ها به سمت $+\hat{z}$ هل می‌دادند و میدان $\dfrac{\rho_\ell\, a\, z}{2\varepsilon_0 R^3}$ ایجاد می‌شد، حالا که نصف این $d\ell$ها «نیم‌دایره» را دور می‌زنند پس:

$$E_z = \frac{\rho_\ell\, az}{4\varepsilon_0\, R^3}$$

dE_z: یعنی تصویر dE روی z، یعنی $dE\cos\theta$، که به دستش آوردیم.

dE_y: تصویر dE روی محور y هاست.

در کروی وقتی می‌خواستیم تصویر بردار $\hat{R}$ را روی محورهای کارتزین پیدا کنیم،اول می‌انداختیم روی r، بعد انتقال می‌دادیم روی x و y.

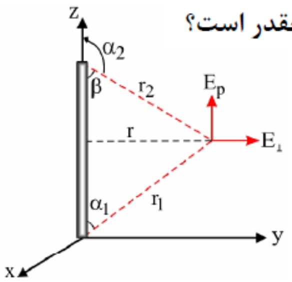
$$dE_y = \underbrace{dE\ \mathrm{Sin}\theta}_{\text{انداختم کف صفحه}}\ .\ \underbrace{\mathrm{Sin}\varphi}_{\text{افتاد روی محور y}}$$

$$E_y = \int dE_y = \int \frac{\rho_\ell a d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.\sin\theta\sin\varphi$$

$$\sin\theta = \frac{a}{R} \Rightarrow E_y = \frac{a^2\rho_\ell}{4\pi\,\varepsilon_0 R^3}\int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi \Rightarrow E_y = \frac{a^2\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$E = \frac{\rho_\ell a\, z\,\hat{z}}{4\varepsilon_0 R^3} - \frac{a^2\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\,\hat{y} = \frac{\rho_\ell a}{2\varepsilon_0 (z^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{z\,\hat{z}}{2} - a\,\hat{y}\right]$$

میدان ناشی از میله‌ای محدود با چگالی بار طولی ρ_ℓ در فاصله عمودی r از میله چقدر است؟



باید گفت که میله در نقطه مشاهده، دو مؤلفه میدان دارد:

۱) مؤلفه عمود بر محور میله $E_\perp$

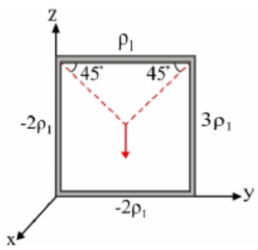
۲) مؤلفه موازی میله $E_{||}$

$$\vec{E} = \underbrace{\frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\,\hat{r}}_{\text{مؤلفه عمود بر محور میله}} + \underbrace{\frac{\rho_\ell}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)\hat{z}}_{\text{مؤلفه موازی با محور میله}}$$

گاهی مؤلفه عمود بر میله را چنین هم می‌نویسند:

$$\vec{E}_P = \frac{\rho_\ell}{4\pi\,\varepsilon_0 r}\left[\cos\alpha_1 + \cos\beta\right]\hat{r}$$

میدان در مرکز مربع نشان داده شده چقدر است؟ (ضلع مربع a است.)

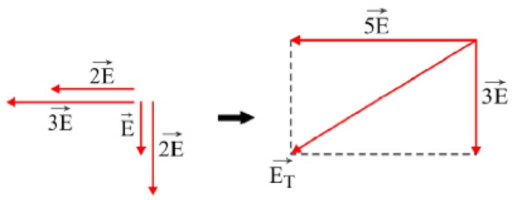


اگر میدان ناشی از میله باردار با چگالی ρ_ℓ را با $\vec{E}$ نشان دهیم، می‌توان گفت:

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\,\varepsilon_0 \frac{a}{2}}\left[\cos 45^\circ + \cos 45^\circ\right]\,\hat{r} + 0 \;\;\Rightarrow\;\; \vec{E} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\,\varepsilon_0 \frac{a}{2}}\left[2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\hat{r}$$

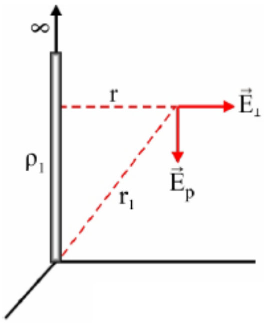
می‌خواهیم مؤلفه میله باردار $-2\rho_\ell$ را که در پایین مربع قرار دارد بیابیم. برای این میله هم α_1 و β همان 45° است و تنها تفاوت با میله ρ_ℓ، در مقدار بار و علامت بار است که این دو تفاوت در میدان این میله تأثیر می‌گذارد. میدان این میله اندازه‌اش 2 برابر $\vec{E}$ و هم‌جهت با $\vec{E}$ است.

حالا تمام میدان‌ها را می‌کشیم:



$$E_T = \sqrt{34} \times \frac{\sqrt{2}\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 a} \quad , \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{3}{5}$$

فرمولی برای میدان نیم‌خط و خط پیدا کنید، اگر نقاط مشاهده ما چنین باشند:



الف) نقطه کلی p_1 در فضا

حل،

نیم‌خط یعنی از یک سر نامحدود یعنی در آن فرمولی که حفظ کردیم:

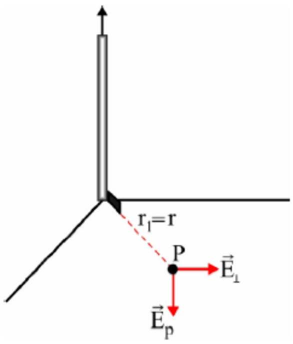
۱) α_1 سر جایش هست.   ۲) $\beta = 0$

۳) r سر جایش هست.   ۴) یکی از فاصله‌های دو سر ∞ شده است.

پس برای این حالت:

$$\vec{E}_{\parallel} = \frac{-\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0 r_1}\hat{z} \qquad \vec{E}_\perp = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\alpha + 1)\hat{r}$$

ب) اگر نقطه مشاهده در صفحه شروع نیم‌خط باشد:



برای این حالت:

$$\alpha_1 = 90^\circ \quad \text{و} \quad \beta = 0 \quad \text{و} \quad r_0 = r \quad \text{و} \quad r_2 = \infty$$

جهت‌ها را هم تعیین می‌کنیم:

$$\vec{E}_\perp = \frac{\rho_\ell}{4\pi\,\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

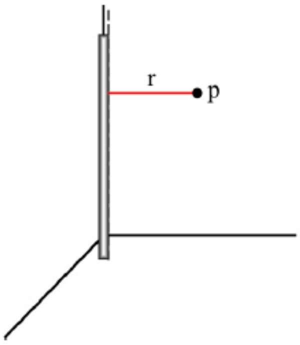
$$\vec{E}_{\parallel} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0 r}(-\hat{z})$$

در این حالت: $|E_{\parallel}| = |E_\perp|$

میدان ناشی از نیم‌خط باردار روی $z>0$ با چگالی ρ_ℓ در نقطه‌ای روی صفحه xoy ، با صفحه xoy چه زاویه‌ای می‌سازد؟

طبق حرف‌های بالا واضح است که جواب $45°$ می‌شود.

ج) اگر خط داشته باشیم:



$$r_1=\infty,\quad r_2=\infty,\quad \alpha_1=0,\quad \beta=0 \quad\Rightarrow\quad E_\perp=\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 r},\quad E_\parallel=0$$

بار خطی یکنواخت با چگالی ρ_ℓ روی محور z از $-a<z<a$ توزیع شده است. میدان الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله r از خط بار واقع در صفحه xy چقدر است؟ **(سراسری ۱۳۸۵)**

۱) $\vec{E}=\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\hat{r}$

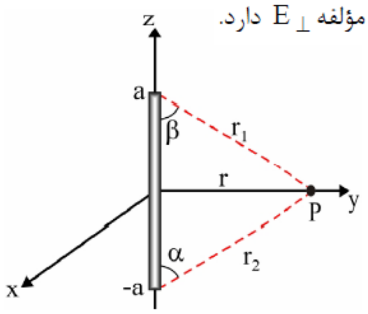
۲) $\vec{E}=\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+a^2}}\hat{r}$

۳) $\vec{E}=\frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+a^2}}\hat{r}$

۴) $\vec{E}=\frac{\rho_\ell a}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{r^2+a^2}}\hat{r}$

حل:

روش ۱: واضح است که p روی عمود منصّف میله قرار دارد؛ پس $E_\parallel=0$ و فقط مؤلفه $E_\perp$ دارد.



با توجه به شرایط عمود منصّف:

$$\alpha=\beta \Rightarrow r_1=r_2=\sqrt{a^2+r^2}$$

$$E_{\perp}=\frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0 r}(\text{Cos}\alpha+\text{Cos}\beta)=\frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0 r}(2\text{Cos}\alpha)$$

اما

$$\text{Cos}\alpha=\text{Cos}\beta=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}$$

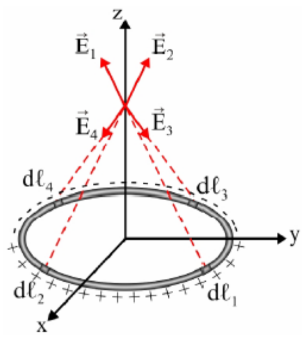
$$E_{\perp}=\frac{2\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0 r}\times\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}=\frac{\rho_\ell a}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{a^2+r^2}}$$

حالا می‌گوییم جهتش در راستای $\hat{r}$ استوانه‌ای است یعنی:

$$\vec{E}=\frac{\rho_\ell\ a}{2\pi\ \varepsilon_\circ r\sqrt{a^2+r^2}}\hat{r}$$

گزینهٔ ۴ درست است.

میدان ناشی از یک حلقه باردار به چگالی بار خطی $\rho_\ell=\rho_0\cos\varphi\left(\frac{c}{m}\right)$ را روی محور حلقه به دست آورید؟



حل:

$d\ell_1$ و $d\ell_2$ را در نظر بگیرید. E_1 ، E_2 مؤلفه $\hat{y}$ شان خنثی می‌شود اما مؤلفه $\hat{z}$ برآیند دارند. $d\ell_3$ و $d\ell_4$ را هم در نظر بگیرید. E_3 ، E_4 هم مؤلفه $\hat{y}$ شان صفر می‌شود اما مؤلفه $\hat{z}$ برآیند دارند. جالب‌تر اینکه مؤلفه $\hat{z}$ برآیند E_3، E_4، همان مؤلفه $\hat{z}$ برآیند E_1، E_2 است ولی با علامت قرینه؛ یعنی دوباره برآیند $\hat{Z}$ صفر شد. از طرفی نشان دادیم برآیند $\hat{y}$ ما هم صفر است.

$$\vec{E}=E_X(-\hat{x})$$

باید مؤلفه E_X را بیابیم. E_X یعنی تصویر $\vec{E}$ روی محور x

این انتگرال برداری است:

$$\int\overrightarrow{dE}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho_0\text{Cos}\varphi\ a\ d\varphi}{R^2}\hat{R}$$

$$E_X=\int_0^{2\pi}\frac{\rho_0\text{Cos}\varphi\ a\,d\varphi}{4\pi\ \varepsilon_0\ R^2}\ \underset{\text{صفحه کف}}{\underset{\downarrow}{\text{Sin}\theta}}\ .\ \underset{\text{انداختیم روی محور x}}{\underset{\downarrow}{\text{Cos}\varphi}}$$

$$E_X=\frac{\rho_0 a^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\ \Rightarrow\ (\text{چون میدان فقط مؤلفه‌ی } -\hat{x} \text{ دارد.})\ \Rightarrow\ \vec{E}=\frac{-\rho_0\ a^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{x}$$

میدان الکتریکی ناشی از توزیع پیوسته سطحی

دقیقاً مشابه قبل است فقط در اینجا:

$$dq = \rho_S ds \quad \Rightarrow \quad q = \int_s \rho_s ds$$

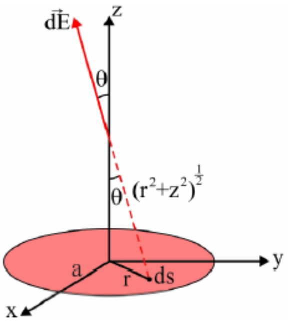
$$\rho_S = \frac{dq}{ds}$$

میدان الکتریکی ناشی از این توزیع هم چنین است:

$$E = \int_S \frac{\rho_S ds}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \hat{r} \qquad \text{یا} \qquad E = \int_S \frac{\rho_0 ds(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\,\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

بقیه حرف‌ها تکراری است.

میدان یک دیسک با چگالی بار سطحی $\rho_S\left(\frac{c}{m^2}\right)$ و شعاع a را در فاصله z روی محور آن محاسبه کنید؟



در این‌گونه مسایل دو راه حل وجود دارد:

۱) راه حل مستقیم:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_S r\,dr\,d\varphi}{(r^2 + z^2)}\hat{R} \qquad ds = r\,dr\,d\varphi \text{ (المان سطح)}$$

این انتگرال برداری است . انتگرال برداری را به انتگرال عددی تبدیل می‌کنیم:

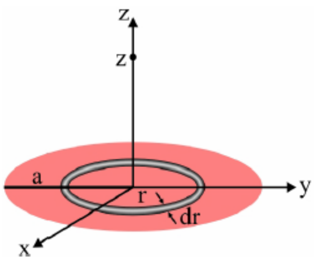
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\rho_s \int \frac{r\,dr\,d\varphi}{(r^2 + z^2)} \cos\theta \hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_S z}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{r\,dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_S\, z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right]\hat{z}$$

۲) راه حل غیر مستقیم:

روال کار ما این است که روی سطح دیسک، یک حلقه باردار به شعاع r و ضخامت dr در نظر گرفته‌ایم. میدان حلقه را روی محور حلقه می‌شناسیم، حالا اگر بتوانیم این حلقه را به دیسک ربط دهیم کار تمام است. این دیسک از ∞ تا از این حلقه‌های باردار تشکیل شده که فقط شعاع آن‌ها متفاوت است. اگر از میدان حلقه باردار انتگرال بگیریم و حدود تغییرات r یعنی شعاع حلقه را از 0 تا a تغییر دهیم، انگار که میدان تمام حلقه‌های موجود روی دیسک را از شعاع ε تا شعاع a با هم جمع زده‌ایم و این یعنی میدان دیسک باردار. برای میدان حلقه باردار روی محور حلقه و به ارتفاع Z داشتیم:

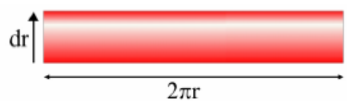


$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell \, r z}{2\varepsilon_0 \left(r^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}$$

و اما ρ_ℓ! در مسئله اصلی توزیع سطحی است و رابطه‌ای که در آخر به دست می‌آوریم باید بر حسب ρ_S باشد و نه ρ_ℓ؛ پس باید آن را تبدیل کنیم:

$$q = \rho_\ell \,.\, \overset{\overset{\text{طول حلقه باردار}}{\uparrow}}{2\pi r}$$: بار روی حلقه باردار از دید توزیع خطی « ρ_ℓ »

$$q = \rho_s \,.\, \underset{\underset{\text{مساحت حلقه باردار}}{\downarrow}}{2\pi r dr}$$: بار روی حلقه باردار از دید توزیع سطحی « ρ_s »



از طرفی بار روی حلقه باردار باید از هر دو دید نهایتاً یکی شود، پس این دو را برابر قرار می‌دهیم:

$$\boldsymbol{\rho_\ell \cdot 2\pi r = \rho_s \cdot 2\pi r dr \quad \Rightarrow \quad \rho_\ell = \rho_s dr}$$

عالی شد! حالا می‌توانیم با فرمول کار کنیم:

$$\overrightarrow{dE} = \frac{\rho_S dr \, r z}{2\varepsilon_0 \left(r^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \hat{z}$$

نوشتیم $\overrightarrow{dE}$؛ چون این حلقه، برای دیسک یک المان در نظر گرفته می‌شود.

$$\vec{E} = \frac{\rho_S \, z}{2\,\varepsilon_\circ} \int_\circ^a \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \, \hat{z} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\rho_S \, z}{2\varepsilon_\circ} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right] \hat{z}$$

همان نتیجه قبلی به دست آمد.

سؤال اول؛ اگر a یعنی شعاع دیسک باردار به سمت ∞ میل کند، چه شکلی خواهیم داشت؟

یک صفحه باردار با ابعاد نامحدود. حالا در فرمول مربوط به دیسک باردار هم $a \to \infty$ میل می‌دهیم:

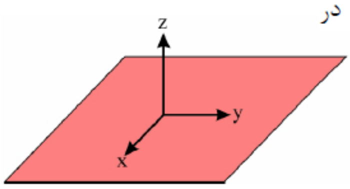
$$\vec{E}=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{n} \quad (\text{بردار عمود بر سطح به سمت خارج} = \hat{n})$$

پس می‌توان گفت که:

میدان برای صفحه نامحدود با چگالی بار سطحی ρ_s از این رابطه به دست می‌آید:

$$\vec{E}=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$

صفحه ∞ فقط در راستای بردار عمود بر صفحه مؤلفه دارد، مثلاً اگر این صفحه ∞ را در صفحه xoy فرض کنیم:



در این صفحه بردار عمود ما $\hat{z}$ است؛ یعنی این صفحه در راستای $\hat{x}$ و در راستای $\hat{y}$ هیچ مؤلفه میدانی ندارد.

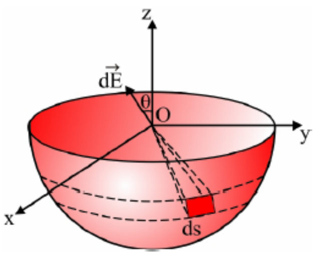
از روی سطح صفحه تا هر جا که بری، میدان تابعی از فاصله نقطه مشاهده تا صفحه نیست. یعنی

$$\vec{E}=\left|\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\right|\hat{n}$$

اما واقعاً صفحه ∞ که نداریم.

اگر فاصله نقطه مشاهده تا صفحه در مقایسه با ابعاد صفحه خیلی ناچیز باشد، صفحه حکم یک صفحه بی‌نهایت را برای نقطه بازی می‌کند.

پوسته نیم‌کروی شکل زیر دارای بار سطحی یکنواخت ρ_s است. یک بار به جرم m و بار Q در مرکز کره قرار می‌دهیم. جرم m چقدر باشد تا ذره سقوط نکند؟ (سراسری ۱۳۷۶)



۱) $\frac{Q\rho_s}{4g\varepsilon_0}$

۲) $\frac{Q\varepsilon_0}{2g\rho_s}$

۳) $\frac{2Qg}{\varepsilon_0\rho_s}$

۴) $\frac{4Qg}{\varepsilon_0\rho_s}$

روش اول: باید میدان در مرکز نیم‌کره «مبدأ مختصات»، یعنی جایی که بار قرار دارد، را بیابیم و از $\vec{F}=q\vec{E}$ نیروی وارد بر بار از طرف نیم‌کره را یافته و مساوی mg قرار دهیم.

پس ابتدا میدان در مرکز نیم‌کره را پیدا می‌کنیم:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_s a^2 \ \text{Sin}\theta \ d\theta \ d\varphi}{a^2}\hat{R}$$

با تبدیل به انتگرال اسکالر

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int \sin\theta \ d\theta \ d\varphi \overbrace{\cos\theta}^{\text{عامل اسکالرکننده}} \ \hat{z} = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\times 2\pi \times \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \hat{z}$$

در مورد حدود θ $\left[0-\frac{\pi}{2}\right]$ یا $\left[\frac{\pi}{2}-\pi\right]$ تفاوت در یک علامت منفی است و از آنجا که جهت را جداگانه بررسی می‌کنیم، این تفاوت اهمیت خود را از دست می‌دهد.

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{4\varepsilon_0}\hat{z}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \ \Rightarrow \ \hat{E} = \frac{Q\rho_s}{4\varepsilon_0}\hat{z} \ = mg\hat{z} \ \Rightarrow \ m = \frac{Q\rho_s}{4g\varepsilon_0}$$

اهمیت تقارن:

تقارن در راستای مؤلفه یعنی میدان ما در راستای محور ، مؤلفه ندارد.

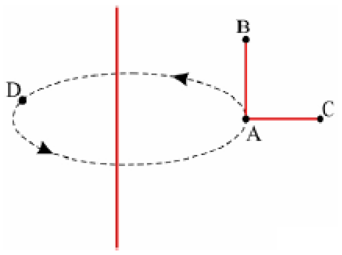
اگر توزیع باری را به ما دادند و میدان ناشی از توزیع بار را از ما خواستند، اگر این توزیع بار در راستای محور متقارن است، آن وقت میدان ناشی از این توزیع، مؤلفه ندارد. حالا که میدان این مؤلفه‌ها را دارد و را ندارد، خود این مؤلفه‌های موجود هم در ذات خودشان عاری از پارامتر هستند.

فرض کنید مسئله به صورتی باشد که تقارن در راستای $\hat{\theta}$ و $\hat{\varphi}$ داشته باشیم؛ پس میدان فقط مؤلفه R دارد و این مؤلفه R هم هیچ وابستگی به پارامترهای θ و φ نخواهد داشت یعنی:

$$\vec{E} = E(R)\hat{R}$$

حالا انواع تقارن را با هم بررسی می‌کنیم:

۱) بار خطی نامحدود را در نظر بگیرید.



نسبت به محور Z تقارن داریم.

نسبت به محور φ تقارن داریم.

در راستای $\hat{r}$ تقارن نداریم.

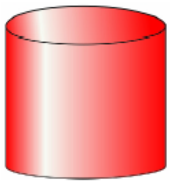
میدان این توزیع بار، مؤلفه z و φ ندارد و فقط تابعی از r است؛ یعنی:

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

یعنی تقارن در راستای تغییرات φ، که چنین می‌شود:

و نیز تغییرات z ، که چنین است:

و اگر این‌ها را به هم بچسبانیم این‌چنین است:



نام این تقارن، تقارن استوانه‌ای است؛ هرچند بعضی‌ها تقارن محوری هم می‌گویند.

تعدادی از توزیع‌های معمول که تقارن استوانه‌ای دارند:

۱) میله باردار (توزیع خطی) نامحدود و البته یکنواخت

۲) بار سطحی (پوسته استوانه‌ای) با چگالی بار یکنواخت روی کل سطح استوانه

۳) بار حجمی‌در استوانه توپر با ρ_V یکنواخت

۴) بار حجمی در استوانه توپر با چگالی ρ_V غیر یکنواخت اما فقط تابع r یعنی $\rho_V(r)$

تقارن کروی:

همانطور که از نامش پیداست، یعنی ما در راستای $\hat{\varphi}$ و $\hat{\theta}$ تقارن داریم؛ بنابراین مؤلفه θ و φ نداریم و میدان ما فقط مؤلفه شعاعی R خواهد داشت، یعنی:

$$\vec{E} = E(R)\hat{R}$$

حالت توزیع باری را که دارای این تقارن هستند در پایین می‌آوریم:

۱) بار نقطه‌ای

۲) بار سطحی یکنواخت روی سطح کره کامل

۳) بار حجمی‌در کره با ρ_V یکنواخت

۴) بار حجمی غیریکنواخت در کره با ρ_V متغیر که فقط تابع R باشد.

یک سطح بی‌نهایت با چگالی سطحی $\rho_s = 12\varepsilon_0\left(\frac{c}{m^2}\right)$ منطبق بر صفحه $x - 2y + 3z = 4$ در فضای آزاد قرار دارد. مطلوب است محاسبه شدت میدان الکتریکی در آن ناحیه از فضا که مبدأ هست. (سراسری ۱۳۷۴)

۱) $\vec{E} = \frac{-3}{\sqrt{14}}(\hat{x} + 2\hat{y} - 3\hat{z})$

۲) $\vec{E} = \frac{-6}{\sqrt{14}}(\hat{x} + 2\hat{y} - 3\hat{z})$

۳) $\vec{E} = \frac{-6}{\sqrt{14}}(\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z})$

۴) $\vec{E} = \frac{-3}{\sqrt{14}}(\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z})$

حل. گزینه ۳ درست است.

یاد صفحه ∞ ؟! بله ما میدان این صفحه ∞ را می‌شناسیم:

$$\vec{E}=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$

این صفحه ∞ بر روی صفحه $x-2y+3z=4$ قرار گرفته و میدان را در ناحیه مبدأ از ما خواسته‌اند. بردار عمود بر صفحه در دو طرف صفحه در یک علامت منفی با هم فرق دارند. یعنی ما باید اول ببینیم نقطه مورد نظر ما در پایین صفحه قرار دارد یا در بالای صفحه؟ با جایگذاری مختصات مبدأ در معادله صفحه می‌بینیم که:

$$0-2\times0+3\times0<4$$

پس مبدأ در پایین صفحه قرار دارد. یعنی باید بردار یکه عمود بر صفحه را بیابیم و در یک منفی ضربش کنیم تا جهت $\vec{E}$ را به ما بدهد. اگه می‌خوای بردار عمود بر سطحی رو پیدا کنی، از اون سطح گرادیان بگیر.

$$f=x-2y+3z$$

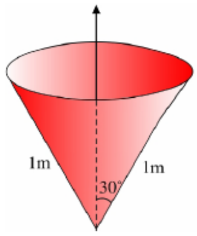
$$\overrightarrow{\nabla f}=\hat{x}-2\hat{y}+3\hat{z}\ (\text{در منفی ضرب})\ \rightarrow\ \vec{n}=-\hat{x}+2\hat{y}-3\hat{z}$$

این بردار عمود هست اما یکه نیست. با تقسیم کردن بردار بر طولش، یکه‌اش می‌کنیم؛ یعنی:

$$\hat{n}=\frac{\overrightarrow{\nabla f}}{|\overrightarrow{\nabla f}|}=\frac{-\hat{x}+2\hat{y}-3\hat{z}}{\sqrt{14}}\ \Rightarrow\ \left(\vec{E}=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{n}\right)\ \Rightarrow\ \vec{E}=\frac{12\varepsilon_0}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{(\hat{x}-2\hat{y}+3\hat{z})}{\sqrt{14}}\right)\ \Rightarrow\ \vec{E}=\frac{-6}{\sqrt{14}}(\hat{x}-2\hat{y}+3\hat{z})$$

پس گزینهٔ ۳ درست است.

بار سطحی با چگالی $\rho_s=\sqrt{3}R$ روی مخروط شکل مقابل توزیع شده است. اولاً کل بار چقدر است؟ ثانیاً میدان در رأس مخروط چقدر است؟

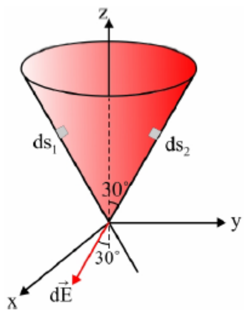


حل،

در مثال‌های قبل چگالی بار یکنواخت بود و بی‌ترس و دغدغه دو المان مقابل هم را می‌گرفتیم چون می‌دانستیم مقدار بار یکسان دارند. در این مثال چگالی بار غیر یکنواخت و وابسته به R است.

طبق المان سطح‌های انتخابی و میدان‌های نمایش داده شده، میدان در راستای $-\hat{Z}$ وجود خواهد داشت.

$$\underbrace{E_z}_{\text{انتگرال زیبای اسکالر چون جهت }\vec{E}\text{ را می‌دانیم.}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sqrt{3}R\,R\sin\theta\,d\varphi dR}{R^2}\underbrace{\cos\theta}_{\text{انداختیم روی }\hat{z}}=\frac{\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{1}{2}\sin2\theta\times2\pi\ \overset{(\theta=30^\circ)}{=\!=}\ \frac{3}{8\varepsilon_0}$$



$$\vec{E}=\frac{3}{8\varepsilon_0}(-\hat{z})$$