

فهرست مطالب

فصل اول	تبه‌گنی در برنامه‌ریزی خطی	۱
۱-۱	مقدمه	۱
۲-۱	غیرتبه‌گنی دوآل	۱۲
۳-۱	پایه‌های مجاور	۱۳
۴-۱	نقاط رأسی مجاورتی S	۱۳
۵-۱	مسیرهای پایه‌های مجاورتی	۱۴
۶-۱	مسأله‌ی آشوب شده	۱۷
۷-۱	شدنی بودن	۱۷
۸-۱	تغییر در مقدار تابع مقصود	۲۵
۹-۱	قاعده بلند	۲۸
۱۰-۱	نکاتی چند در رابطه با بکارگیری قواعد فوق	۳۱

۱۱-۱ قیود زاید ۳۴

۱۲-۱ تمرینات فصل اول ۴۲

فصل دوم دوآلیتی در برنامه‌ریزی خطی ۵۱

۱-۲ فرموله نمودن مسأله‌ی دوآل ۵۱

۲-۲ فرم کانونی دوآلیتی ۵۲

۳-۲ فرم استاندارد دوآلیتی ۵۳

۴-۲ صور مختلط دوآلیتی ۵۶

۵-۲ تفسیر اقتصادی مسأله ۶۰

۶-۲ رابطه‌ی بین پرایمال - دوآل ۶۲

۷-۲ قضیه‌ی قوی دوآلیتی ۶۷

۸-۲ دوآل شدنی یک پایه ۷۴

۹-۲ قیمت‌های سایه تحت تبه‌گنی ۷۹

۱۰-۲ لم فارکاس ۹۴

۱۱-۲ صورتهائی دیگری از لم فارکاس ۹۷

۱۲-۲ شرایط بهینگی کاروش - کهن - تاگر برای قیدهای نامساوی ۹۹

۱۳-۲ پایداری مدل‌های برنامه‌ریزی خطی ۱۰۷

۱۴-۲ پایداری در مدل‌های برنامه‌ریزی خطی به صورت متقارن ۱۱۱

۱۵-۲ تفسیر اقتصادی منظمی ۱۳۱

۱۶-۲ پایداری در مدل کلی برنامه‌ریزی خطی ۱۳۳

۱۷-۲ مسأله‌ی مکمل خطی (L.C.P) ۱۳۵

۱۸-۲ بازی‌های دو نفره با جمع صفر ۱۳۷

۱۹-۲ خلاصه فصل دوم ۱۴۴

۲۰-۲ تمرینات ۱۴۸

۱۸۰	انواع روش‌های سیمپلکس	فصل سوم
۱۸۱	سیمپلکس اصلاح شده	۱-۳
۱۸۲	سیمپلکس اصلاح شده با به‌کاربردن صریح عکس ماتریس	۲-۳
	سیمپلکس اصلاح شده با به‌کاربردن عکس ماتریس پایه به صورت	۳-۳
۱۸۷	فرم حاصلضرب	
۱۹۱	به‌روز نمودن عکس پایه	۴-۳
۱۹۴	مقایسه بین روش سیمپلکس اصلاح شده و سیمپلکس	۵-۳
۱۹۵	روش سیمپلکس دوآل	۶-۳
۲۰۸	الگاریتم پرایمال-دوآل	۷-۳
۲۱۹	صورت جدولی روش پرایمال-دوآل	۸-۳
۲۲۲	الگاریتم سیمپلکس برای متغیرهای کران‌دار	۹-۳
۲۲۹	بهبتر نمودن جواب اساسی شدنی	۱۰-۳
۲۳۱	افزایش x_k از سطح فعلی خود یعنی I_k	۱۱-۳
۲۳۵	تقارب متناهی؛ تبه‌گنی و به‌دور افتادن	۱۲-۳
۲۵۱	کران بالای تعمیم یافته	۱۳-۳
۲۵۵	فاز اول و فاز دوم	۱۴-۳
۲۵۷	مجموعه‌های ضروری و غیرضروری	۱۵-۳
۲۵۸	متغیرهای کلیدی و غیرکلیدی	۱۶-۳
۲۵۹	به‌دست آوردن پایه کاری	۱۷-۳
۲۶۰	روشی برای محاسبه‌ی پایه کاری	۱۸-۳
۲۶۸	به‌روز نمودن مقادیر اساسی	۱۹-۳
۲۷۴	برتری GUB نسبت به روش سیمپلکس اصلاح شده	۲۰-۳
۲۷۸	تمرینات فصل سوم	۲۱-۳
۲۹۸	تحلیل حساسیت در برنامه‌ریزی خطی	فصل چهارم

۲۹۸	مقدمه	۱-۴
۳۰۳	افزودن یک قید نامساوی	۲-۴
۳۰۷	معرفی یک قید اضافی به صورت تساوی	۳-۴
۳۱۰	تغییرات قیمت متغیرهای غیراساسی در تابع مقصود	۴-۴
۳۱۱	تغیر ضرایب یک متغیر اساسی	۵-۴
۳۱۶	تغییر در ضریب یکی از اعضای ستون‌های اساسی	۶-۴
۳۱۷	تمرینات فصل چهارم	۷-۴

فصل اول

تبه‌گنی در برنامه‌ریزی خطی

۱-۱ مقدمه

مسئله‌ی LP ۱ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z(x) = cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (1-1)$$

که در آن A ماتریسی است از مرتبه‌ی $m \times n$ و $\text{rank}(A) = m < n$. اگر B پایه‌ای برای ۱-۱ باشد، این پایه را غیرتبه‌گن^۲ گویند؛ اگر تمامی متغیرهای اساسی آن در جواب اساسی مخالف صفر باشند؛ یعنی اگر و فقط اگر تمامی مؤلفه‌های بردار $B^{-1}b$ غیر صفر باشند. پایه‌ی از ۱-۱ که غیرتبه‌گن نباشد پایه تبه‌گن است. LP فوق را کاملاً غیرتبه‌گن (اولیه)^۳ گویند اگر و فقط اگر هر پایه آن غیرتبه‌گن باشد.

1) Linear Programming 2) Nondegenerate 3) Totally Nandegenerate

۱-۱-۱ قضیه. مسأله‌ی LP ۱-۱ کاملاً غیرتبه‌گن است؛ اگر و فقط اگر هر جواب $Ax = b$ حداقل m مؤلفه‌ی غیرصفر داشته باشد.

برهان. فرض کنید هر جواب $Ax = b$ حداقل m مؤلفه‌ی غیر صفر داشته باشد و B یک پایه اساسی برای آن باشد، $(B^{-1}b, 0)$ یک جواب شدنی مسأله فوق است و طبق فرض تعداد مؤلفه‌های غیرصفر آن از m کمتر نیست. چون $n - m$ مؤلفه‌ی این جواب صفر می‌باشد، پس ناچاراً تمامی m مؤلفه‌ی $B^{-1}b$ مخالف صفر می‌باشند. یعنی B یک پایه غیرتبه‌گن است. چون B دلخواه بود پس هر پایه آن غیرتبه‌گن می‌باشد و این بدان معنی است که مسأله کاملاً غیرتبه‌گن می‌باشد.

بالعکس فرض کنیم که مسأله کاملاً غیرتبه‌گن می‌باشد، ثابت می‌کنیم که هر جواب $Ax = b$ حداقل m مؤلفه‌ی مخالف صفر دارد.

فرض کنیم x° یک جواب $Ax = b$ باشد. به کلیت استدلال خلیلی وارد نمی‌شود که فرض کنیم x° به صورت زیر است:

$$x^\circ = (x_1^\circ, \dots, x_r^\circ, 0, \dots, 0)$$

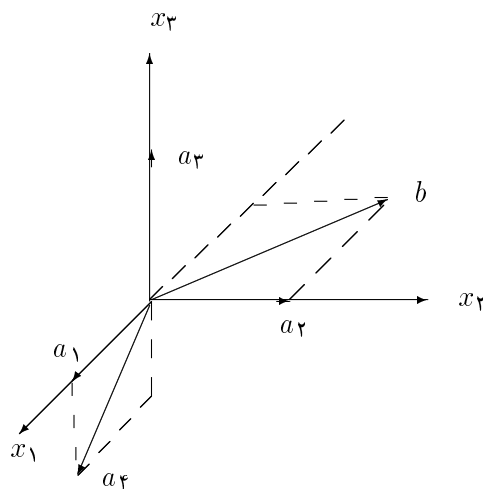
و فرض کنیم

$$D = \{a_1, \dots, a_r\}$$

اگر D مستقل خطی باشد، x° یک جواب اساسی است و $m = r$. در غیراین صورت یعنی اگر D مستقل خطی نباشد از x° می‌توان به یک جواب اساسی مانند \bar{x} رسید که \bar{x} اساسی است و تعداد مؤلفه مخالف صفر \bar{x} که طبق فرض برابر m است، یعنی تعداد مؤلفه‌های مخالف صفر x° در هر حالت از m کمتر نیست و این همان چیزی بود که می‌خواستیم ثابت کنیم. قبل از این که محتوای قضیه فوق از نظر جبری بررسی شود، که در حالت تبه‌گنی چه اتفاقی می‌افتد. b نسبت به ستون‌های A چه وضعیتی دارد. ابتدا مثالی می‌آوریم:

مثال ۲-۱-۱. چون تابع مقصود نقشی در رابطه با تبه‌گنی ندارد در مثال زیر حذف گردیده است.

$$A = [a_1, a_2, a_3, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



شکل (۱-۱)

در این مثال $m = 3$. b را می‌توان به صورت ترکیب خطی a_2 و a_3 نوشت از این رو مسأله پرایمال تبه‌گن دارد. هر پایه‌ای که شامل a_2 و a_3 باشد، تبه‌گن خواهد بود. واضح است که مسأله تبه‌گن است اگر در یکی از صفحات مختصات قرار داشته باشد. یعنی b متعلق به یکی از زیر فضاهای:

$$L\{a_1\} \quad L\{a_2\} \quad L\{a_3\} \dots \quad L\{a_2, a_3\}$$

باشد. مطلب را در حالت کلی با توجه به محتوای قضیه ۱-۱-۱ چنین بیان می‌کنیم بیان قضیه‌ی ۱-۱-۱ این است که ۱-۱ کاملاً غیرتبه‌گن است اگر و فقط اگر b را نتوان به صورت ترکیب خطی مجموعه‌ای از ستون‌های A که تعداد اعضای آن‌ها کمتر یا مساوی $(m - 1)$ باشد، نوشت؛ یعنی اگر و فقط اگر b در هیچ یک از زیرفضاهای تولید شده به وسیله‌ی ستون‌های A که تعداد آن‌ها کمتر یا مساوی $m - 1$ باشد قرار نگیرد. به عبارت دیگر اگر b در هیچ یک

از زیرفضاهای:

$$L\{a_1\}, L\{a_2\}, \dots, L\{a_1, a_2\}$$

$$L\{a_1, a_2, a_3\}, \dots, L\{a_1, \dots, a_{m-1}\}, \dots$$

قرار نگیرد. به بیان دیگر

$$b \notin L\{B\}$$

که در آن

$$\phi \neq B \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$$

و

$$\text{Card } B \leq m - 1$$

با توجه به این‌که تعداد این زیرفضاها برای $A = [a_{ij}]^{m \times n}$ مساوی حداکثر این زیرفضا برابر است با:

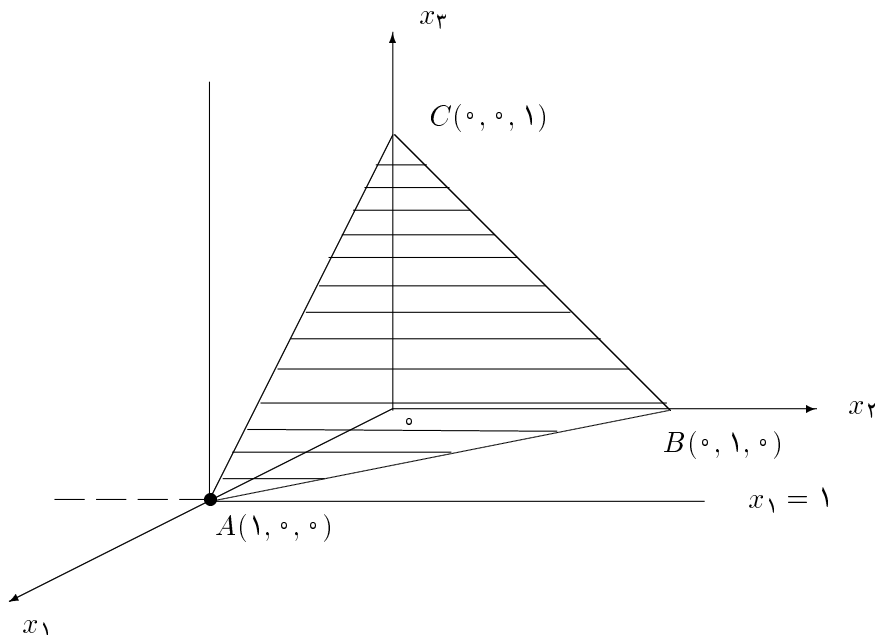
$$C_n^m \cdot \sum_{r=1}^{m-1} C_n^r = k$$

پس احتمال این که b در یکی از این زیرفضا قرار گیرد $\frac{k}{\infty}$ صفر می‌باشد. پس به مفهوم آماری احتمال این که یک LP تبه‌گن باشد صفر می‌باشد، اما از نظر تئوری بحث تبه‌گنی جالب و موردنظر می‌باشد.

بحث فوق در رابطه با تبه‌گنی در حالتی بود که b از نظر برداری با بردارهای ستونی A چه وضعی داشته باشد. مسأله تبه‌گنی را از منظر دیگر نیز می‌توان مورد توجه قرار داد و آن عبارت است از بررسی نقاط رأسی ناحیه شدنی و وضعیت ابرصفحه‌های مار بر این نقاط. برای توضیح مطلب مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۳-۱-۱ فرض کنید ناحیه S یعنی ناحیه شدنی یک LP به وسیله قیود زیر تعریف شده باشد:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 = 1, x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3\}$$



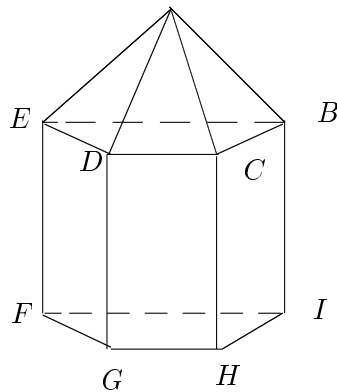
شکل (۲-۱)

نقطه $A(1, 0, 0)$ از ناحیه شدنی که به وسیله هاشور مشخص گردیده است را در نظر بگیرید. از این نقطه چهار ابرصفحه به صورت:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

می‌گذرند. به عبارت دیگر ۴ دسته ۳ تایی از ابرصفحه‌های مستقل خطی از این نقطه می‌گذرند (این ۴ دسته را مشخص نمائید). یعنی ۴ پایه متناظر نقطه A می‌باشد. و این بدان معنی است که نقطه رأسی x^0 در مسأله LP تبه‌گن است اگر تعداد پایه‌های متناظر آن بیش از یکی باشد. (البته عکس مطلب همواره صادق نمی‌باشد این مطلب قبلاً توضیح داده شده است) در اینجا

دیده می‌شود که قید $x_1 = 1$ زائد است. به عبارت قیدهای زائد باعث تبه‌گنی می‌گردند. ذیلاً بیان می‌کنیم که عکس مطلب همواره درست نمی‌باشد یعنی تبه‌گنی دلیل بر بودن قیدها در ناحیه شدنی نیست. برای توضیح شکل (۱-۳) را نظر بگیرید.



شکل (۱-۳)

در شکل (۱-۳) از نقطه رأسی A چهار ابرصفحه می‌گذرد. نقطه A تبه‌گن است ولی هیچ‌یک از ابرصفحه‌های مار بر این نقطه زائد نمی‌باشند.

بحث فوق بررسی نقاط رأسی تبه‌گن از نقطه‌نظر قیدهای زائد بود. از منظر دیگری نیز می‌توان مسأله‌ی تبه‌گنی را بررسی نمود، و آن عبارت است از امکان حرکت در جهت‌های رأسی شدنی مار بر نقطه رأسی موردنظر. برای توضیح مطلب جدول زیر را در نظر بگیرید:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_1	۱	۰	۰	+۲	۲	۱	۵
x_2	۰	۱	۰	۳	-۲	-۳	۰
x_3	۰	۰	۱	۰	۴	-۱	۴

جدول فوق متناظر نقطه

$$x^0 = (5, 0, 4, 0, 0, 0)$$

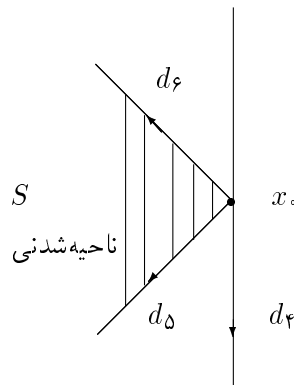
می‌باشد که یک نقطه رأسی تبه‌گن است.

$$d_j = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix} \quad j = 4, 5, 6$$

جهت‌های رأسی می‌باشند. از این رو جهت‌های رأسی d_5 و d_6 ، جهت‌های رأسی شدنی هستند. یعنی از نقطه x^0 در امتداد آن‌ها می‌توان با اندازه $\delta > 0$ حرکت کرد و در ناحیه شدنی باقی ماند. اما از نقطه x^0 در امتداد d_4 به هیچ عنوان نمی‌توان به صورتی حرکت کرد که در ناحیه شدنی باقی ماند و علت این امر نیز آن است که

$$\theta_4 = \min \left\{ \frac{5}{4}, \frac{0}{3} \right\} = 0$$

می‌باشد. به عبارت دیگر اگر فرض کنیم S به صورت زیر و x^0 نقطه رأسی متناظر جدول باشد، d_4 و d_5 و d_6 وضعیت هندسی به صورت شکل ۱-۴ دارند.



شکل (۱-۴)

شکل (۱-۴) نقطه‌ی x^0 ، نقطه رأسی تبه‌گن است. حال که مسأله تبه‌گنی را از منظرهای مختلف بررسی نمودیم می‌خواهیم بدانیم وجود تبه‌گنی در LP می‌تواند باعث چه مشکلاتی گردد و این مشکلات را چگونه می‌توان برطرف نمود. قبل از این که مطلب فوق را بررسی کنیم ثابت می‌کنیم که الگوریتم سیمپلکس در حالت غیرتبه‌گنی الگوریتم متقارب می‌باشد. یادآور می‌شویم که الگوریتمی متقارب است که در تعداد متناهی از مراحل مسأله را حل نماید.^۱

(۱) حل مسأله ضرورتاً به معنی به دست آوردن جواب بهینه نیست؛ منظور از حل LP آن است که مشخص کند، مسأله بهینه متناهی دارد یا نامحدود است یا نشدنی.

۴-۱-۱ قضیه. الگاریتم سیمپلکس، LP غیرتبه‌گن را در تعداد متناهی از مراحل؛ حل می‌کند. به عبارت دیگر اگر LP غیرتبه‌گن باشد. الگاریتم سیمپلکس متقارب است. برهان. همان طوری که در کتاب اول گفته شد در هر مرحله از الگاریتم سیمپلکس تابع مقصود، صورتی به شکل زیر دارد:

$$z = z^{\circ} - \sum_{j \in R} (z_j - C_j) x_j$$

که در آن R اندیس متغیرهای غیراساسی می‌باشد. فرض کنیم اگر x_k متغیر واردشونده و مسأله غیرتبه‌گن باشد داریم:

$$z_{New} = z^{\circ} - (z_k - C_k) \theta_k > \circ$$

یا $z_{New} < z^{\circ}$.

اگر فرض کنیم از پایه B_1 شروع نموده به پایه B_2 رفته باشیم و... که متناظر مقادیر z_1, z_2, \dots می‌باشند، پس داریم

$$z_1 > z_2 > \dots > z_r > \dots > z_h > \dots$$

می‌باشند. این امر باعث می‌گردد که اگر الگاریتم از پایه B_h عبور کند دیگر به آن برنگردد، در غیراین صورت در مرحله‌ای مانند $r \neq h$ اگر به پایه B_h برگردد، از طرفی داریم

$$z_r = C_{B_h} B_h^{-1} b = z_h$$

و از طرفی داریم

$$z_r < z_h$$

که طبق اصل تثلیث قوی این امر ممکن نیست. چون تعداد پایه‌های اساسی شدنی متناهی است پس الگاریتم سیمپلکس در حالتی که مسأله غیرتبه‌گن باشد، در تعداد متناهی از مراحل مسأله را حل می‌نماید.

حال با یک مثال نشان می‌دهیم که در حالت تبه‌گنی الگاریتم ممکن است به دور بیفتد و هیچ‌گاه به پایان نرسد.

۵-۱-۱ مثال. مسأله زیر را در نظر بگیرید (این مسأله توسط استاد دکتر مارتین بیل^۱ استاد فقید کالج سلطنتی انگلستان طراحی شد).

$$\begin{aligned} \text{Min } z = & -\frac{2}{3}x_4 + 2x_5 - \frac{1}{3}x_6 + 6x_7 \\ \text{s. t. } & x_1 + \frac{1}{3}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\ & x_2 + \frac{1}{3}x_4 - 12x_5 - \frac{1}{3}x_6 + 3x_7 = 0 \\ & x_3 + x_6 = 1 \end{aligned}$$

جواب بهینه‌ی مسأله عبارت است از:

$$x_1 = \frac{3}{4} \quad x_4 = x_6 = 1 \quad x_2 = x_3 = x_5 = x_7 = 0 \quad Z^* = -\frac{5}{4}$$

با بکار بردن قاعده‌ی دانتزیگ برای انتخاب متغیر واردشونده و قاعده می‌نیم برای متغیر خارج‌شونده (در حالتی که گره‌ای اتفاق بیفتد به دلخواه می‌توان آن را شکست) جداول به صورت‌های زیر خواهد بود:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	۱	۰	۰	۰	$\frac{2}{3}$	-۲۰	$\frac{1}{3}$	-۶	۰
x_1	۰	۱	۰	۰	$\frac{1}{3}$	-۸	-۱	۹	۰
x_2	۰	۰	۱	۰	$\frac{1}{3}$	-۱۲	$-\frac{1}{3}$	۳	۰
x_3	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	۱	-۳	۰	۰	۰	۴	$\frac{7}{3}$	-۳۳	۰
x_4	۰	۴	۰	۰	۱	-۳۲	-۴	۳۶	۰
x_2	۰	-۲	۱	۰	۰	۴	$\frac{2}{3}$	-۱۵	۰
x_3	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱

(۱) پروفیسور Martin Beal استاد برجسته در دانشگاه لندن بود. او چهره ماندگار واز برجستگان علم O.R واز نوایج جهان بود. حل مسأله درجه دوم از کارهای مهم ایشان می‌باشد.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	۱	-۱	-۱	۰	۰	۰	۲	-۱۸	۰
x_4	۰	-۱۲	۸	۰	۱	۰	۸	-۸۴	۰
x_5	۰	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	۰	۰	۱	$\frac{2}{8}$	$-\frac{۱۵}{4}$	۰
x_3	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	۱	۲	-۳	۰	$-\frac{1}{4}$	۰	۰	۳	۰
x_6	۰	$-\frac{2}{3}$	۱	۰	$\frac{1}{8}$	۰	۱	$-\frac{21}{2}$	۰
x_5	۰	$\frac{1}{۱۶}$	$-\frac{1}{8}$	۰	$-\frac{2}{۶۴}$	۱	۰	$\frac{2}{۱۶}$	۰
x_3	۰	$\frac{2}{2}$	-۱	۱	$-\frac{1}{8}$	۰	۰	$\frac{21}{2}$	۱

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	۱	۱	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۱۶	۰	۰	۰
x_6	۰	۲	-۶	۰	$-\frac{۵}{2}$	۵۶	۱	۰	۰
x_7	۰	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	۰	$-\frac{1}{3}$	$\frac{۱۶}{3}$	۰	۱	۰
x_3	۰	-۲	۶	۱	$\frac{۵}{2}$	-۵۶	۰	۰	۱

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	۱	۰	۲	۰	$\frac{۷}{3}$	-۴۴	$-\frac{1}{2}$	۰	۰
x_1	۰	۱	-۳	۰	$-\frac{۵}{3}$	۲۸	$\frac{1}{2}$	۰	۰
x_7	۰	۰	$\frac{1}{3}$	۰	$\frac{1}{6}$	-۴	$-\frac{1}{6}$	۱	۰
x_3	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	۱	۰	۰	۰	$\frac{2}{3}$	-۲۰	$\frac{1}{2}$	-۶	۰
x_1	۰	۱	۰	۰	$\frac{1}{3}$	-۸	-۱	۹	۰
x_2	۰	۰	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۱۲	$-\frac{1}{2}$	۳	۰
x_3	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱

ملاحظه می‌گردد که جدول آخری همان جدول شروع می‌باشد، و تمامی جدول‌ها متناظر نقطه $x^0 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ می‌باشند که فقط پایه‌های متفاوتی دارند. دنباله‌ی عملیات

محوری فوق‌الذکر به وسیله پایه‌های $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7$ که در آن

$$B_7 = B_1 = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]$$

تولید شده است. اگر عمل تکرار شود عملیات در این حلقه دور می‌زند بدون آن که به نتیجه‌ای برسد (به جواب بهینه برسد). ملاحظه می‌گردد که در حالت تبه‌گنی تضمینی بر تقارب الگوریتم سیمپلکس نمی‌باشد. و همان طوری که گفته شد، علت تبه‌گنی قرار گرفتن b در زیرفضاهای تولیدشده به وسیله مجموعه‌ای از ستون‌های A می‌باشد که کاردینال این مجموعه‌ها از $m - 1$ کمتر یا مساوی می‌باشد.

رهائی از حالت تبه‌گنی خارج نمودن b از زیرفضاهای فوق‌الذکر می‌باشد. این عمل را آشوب نمودن^۱ گویند؛ یعنی تکان دادن مختصری بردار b را از وضعیت کنونی خود به وضعیتی که از فضای موردنظر خارج شود. برای این منظور به جای b بردار زیر قرار داده می‌شود:

$$b(\varepsilon) = b + (\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^m)^t \quad (2-1)$$

که در آن ε عدد مثبت بسیار کوچکی است و $\varepsilon^r = \varepsilon \times \varepsilon \times \dots \times \varepsilon$ یعنی توان r ام ε .

۶-۱-۱ قضیه. برای هر بردار $b \in R^m$ وجود دارد. عدد مثبتی مانند $\varepsilon_1 > 0$ ،

به طوری که وقتی $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ ؛ مسأله ۳-۱ غیرتبه‌گن می‌باشد.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z(x) \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b(\varepsilon) \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (3-1)$$

برهان. فرض کنید B_1, \dots, B_L تمامی پایه‌های ۳-۱ باشند یکی از این پایه‌ها مثلاً B_r را در نظر بگیرید. چون B غیرمنفرد است پس $B_r^{-1} = [\beta_{ij}^r]$ و

$$(\beta_{i_1}^r, \dots, \beta_{i_m}^r) \neq 0 \quad r = 1, \dots, m$$

فرض کنید $\bar{b} = B_r^{-1}b$ پس:

$$B_r^{-1}b(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 + \beta_{11}^r \varepsilon + \dots + \beta_{1m}^r \varepsilon^m \\ \bar{b}_2 + \beta_{21}^r \varepsilon + \dots + \beta_{2m}^r \varepsilon^m \\ \vdots \\ \bar{b}_m + \beta_{m1}^r \varepsilon + \dots + \beta_{mm}^r \varepsilon^m \end{bmatrix}$$

برای هر i و r ($i = 1, \dots, m$) و ($r = 1, \dots, L$) کثیرالجمله‌ی

$$\bar{b}_i^r + \beta_{i1}^r \theta + \beta_{i2}^r \theta^2 + \dots + \beta_{im}^r \theta^m$$

یک کثیرالجمله‌ی غیرصفر برحسب θ می‌باشد. از این رو حداکثر m ریشه دارد فرض کنید ریشه‌های کثیرالجمله‌ی فوق‌الذکر عبارت باشند از:

$$\theta_{r,i,1}, \theta_{r,i,2}, \dots, \theta_{r,i,k}$$

اگر ε مساوی هیچ یک از θ های فوق نباشد، آنگاه:

$$\bar{b}_i^r + \beta_{i1}^r \varepsilon + \beta_{i2}^r \varepsilon^2 + \dots + \beta_{im}^r \varepsilon^m \neq 0$$

فرض کنید Γ مجموعه‌ی تمامی ریشه‌های این m کثیرالجمله که برحسب θ هستند باشد. Γ یک مجموعه‌ی متناهی است که $\text{Card}(\Gamma) \leq Lm^2$ بنابراین این مجموعه دارای عضو ابتدا و عضو انتها می‌باشد و این امکان وجود دارد که عددی مانند $\varepsilon > 0$ انتخاب گردد (چگونه؟ کاملاً توضیح دهید) که هیچ‌یک از اعضای مجموعه‌ی Γ متعلق به بازه $[\varepsilon, 0]$ نباشد. با انتخاب $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ ، واضح است که تمامی متغیرهای اساسی مسأله‌ی ۱-۳ غیرصفر می‌باشند، از این رو مسأله‌ی فوق‌الذکر غیرتبه‌گن خواهد بود. بحث‌هایی که از اول فصل تا بدین جا داشتیم راجع به تبه‌گنی مسأله‌ی پرایمال (اولیه) بود.

۲-۱ غیرتبه‌گنی دوآل

مسأله‌ی ۱-۱ را کاملاً دوآل غیرتبه‌گن گویند (در رابطه با دوآلیتی در فصول آینده مفصل صحبت خواهیم نمود) اگر و فقط اگر برای هر $w \in R^m$ بردار سطری

باشد؛ و این بدان معنی است که هر جواب (w, \bar{c}) از دستگاه $wA + \bar{c} = c$ (که در آن A و c داده‌ها و w و \bar{c} متغیرها می‌باشند) حداقل $n - m$ از \bar{c}_j ها مخالف صفر باشند. در بحث این فصل، هر وقت صحبت از تبه‌گنی به میان آید، همواره نظر به تبه‌گنی پرایمال می‌باشد، مگر مطلب به طور صریح در رابطه با تبه‌گنی دوآل ذکر و یا از سیاق عبارت موضوع مشخص گردد.

۳-۱ پایه‌های مجاور^۲

فرض کنیم S مجموعه جواب‌های شدنی ۱-۱ باشد. هر پایه ۱-۱ یک ماتریس مربع غیرمنفرد از مرتبه m می‌باشد. دو پایه شدنی B_1 و B_2 را مجاور گوئیم، اگر بردارهای متناظر آن‌ها x_{B_1} و x_{B_2} شامل $m - 1$ متغیر اساسی مشترک باشند. بنابراین در مراحل الگاریتم سیمپلکس دو پایه به دست آمده در دو مرحله متوالی آن مجاور می‌باشند.

توجه داشته باشیم که ممکن است دو پایه متوالی متناظر یک نقطه‌ی رأسی باشند. نمونه این مطلب پایه‌های $B_1, B_2, B_3, \dots, B_6, B_5$ بودند که B_i مجاور B_{i+1} بود ($i = 1, \dots, 5$) و همگی آن‌ها متناظر نقطه‌ی $x^0 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ بودند.

۴-۱ نقاط رأسی مجاورتی^۳ S

هر نقطه‌ی رأسی S یک BFS می‌باشد که متناظر بعضی از پایه‌های شدنی می‌باشد. فرض کنیم \hat{x} و \tilde{x} دو نقطه‌ی رأسی متمایز از S باشند و فرض کنیم \hat{x} متناظر \hat{B} و \tilde{x} متناظر \tilde{B} باشد. نقاط رأسی \hat{x} و \tilde{x} را مجاور گوئیم:

الف. \hat{B} و \tilde{B} پایه‌های مجاور باشند یا

ب. یک دنباله از پایه‌های مجاور شدنی مانند $B_1, B_2, \dots, B_r, B_{r+1}, \dots, B_k, \hat{B}$ وجود داشته باشد به طوری که هر زوج متوالی در این دنباله مجاور بوده و پایه‌های $B_1, B_2, \dots, B_r, \hat{B}$ متناظر \hat{x} و پایه‌های $B_{r+1}, \dots, B_k, \tilde{B}$ متناظر \tilde{x} باشند. این تعریف در

1) Dual Nondegeneracy 2) Adjacent Bases 3) Adjacent Extrem Point

کتاب اول به صورت دیگری بیان گردید که استنباط خواص مشخصه جبری از آن ساده بود (فصل دوم کتاب اول صفحات ۱۵۶، ۱۵۷ و ۱۵۸) ثابت کنید در تعریف معادل هستند.

۵-۱ مسیره‌های پایه‌های مجاورتی^۱

۷-۵-۱ قضیه. فرض کنید \tilde{x} یک نقطه ی رآسی S و \hat{B} و \tilde{B} دو پایه‌ی متمایز برای ۱-۱ باشند؛ که هر دو متناظر BFS، \tilde{x} هستند. دنباله‌ای از پایه‌ها مانند $\tilde{B}, B_1, \dots, B_t$ و \hat{B} وجود دارد که هر دو پایه متوالی در این دنباله مجاور هستند و تمامی پایه‌ها متناظر \tilde{x} می‌باشند.

برهان. فرض کنید

$$\tilde{B} = [a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_m]$$

اگر

$$\hat{B} = [a_1, \dots, a_r, a_{j_1}, \dots, a_{j_k}] \quad k + r = m$$

چون فرض بر این است که \hat{B} و \tilde{B} متمایز هستند؛ پس $r < m$ (چرا؟) توجه کنید به صورت $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r, 0, \dots, 0)$ می‌باشد (چرا؟ علت را دقیقاً توضیح دهید و روی کاغذ بیاورید). البته نمایش فوق بدین معنی نیست که $\tilde{x}_i \neq 0$ به‌ازاء هر $i = 1, \dots, r$ (چرا؟)

a_{j_1} را انتخاب می‌کنیم. چون $[a_1, \dots, a_r, \dots, a_m]$ یک پایه می‌باشد پس:

$$a_{j_1} = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r + \alpha_{r+1} a_{r+1} + \dots + \alpha_m a_m$$

در نمایش فوق هر $\alpha_j = 0$ ($j = r + 1, \dots, m$) صفر نیست چه در این صورت

$$a_{j_1} = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r$$

خواهد بود (چه مشکلی در این صورت خواهیم داشت؟) و اگر در این جا نیز همه α ها نمی‌توانند

صفر باشند زیرا $a_{j_1} \neq 0$ پس j_1 ای هست که $r + 1 \leq j_1 \leq m$ و $\alpha_{j_1} \neq 0$

1) Adjacent Basic Paths

به کلیت استدلال خللی وارد نمی‌شود اگر فرض کنیم $\alpha_{r+1} \neq 0$ پس طبق قضیه‌ی ۴-۱-۱ $B_1 = [a_1, a_2, \dots, a_r, a_{j_1}, a_{r+2}, \dots, a_m]$ یک پایه شدنی برای ۱-۱ است و مجاور \tilde{B} می‌باشد. با ادامه روش B_k, \dots, B_r به دست می‌آید که هر دو پایه متوالی مجاور هستند و شدنی می‌باشند و همگی آن‌ها متناظر \tilde{x} می‌باشند و حکم ثابت است. (در روش استدلال قدری تعمق کنید، بخصوص مسأله شدنی بودن پایه‌ها).

۱-۵-۱ قضیه. اگر \hat{B} و \tilde{B} یک زوج از پایه‌های شدنی باشند (برای مسأله ۱-۱) آن‌گاه دنباله‌ای از پایه‌ها مانند $\hat{B}, B_t, \dots, B_1, \tilde{B}$ موجودند، به طوری که هر دو پایه متوالی مجاورند. برهان. فرض کنیم \hat{x} و \tilde{x} BFS های متناظر \hat{B} و \tilde{B} باشند. اگر $\hat{x} = \tilde{x}$ حکم از قضیه ۷-۵-۱ نتیجه می‌شود.

$$\sum d_j x_j = z(x) \text{ تابع } \tilde{x} \neq \hat{x} \text{ اگر}$$

که در آن

$$d_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \hat{x}_j = 0 \\ 0 & \text{اگر } \hat{x}_j \neq 0 \end{cases}$$

چون \hat{x} یک BFS؛ S می‌باشد. و این تنها جوابی است که $Z(\hat{x}) = 0$ (چرا؟) و به‌ازاء هر $x \in S$ ، $Z(x) \geq 0$ و $Z(x) \neq 0$ از این رو \hat{x} تنها جواب بهینه مسأله‌ی فوق‌الذکر می‌باشد. با شروع از پایه \tilde{B} و با به‌کار بردن الگوریتم سیمپلکس برای می‌نیم نمودن $Z(x)$ در ناحیه‌ی S ، الگوریتم پایه‌های مجاور را طی می‌نماید تا از \tilde{B} به \hat{B} برسد. با ملحوظ داشتن قضاپای فوق‌الذکر و نتایج قبلی می‌توان در جمع‌بندی چنین بیان نمود. اگر ۱-۱ غیرتبه‌گن باشد، در این صورت قاعده‌ی می‌نیم همواره θ مثبتی را به دست می‌دهد. اگر \tilde{x} یک BFS باشد در این حالت (غیرتبه‌گن) فقط یک پایه متناظر آن خواهد بود. از این رو درست $n - m$ یال S از نقطه‌ی \hat{x} می‌گذرد.

هر چندوجهی که در هر نقطه رأسی تعداد یال‌های مار بر آن‌ها برابر با بعد آن باشد آن چندوجهی را چندوجهی محدب ساده^۱ می‌گویند. از این رو اگر ۱-۱ غیرتبه‌گن باشد، S یک

1) Simple Convex Polyhedron

چندوجهی محدب ساده خواهد بود. درحالتی که چندوجهی محدود باشد، آن را چند وجهی محدب محدود^۱ می‌نامیم.

اگر ۱-۱ تبه‌گن باشد و اگر \hat{x} غیرتبه‌گن (\hat{x} نقطه رأسی S است) ممکن است درست $n - m$ یال S از آن بگذرد. به هر حال، اگر \hat{x} یک BFS تبه‌گن باشد، چندین پایه متناظر آن خواهد بود هر کدام از این پایه‌ها منجر به وجود آمدن تعدادی از یال‌های S مار بر \hat{x} خواهد شد. در این حالت برای به دست آوردن تمامی یال‌های S مار بر \hat{x} ، بایستی تمامی پایه‌های متناظر \hat{x} را به دست آورد و در هر جدول سیمپلکس متناظر برای تمامی θ هایی که در قاعده‌ی می‌نیم مثبت می‌باشند یال تولید نمود (این یال‌ها ممکن است محدود یا نامحدود باشند) و در این حالت تعداد نقاط رأسی مجاور، از یک نقطه رأسی به یک نقطه رأسی دیگر، متفاوت خواهد بود. در جمع‌بندی مطالب فوق‌الذکر قضیه ذیل را بیان می‌کنیم.

۹-۵-۱ قضیه. فرض کنید ۱-۱ غیرتبه‌گن باشد و آن را با روش سیمپلکس حل می‌نمائیم (که از یک جواب اساسی شدنی شروع نموده ایم). مطالب زیر صادق است:

- ۱) مقدار θ در هر مرحله در قاعده می‌نیم مثبت است.
- ۲) متغیر خارج‌شونده به‌طور منحصراً به فرد مشخص می‌گردد.
- ۳) مقدار تابع مقصود در هر مرحله کاهش پیدا می‌کند.
- ۴) پایه‌ای ترک شده در یک مرحله، هیچ‌گاه در مراحل بعدی ظاهر نخواهد شد یعنی دور اتفاق نخواهد افتاد.
- ۵) الگوریتم در تعداد متناهی از مراحل مسأله را حل می‌نماید.

برهان.

- ۱) با توجه به این که مقدار تمامی متغیرهای اساسی مثبت می‌باشند، پس مقدار θ در هر مرحله سیمپلکس مثبت خواهد بود (در حالتی که $\bar{a}_j \leq 0$ مقدار θ بی‌نهایت است)

1) Polytope

(۲) فرض کنیم در یک مرحله از روش سیمپلکس:

$$\theta = \text{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij} > 0} \right\} = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rj}} = \frac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{sj}}$$

یعنی دو متغیر برای خارج شدن از پایه کاندیدا هستند. به سادگی دیده می‌شود که اگر این مطلب اتفاق بیفتد؛ در جدول بعدی تبه‌گنی داریم (چرا؟ اثبات نمائید) و این خلاف فرض غیرتبه‌گنی مسأله است.

(۳) قبلاً اثبات شده است. ۴ و ۵ نیز قبلاً اثبات شده است.

۶-۱ مسأله‌ی آشوب شده

فرض کنید ۱-۱ تبه‌گن باشد. استراتژی کلی برای جلوگیری از به دور افتادن به صورت زیر می‌باشد. به جای b ، $b(\varepsilon)$ را قرار می‌دهیم و یک مسأله‌ی آشوب شده به دست می‌آید، با توجه بدان چه گذشت می‌دانیم عددی مانند ε_1 موجود است، به طوری که برای هر $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ غیرتبه‌گن است. بنابراین برای تمامی ε های مثبت ولی بسیار کوچک ۱-۳ را می‌توان با به کار بردن روش سیمپلکس، بدون آن‌که به دور بیفتند حل نمود. تا زمانی که ε عدد بسیار کوچک ملحوظ گردد، ضرورتی ندارد که مقدار خاص برای آن قائل شویم فقط به همین امر بسنده می‌کنیم که ε عدد بسیار کوچک غیرارشمیدسی است که ممکن است در مراحل سیمپلکس مورد مقایسه قرار گیرد.

۷-۱ شدنی بودن

۱-۷-۱ قضیه. اگر B پایه شدنی برای ۱-۳ باشد (برای ε بسیار کوچک) آن‌گاه B پایه شدنی برای ۱-۱ نیز می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $B^{-1} = [\beta_{ij}]$ و $\bar{b} = B^{-1}b$ در این صورت:

$$B^{-1}b(\varepsilon) = (\bar{b}_1 + \beta_{11}\varepsilon + \dots + \beta_{1m}\varepsilon^m, \dots, \bar{b}_m + \beta_{m1}\varepsilon + \beta_{m2}\varepsilon^2 + \dots + \beta_{mn}\varepsilon^m)$$

اگر برای هر عددی مانند i و $\bar{b}_i < 0$ آنگاه برای ε بسیار کوچک:

$$\bar{b}_i + \beta_{i1}\varepsilon + \beta_{i2}\varepsilon^2 + \dots + \beta_{im}\varepsilon^m < 0$$

که در این با فرض شدنی بودن B برای ۳-۱ در تناقض می‌باشد. پس پایه شدنی برای ۱-۱ می‌باشد با الگاریتم سیمپلکس حل می‌گردد (با ملحوظ داشتن ε به اندازه کافی کوچک) پایه‌ای که در یک مرحله ظاهر می‌گردد، هرگز در مراحل بعدی تکرار نخواهد شد (در حالت غیرتبه‌گن). اگر ۳-۱ شدنی باشد، آنگاه پایه نهایی یا در شرط بهینگی صدق می‌کند یا معیار نامحدود بودن را دارد. این معیار، مستقل از بردار سمت راست می‌باشد. از این رو، پایه نهایی که برای ۳-۱ به دست می‌آید، یک پایه نهایی برای ۱-۱ نیز می‌باشد. جواب بهینه نهایی برای ۱-۱ به این صورت به دست می‌آید که در جواب بهینه متناظر ۳-۱ جمله‌ای شامل ε و توان‌های آن حذف گردد (در حقیقت به جای ε در جواب نهایی عدد صفر قرار داده شود).

تعریف. بردار $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ را لکزیکو مثبت گوئیم، اگر $\gamma \neq 0$ و اولین مولفه‌ی مخالف صفر آن مثبت باشد. و به صورت $\gamma \succ 0$ نشان می‌دهیم. دو بردار $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ و $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ گوئیم $\eta \succ \xi$ اگر

$$\xi - \eta \succ 0$$

عیناً می‌توان لکزیکو منفی l را تعریف نمود. به عبارتی γ لکزیکو منفی است اگر $-\gamma$ لکزیکو مثبت باشد.

۱۱-۷-۱ لکزیکو می‌نیمم مجموعه‌ای از بردارها.

فرض کنیم $\gamma^\nu = (\gamma_1^\nu, \dots, \gamma_m^\nu)$ $\nu = 1, \dots, p$ بردار در R^m باشد. بردار γ^q لکزیکو می‌نیمم این بردارها گوئیم در صورتی که:

$$\gamma^\nu - \gamma^q \succ 0 \quad \nu = 1, \dots, p \quad \nu \neq q$$

عیناً بردار γ^s لکزیکو ماکزیمم بردارهای فوق‌الذکر است اگر

$$\gamma^s - \gamma^\nu \succ 0 \quad \nu = 1, \dots, p \quad \nu \neq s$$

برای پیدا نمودن لکزیکو می نیمم یک مجموعه از بردارها، ابتدا بردارهایی را پیدا می کنیم که مؤلفه ی اول آن ها می نیمم مؤلفه های اول بقیه بردارها باشد و بقیه ی بردارها که مؤلفه ی اول آن ها می نیمم نمی باشد از مجموعه حذف می کنیم. سراغ مؤلفه های دوم بردارهایی می رویم که مؤلفه ی اول آن ها می نیمم بوده و انتخاب شده، آن بردارها انتخاب می کنیم که مؤلفه دوم آن ها می نیمم و بقیه بردارهایی را که مؤلفه دوم آن ها می نیمم نیست از مجموعه ی انتخاب شده حذف می نماییم و همین روش را ادامه می دهیم، در هر مرحله که تنها یک بردار در مجموعه ی انتخاب شده باقی ماند متوقف می گردیم.

مثال مجموعه ی

$$\{(-2, 0, -1, 0), (-2, 0, -1, 1), (-2, 1, -2, 3), (0, -1, -4, -5)\}$$

مرحله ی اول:

$$\{(-2, 0, -1, 0), (-2, 0, -1, 1), (-2, 1, -2, 3)\}$$

مرحله ی دوم:

$$\{(-2, 0, -1, 0), (-2, 0, -1, 1)\}$$

مرحله ی سوم:

$$\{(-2, 0, -1, 0)\}$$

پس بردار $(-2, 0, -1, 0)$ لکزیکو مینیمم مجموعه ی فوق است.

۱۲-۷-۱ B پایه شدنی برای $3-1$ است اگر و تنها اگر برای ε بسیار کوچک دلخواه

$$(i = 1, \dots, m) (\bar{b}_i, \beta_{i1}, \beta_{im}) > \varepsilon$$

برهان. چون B^{-1} غیرمنفرد است، واضح است که بردارهای:

$$(\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{im}) \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

اگر ε مثبت بسیار کوچک باشد، علامت:

$$\bar{b}_i + \beta_{i1}\varepsilon + \beta_{i2}\varepsilon^2 + \dots + \beta_{im}\varepsilon^m$$

همان علامت اولین جمله مخالف صفر می‌باشد. بنابراین، برای ε بسیار کوچک دلخواه $\bar{b}_i + \beta_{i1}\varepsilon + \dots + \beta_{im}\varepsilon^m$ مثبت است، اگر و فقط اگر اولین جمله عبارت فوق یا اولین مولفه‌ی بردار $(\bar{b}_i, \beta_{i1}, \dots, \beta_{im})$ مثبت باشد. با به‌کار بردن بحث فوق برای هر i ، حکم قضیه برقرار می‌باشد.

قضیه‌ی فوق بررسی این‌که، ۱-۳ شدنی می‌باشد را بسیار ساده می‌نماید. در حقیقت، هیچ نیازی بدان نیست که مقدار خاص به ε داده شود. با در دست داشتن بردار سمت راست به‌روز شده و عکس پایه، بررسی این‌که پایه شدنی می‌باشد، برمی‌گردد به بررسی این‌که m بردار موردنظر لکزیکو مثبت می‌باشد یا نه، بدون این‌که آشوبی صورت گرفته باشد.

فرض کنیم $[\beta_{ij}] = B^{-1}$ که در آن B پایه ۱-۱ می‌باشد. B شدنی است (شدنی پرایمال) اگر $B^{-1}b \geq 0$. اگر $B^{-1}b > 0$ در این صورت گویند B لکزیکو شدنی است زیرا

$$(\bar{b}_i, \beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{im}) > 0 \quad i = 1, \dots, m$$

اگر چنین نباشد به صورت ذیل بحث را ادامه می‌دهیم:

یادآور می‌شویم که $(\bar{b}, I) = (\bar{b}, B^{-1})$ در شروع روش سیمپلکس به صورتی است که هر سطر $(\bar{b}_i, e_i^t) \succ 0$ ($i = 1, \dots, m$) اگر جدول اولیه با یک پایه‌ی شدنی مانند B شروع گردد، مسأله‌ی زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad z &= C_B x_B + C_N x_N \\ Bx_B + Nx_N &= b \\ x_B, x_N &\geq 0 \end{aligned}$$

که از آن داریم $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ با قرار دادن آن در تابع مقصود مسأله‌ی زیر

به دست می آید:

$$\begin{aligned} \text{Min } z = & \circ \quad x_B + (C_N - C_B B^{-1} N) x_N \\ & I x_B + \quad \quad \quad B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ & x_B, x_n \geq \circ \end{aligned}$$

یعنی همواره می توان فرض نمود که در جدول شروع هر سطر جدول $(B^{-1} b, B^{-1})$ لکزیکو مثبت می باشد. از این رو اگر B پایه شدنی برای ۱-۱ باشد، B پایه شدنی برای ۳-۱ می باشد. پس با انتخاب ε دلخواه ولی بسیار کوچک پایه شدنی برای ۱-۱ پایه شدنی برای ۳-۱ می باشد. فرض کنیم $\text{Max}\{z_j - c_j > \circ \mid j \in R\} = z_k - c_k > \circ$ یعنی متغیر x_k متغیر واردشونده باشد. برای انتخاب متغیر خارج شونده در مسأله ۳-۱ قاعده می نیمم زیر را انجام می دهیم:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_i + \beta_{i1}\varepsilon + \dots + \beta_{im}\varepsilon^m}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > \circ \right\} \\ & = \text{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_i(\varepsilon)}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > \circ \right\} \end{aligned}$$

با توجه به این که ε عدد مثبت بسیار کوچک است، این می نیمم در همان اندیس i که متناظر لکزیکو می نیمم منحصر به فرد مجموعه ی بردارهای:

$$D = \{(\bar{b}_i, \beta_{i1}, \dots, \beta_{im}) / \bar{a}_{ik} \mid \bar{a}_{ik} > \circ\}$$

به دست می آید. این می نیمم بدون در نظر گرفتن مقدار ε بردار متغیر خارج شونده را به طور منحصر به فرد مشخص می نماید. برای انجام این می نیمم که مستقل از مقدار ε می باشد الگوریتمی به صورت زیر ارائه می گردد که در حقیقت یافتن لکزیکو می نیمم بردار، مجموعه ی D می باشد توجه کنید که مجموعه ی D از داده های اولیه بدون دخالت ε به دست آمده است. قدم اول. مجموعه I_0 را به صورت زیر تشکیل دهید:

$$I_0 = \{r \mid \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}, \bar{a}_{ik} > \circ \right\}\}$$

اگر $\text{Card}(I_0) = 1$ در این صورت متغیر خارج شونده همان اندیس سطری و عضو منحصر به فرد I_0 می‌باشد. به عبارت دیگر:

$$I_0 = \{r\}$$

در این صورت x_{B_r} متغیر خارج شونده خواهد بود و به‌طور منحصر به فرد مشخص می‌گردد. در غیر این صورت به قدم دوم می‌رویم:

قدم دوم. مجموعه‌ی I_1 را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$I_1 = \left\{ r \mid \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min}_{i \in I_0} \left\{ \frac{\beta_{i1}}{\bar{a}_{ik}} \right\} \right\}$$

قدم کلی. مجموعه‌ی I_j را به صورت زیر تشکیل دهید:

$$I_j = \left\{ r \mid \frac{r_j}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min}_{i \in I_{j-1}} \left\{ \frac{i_j}{\bar{a}_{ik}} \right\} \right\}$$

در نهایت I_j ($j \leq m$) مجموعه‌ی منفرد خواهد بود (یعنی مجموعه‌ای که فقط دارای یک عضو می‌باشد) چه در غیر این صورت مجموعه‌ی D حداقل دو عضو به صورت زیر خواهد داشت:

$$(\bar{b}_r, \beta_{r1}, \dots, \beta_{rm}) / \bar{a}_{rk}$$

و

$$(\bar{b}_s, \beta_{s1}, \dots, \beta_{sm}) / \bar{a}_{sk}$$

که در آنها

$$\frac{b_r}{\bar{a}_{rk}} = \frac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{sk}}, \quad \frac{\beta_{rj}}{\bar{a}_{rk}} = \frac{\beta_{sj}}{\bar{a}_{sk}} \quad j = 1, \dots, m$$

پس:

$$\frac{\beta_{rj}}{\beta_{sj}} = \frac{\bar{a}_{rk}}{\bar{a}_{sk}} \quad j = 1, \dots, m$$

از این رو دو سطر $B^{-1} = [\beta_{ij}]$ متناسب می‌باشند. یعنی B^{-1} منفرد خواهد بود که این تناقض است. پس بردار لکزیکو می‌نیم D بردار منحصر به فردی است و تعیین آن ملهم از قاعده می‌نیم می‌باشد به‌طور منحصر به فرد متغیر خارج شونده را مشخص می‌نماید.

حال ثابت می‌کنیم که اگر بردار متغیر خارج شونده طبق قاعده فوق صورت گیرد، همواره پایه B جدول متناظر برای ۳-۱ شدنی باقی می‌ماند به عبارت دیگر اگر B پایه شدنی برای ۳-۱ قبل از عمل محوری باشد و \hat{B} پایه پس از عمل محوری حاصل گردد سطرهای ماتریس که $m(m+1)[(\hat{B}^{-1}b, \hat{B}^{-1})]$ می‌باشد لکزیکو مشبث خواهد بود. برای این منظور دو جدول در نظر می‌گیریم. جدول اولی متناظر B قبل از عمل محوری و \hat{B} متناظر جدول دوم پس از عمل محوری باشد و فرض می‌کنیم که m ستون اول (با صرف نظر نمودن از ستون متناظر Z) نمایش B^{-1} باشد. جدول اولیه که جدول قبل از عمل محوری است به صورت زیر می‌باشد.

جدول متناظر پایه B (جدول قبل از عمل محوری)

	z	$x_1 \dots x_j \dots x_m$	$x_{m+1} \dots x_k \dots x_n$	RHS
Z	\setminus	$z_1 - c_1 \dots z_j - c_j \dots z_m - c_m$	$z_{m+1} - c_{m+1} \dots z_k - c_k \dots z_n - c_n$	\bar{z}
x_{B_1}	\circ	$\beta_{11} \dots \beta_{1j} \dots \beta_{1m}$	$\bar{a}_{1m+1} \dots \bar{a}_{1k} \dots \bar{a}_{1n}$	\bar{b}_1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_{B_i}	\circ	$\beta_{i1} \dots \beta_{ij} \dots \beta_{im}$	$\bar{a}_{im+1} \dots \bar{a}_{ik} \dots \bar{a}_{in}$	\bar{b}_i
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_{B_r}	\circ	$\beta_{r1} \dots \beta_{rj} \dots \beta_{rm}$	$\bar{a}_{rm+1} \dots \boxed{\bar{a}_{rk}} \dots \bar{a}_{rn}$	\bar{b}_r
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_{B_m}	\circ	$\beta_{m1} \dots \beta_{mj} \dots \beta_{mm}$	$\bar{a}_{mm+1} \dots \bar{a}_{mk} \dots \bar{a}_{mn}$	\bar{b}_m

جدول متناظر \bar{B} پس از عمل محوری

	z	x_1	\dots	x_j	\dots	x_m	x_{m+1}	x_k	x_n	RHS
z		$z_1 - c_1$		$z_j - c_j$		$z_m - c_m$	\dots	\circ	\dots	$\bar{z} - \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}(z_k - c_k)$
		$-\frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{rk}}(z_k - c_k)$	\dots	$-\frac{\beta_{rj}}{\bar{a}_{rk}}(z_k - c_k)$	\dots	$-\frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rk}}(z_k - c_k)$				
x_{B_1}	\circ	$\beta_{11} - \frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{1k}$	\dots	$\beta_{1j} - \frac{\beta_{rj}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{1k}$	\dots	$\beta_{1m} - \frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{1k}$		\circ		$\bar{b}_1 - \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{1k}$
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots					
x_{B_i}	\circ	$\beta_{i1} - \frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{ik}$	\dots	$\beta_{ij} - \frac{\beta_{rj}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{ik}$	\dots	$\beta_{im} - \frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{ik}$		\circ		$\bar{b}_i - \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{ik}$
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots					
x_k	\circ	$\frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{rk}}$	\dots	$\frac{\beta_{rj}}{\bar{a}_{rk}}$	\dots	$\frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rk}}$	\dots	\backslash	\dots	$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots					
x_{B_m}	\circ	$\beta_{m1} - \frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{mk}$	\dots	$\beta_{mj} - \frac{\beta_{rj}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{mk}$	\dots	$\beta_{mm} - \frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{mk}$		\circ		$\bar{b}_m - \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{mk}$

در جداول فوق سطر i ام از ماتریس $[\hat{B}^{-1}b, \hat{B}^{-1}]$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر می‌باشد:

$$\left(\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}, \frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{rk}}, \frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rk}} \right) \quad i = r \quad (a)$$

$$d_i = \left(\bar{b}_i - \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{ik}, \beta_{i1} - \frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{ik}, \dots, \beta_{im} - \frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{ik} \right) \quad i \neq r \quad (b)$$

چون $(\bar{b}_r, \beta_{r1}, \dots, \beta_{rm}) < \circ$ و $\bar{a}_{rk} > \circ$ پس برای $i = r$ بردار سطری $[\hat{B}^{-1}b, \hat{B}^{-1}]$ ماتریس لکزیکو مثبت می‌باشد. اما در رابطه‌ی (b) داریم:

$$(\bar{b}_i, \beta_{i1}, \dots, \beta_{im}) - \frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{a}_{rk}}(\bar{b}_r, \beta_{r1}, \dots, \beta_{rm}) = d_i \quad (c)$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف. $i \notin I$ در این حالت اگر $\bar{a}_{ik} \leq \circ$ پس $d_i > \circ$ (چرا؟ دقیقاً مطلب را توضیح دهید).

اگر $\bar{a}_{ik} > \circ$ چون $i \notin I$ طبق تعریف:

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} < \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}$$

از این رو $b_i - (\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}})\bar{a}_{ik} < \circ$ که در این صورت نیز $d_i > \circ$.

ب. $i \in I_0$ و در این صورت $\bar{a}_{ik} > 0$ و $\bar{b}_i - (\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}})\bar{a}_{ik}$ که در این حالت نیز دو صورت مجزا اتفاق می افتد $i \in I_1$ یا $i \notin I_1$ اگر $i \notin I_1$ ، طبق تعریف I_1 ، $\beta_{i1} - (\frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{rk}})\bar{a}_{ik} > 0$ یعنی $d < 0$.
اگر $i \in I_1$ داریم:

$$\beta_{i1} - \frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{rk}} \bar{a}_{ik} = 0$$

حال $i \in I_2$ یا $i \notin I_2$ را مورد بررسی قرار می دهیم. این روند ادامه پیدا می کند و حداکثر در $m+1$ قدم به این نتیجه می رسیم که سطرهاى ماتریس:

$$[\hat{B}^{-1}b, \hat{B}^{-1}]$$

لکزیکو مثبت می باشد.

نتیجه جدول سیمپلکس با یک پایه شدنی B برای ۱-۱ شروع می گردد اگر ε به اندازه کافی کوچک انتخاب گردد B برای مسأله ۱-۱ نیز یک پایه شدنی خواهد بود، مشروط بر این که انتخاب متغیر خارج شونده طبق قدم هائی باشد که در تشکیل مجموعه های I_0, I_1, \dots صورت گرفت. به عبارت دیگر اندیس متغیر خارج شونده اندیس بردار لکزیکو می نیم در مجموعه D باشد که به طور منحصر به دست می آید. (مطلب فوق بسیار مهم است درک عمیق آن اکیداً توصیه می گردد).

۸-۱ تغییر در مقدار تابع مقصود

فرض کنیم B یک پایه شدنی برای ۳-۱ برای مقدار بسیار کوچک و دلخواه ε باشد و $B^{-1} = [\beta_{ij}]$. قرار می دهیم $\bar{b} = B^{-1}b$ و c_B ضریب متغیرهای اساسی در جدول مورد نظر باشد. اگر $w = c_B B^{-1}$ و $\bar{z} = c_B \bar{b}$ BFS ۳-۱ متناظر پایه B و مقدار تابع مقصود \bar{z} از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\text{بردار اساسی } x_B = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 + \beta_{11}\varepsilon + \dots + \beta_{1m}\varepsilon^m \\ \vdots \\ \bar{b}_m + \beta_{m1}\varepsilon + \dots + \beta_{mm}\varepsilon^m \end{bmatrix}$$

$$x_N = 0 \quad \text{بردار متغیرهای غیراساسی}$$

و

$$\bar{z}_0 = \bar{z} + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots + \varepsilon^m w_m \quad (*)$$

فرض کنید متغیر x_k واردشونده باشد که سود نسبی آن \bar{c}_k ($\bar{c}_k = c_k - z_k$) و فرض کنیم متغیر خارج شونده x_r در نظر گرفته شود در این صورت:

$$\begin{aligned} z_1 &= \bar{z}_0 + \bar{c}_k (\bar{b}_r + \varepsilon \beta_{r1} + \dots + \varepsilon^m \beta_{rm}) / \bar{a}_{rk} \\ &= z_0 + \bar{c}_k \cdot \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} + \left(\varepsilon \frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{rk}} + \dots + \varepsilon^m \frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rk}} \right) \end{aligned}$$

به جای \bar{z}_0 از (*) مقدار قرار می‌دهیم، داریم:

$$z_1 = \left(\bar{z} + \bar{c}_k \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} \right) + \sum_{i=1}^m \varepsilon^i \left(w_i + \bar{c}_k \frac{\beta_{ri}}{\bar{a}_{rk}} \right)$$

بردار $(\bar{b}_r, \beta_{r1}, \dots, \beta_{rm}) < 0$ (چرا؟) و ε عددی بسیار کوچک و مثبت است پس

$$\bar{z} < z_1 \quad \text{زیرا } \bar{c}_k (\bar{b}_r + \varepsilon \beta_{r1} + \dots + \varepsilon^m \beta_{rm}) / \bar{a}_{rk} < 0 \text{ یعنی } \bar{c}_k < 0$$

به عبارت دیگر در مسأله ۱-۳ تابع اکیداً برای پایه‌های متوالی نزولی می‌باشد یعنی پایه‌ی واردشونده در یک مرحله در هیچ‌یک از مراحل بعدی تکرار نخواهد شد و چون تعداد پایه‌های مسأله متناهی الگاریتم سیمپلکس در تعداد متناهی از مراحل مسأله را حل می‌نماید. حال به روش دیگری همگرایی الگاریتم سیمپلکس را با به‌کار بردن روش فوق‌الذکر برای مسائل تبه‌گن اثبات می‌نماییم. بردار

$$(c_B B^{-1} b, c_B B^{-1} a_1 - c_1, \dots, c_B B^{-1} a_m - c_m)$$

را در نظر بگیرید با توجه به این‌که مسأله از صورت کانونی استاندارد شروع می‌گردد

$$(j = 1, \dots, m) \quad c_B B^{-1} e_j - 0 = c_B B^{-1} a_j - c_j$$

پس سطر سود نسبی در مرحله به صورت $(c_B B^{-1} b, c_B B^{-1} I)$ برای $m+1$ ستون اول خواهد بود.

ثابت می‌کنیم این بردار لکزیکو نزولی می‌باشد. برای این منظور، در نظر بگیرید:

$$\underbrace{(C_B B^{-1} b, C_B B^{-1})}_{\text{قبل از عمل محوری}} - \underbrace{(C_{\hat{B}} \hat{B}^{-1} b, C_{\hat{B}} \hat{B}^{-1})}_{\text{بعد از عمل محوری}} \\ = \frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{rk}} (\bar{b}_r, \beta_{r1}, \dots, \beta_{rm}) > 0 \quad (\text{چرا؟}) \quad (*)$$

از این مطلب برای تقارب الگوریتم استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم الگوریتم سیمپلکس از پایه‌ای مانند B_1 شروع می‌کند به B_2 می‌رود و در دنباله‌ای مانند $B_1, B_2, \dots, B_t, B_1 = B_t$ به دور می‌افتد (با به کار بردن قاعده‌ی فوق‌الذکر) پس طبق رابطه (*) داریم:

$$(C_{B_j} B_j^{-1} b, C_{B_j} B_j^{-1}) - (C_{B_{j+1}} B_{j+1}^{-1} b, C_{B_{j+1}} B_{j+1}^{-1}) > 0$$

برای $j = 1, \dots, t-1$. یعنی:

$$(C_{B_1} B_1^{-1} b, C_{B_1} B_1^{-1}) - (C_{B_2} B_2^{-1} b, C_{B_2} B_2^{-1}) > 0$$

$$(C_{B_2} B_2^{-1} b, C_{B_2} B_2^{-1}) - (C_{B_3} B_3^{-1} b, C_{B_3} B_3^{-1}) > 0$$

⋮

$$(C_{B_{t-1}} B_{t-1}^{-1} b, C_{B_{t-1}} B_{t-1}^{-1}) - (C_{B_t} B_t^{-1} b, C_{B_t} B_t^{-1}) > 0$$

با توجه به این که $B_t = B_1$ با جمع نمودن داریم:

$$(C_{B_1} B_1^{-1} b, C_{B_1} B_1^{-1}) - (C_{B_1} B_1^{-1} b, C_{B_1} B_1^{-1}) > 0$$

که تناقض است. پس الگوریتم به دور نمی‌افتد و چون تعداد پایه‌ها متناهی است پس الگوریتم مسأله را در تعداد متناهی از مراحل حل می‌نماید. آنچه که در بالا گذشت به طور خلاصه ذیلاً آورده شده است.

(۱) یک پایه مانند B برای $3-1$ شدنی است، اگر و فقط اگر سطرهای ماتریس $[B^{-1} b, B^{-1}]$

لکزیکو ماکزیمم مثبت باشد، یعنی B لکزیکو شدنی باشد.

(۲) الگوریتم از یک پایه لکزیکو شدنی شروع می‌نماید و همان طوری که به تفصیل اثبات شد، تمامی پایه‌های به دست آمده با به‌کار بردن قاعده‌ی مورد نظر لکزیکو شدنی خواهند بود.

(۳) معیار ختم الگوریتم و انتخاب ستون واردشونده همان است که در الگوریتم معمولی ذکر گردید. یعنی x_k واردشونده است اگر:

$$z_k - c_k = \text{Max}\{z_j - c_j > 0 \mid j \in R \text{ است غیر اساسی}\}$$

و مسأله وقتی ختم می‌گردد که به‌ازاء هر j ، $(z_j - c_j) \geq 0$.

(۴) با انتخاب ستون واردشونده، و با به‌کار بردن قاعده فوق‌الذکر متغیر واردشونده به‌طور منحصر به فرد مشخص می‌گردد. این قاعده معروف به لکزیکو می‌نیم ^۱ می‌باشد.

(۵) بردار $(\bar{z}, w_1, \dots, w_m)$ از محوری به‌صورت لکزیکو اکید نزول نماید. از این رو پایه ظاهر شده در یک مرحله در هیچ مرحله‌ی دیگر تکرار نمی‌گردد.

(۶) وقتی الگوریتم سیمپلکس با به‌کار بردن این قاعده، ختم می‌گردد، جدول نهایی برای هر مقدار ε بسیار کوچک دلخواه از جمله $\varepsilon = 0$ ، جدول نهایی ۱-۳ خواهد بود.

(۷) پایه‌ی نهایی برای ۱-۳ که با به‌کار بردن الگوریتم سیمپلکس با اعمال قاعده فوق به دست می‌آید، برای ۱-۱ نیز جدول نهایی است.

الگوریتم بالا که برای جلوگیری از به‌دور افتادن الگوریتم سیمپلکس در حل مسائل تبه‌گن ذکر شد، به قاعده‌ی لکزیکو معروف است یعنی اگر قاعده‌ی لکزیکو را در انتخاب متغیر خارج‌شونده به‌کار ببریم، الگوریتم سیمپلکس در حل مسأله تبه‌گن به‌دور نمی‌افتد. قاعده‌ی دیگر نیز برای جلوگیری از به‌دور افتادن ابداع شده است که به قاعده بلند معروف است که در جزئیات، ذیلاً این قاعده را نیز ذکر خواهیم نمود.

۹-۱ قاعده بلند^۱

در حل مسأله برنامه‌ریزی خطی به وسیله‌ی الگوریتم سیمپلکس وقتی مسأله تبه‌گن نیست، تابع مقصود در هر مرحله اکیداً نزول می‌نماید. این امر مستلزم آن خواهد بود که هیچ پایه‌ای

1) Lexico Minimum Ratio Rule

در خلال به‌کار بردن الگوریتم فوق‌الذکر تکرار نگردد و تقارب الگوریتم را تضمین می‌نماید. از طرفی دیگر، به‌کار بردن قاعده لکزیکو، را از متقارب بودن الگوریتم مطمئن می‌نماید، به‌این‌صورت که نشان می‌دهد، در حالی‌که CBB^{-1} در حالت تبه‌گنی ممکن است ثابت بماند ولی بردار $(CBB^{-1}b, CBB^{-1})$ به‌طور یکنواخت لکزیکو نزولی است. قاعده‌ی بلند بسیار ساده می‌باشد. در این قاعده ابتدا متغیرها به‌صورتی مرتب می‌گردند، مثلاً به‌صورت x_1, x_2, \dots, x_n سپس از بین متغیرهای غیراساسی آن متغیر، برای وارد شدن انتخاب می‌شود که $z_j - c_j > 0$ و z_j کوچک‌ترین اندیس متغیری است که دارای این خاصیت می‌باشد، عیناً از بین تمامی متغیرهائی که می‌توانند پایه را ترک کنند آن متغیری انتخاب می‌گردد که دارای کوچکترین اندیس باشد. برای توضیح جدول زیر را در نظر بگیرید.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	۱	۰	۰	۰	$\frac{2}{3}$	-۲۰	$\frac{1}{3}$	-۶	۰
x_1	۰	۱	۰	۰	$\frac{1}{3}$	-۸	-۱	۹	۰
x_2	۰	۰	۱	۰	$\frac{1}{3}$	-۱۲	$-\frac{1}{3}$	۳	۰
x_3	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱

در این جدول x_4 و x_6 هر دو می‌توانند وارد شوند x_4 به‌عنوان متغیر واردشونده انتخاب می‌گردد. x_1 و x_2 هر دو متغیرهائی هستند که می‌توانند از پایه خارج شوند، x_1 به‌عنوان متغیر خارج‌شونده انتخاب می‌گردد. به‌عهدی خواننده است که بررسی نماید، اگر قاعده‌ی فوق به‌کار رود مسأله به‌دور نمی‌افتد (مسأله پرفسور بل می‌باشد که قبلاً ذکر شد).

قاعده بلند سیمای یکنواختی زیر را دارد. در یک رشته از عملیات محوری تبه‌گن، اگر متغیری مانند x_q وارد پایه شود، آنگاه، x_q نمی‌تواند پایه را ترک کند مگر متغیر دیگری با اندیس بالاتر از q که زمان وارد شدن q به پایه، متغیر غیراساسی بود وارد پایه گردد. اگر این مطلب اتفاق بیفتد، دور هرگز اتفاق نمی‌افتد. زیرا در یک دور هر متغیری که وارد شود بایستی خارج گردد و این بدان معنی است که با وجود یک متغیر با بالاترین اندیس که هم وارد می‌گردد و هم پایه را ترک می‌کند و این تناقض با سیمای یکنواختی بالا دارد. (چرا؟)

1) Bland's Rule

برای نشان دادن این‌که این سیمای یکنوایی برقرار است، در نظر بگیرید متغیری مانند x_q که وارد پایه می‌گردد. فرض کنید J_1 و J_2 مجموعه‌های اندیس‌های متغیرهایی باشند که اندیس آن‌ها به ترتیب از q کمتر و از q بیشتر می‌باشند هر مسأله برنامه‌ریزی خطی به صورت استاندارد کانونی چنین می‌باشد:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j \in J_1} \bar{c}_j x_j + c_q x_q + \sum_{j \in J_2} \bar{c}_j x_j \\ \text{s. t.} \quad & \bar{A} x_N + x_B = \bar{b} \\ & x_N, x_B \geq 0 \end{aligned} \quad (4-1)$$

که در آن x_B متغیرهای اساسی و x_N متغیرهای غیراساسی می‌باشند و $\bar{c}_j = c_j - z_j$ به‌ازاء هر j . توجه کنید چون x_q طبق قاعده‌ی بلند وارد پایه می‌گردد، داریم $\bar{c}_q < 0$ و به‌ازاء هر $j \in J_1$ ، $\bar{c}_j \geq 0$.

حال فرض کنیم به خلف، که دنباله‌ای از عملیات محوری تبه‌گن صورت گرفته که در آن x_j ، $j \in J_2$ ، غیراساسی باقی‌مانده است و به یک عمل محوری رسیده‌ایم که در آن متغیری مانند x_p وارد پایه می‌گردد و متغیر x_q از پایه خارج می‌گردد. فرض کنید ۴-۱ صورت اولیه و اصلی مسأله می‌باشد یعنی ستون‌های متغیرها را a_j و پایه‌ها و ضرائب قیمت را نسبت به این نمایش تعریف می‌کنیم. فرض کنید B_1 پایه‌ای باشد که x_p متغیر واردشونده و x_q متغیر خارج‌شونده است (توجه کنید که عملیات محوری، عملیات محوری تبه‌گن می‌باشند، یعنی θ در قاعده می‌نیمم صفر است) و \bar{c}_{B_1} بردار ضرائب متغیرهای اساسی می‌باشد. از این رو $\bar{c}_{B_1} B_1^{-1} a_p - \bar{c}_p$ چون x_p متغیر وارد شونده است. چون $\bar{c}_p \geq 0$ زیرا متغیری که وارد می‌شود فرض شده است از J_1 باشد یعنی اندیس آن‌ها از q کمتر است و \bar{c}_q اولین و کوچک‌ترین اندیسی است که $\bar{c}_q < 0$ و تمامی متغیرها با اندیس کمتر از q دارای $\bar{c}_j \geq 0$ می‌باشند پس $\bar{c}_{B_1} B_1^{-1} a_p - \bar{c}_p > 0$ فرض کنید $\bar{a}_p = B_1^{-1} a_p$ در این صورت:

$$(\bar{c}_{B_1}, \bar{c}_{B_2}, \dots, \bar{c}_{B_m}) \begin{pmatrix} \bar{a}_{1p} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mp} \end{pmatrix} > 0$$

توجه کنید که $\bar{a}_{pq} > 0$ (زیرا عضو محوری است و $\bar{c}_q < 0$) و داریم

$$\bar{C}_{B_1} \bar{a}_{1p} + \dots + \bar{C}_q \bar{a}_{qp} + \dots + \bar{C}_{B_m} \bar{a}_{mp} > 0 \quad (*)$$

در سمت چپ نامساوی فوق $\bar{c}_q \bar{a}_{qp} < 0$ پس بایستی جمله‌ای در آن مانند:

$$C_{B_r} \bar{a}_{rp} > 0$$

$$\text{و } \bar{C}_{B_r} > 0.$$

توجه کنید متغیرهای اساسی در جدول مورد نظر، دو دسته می‌باشند. دسته‌ی اول، آن‌هایی هستند که در خلال عملیات محوری تبه‌گن وارد شدند که \bar{c}_j متناظر آن‌ها نامنفی بوده و دسته‌ی دوم آن‌هایی بودند که در پایه بودند و \bar{c}_j متناظر آن‌ها صفر بود. پس $\bar{C}_{B_r} \neq 0$ بایستی مثبت باشد (هیچ متغیری با اندیس کمتر q ، \bar{c}_j منفی ندارد و اندیس x_{B_r} از q کمتر است) پس $\bar{a}_{rp} > 0$ و جدول به صورت زیر می‌باشد:

	x_p	RHS
		\bar{b}_{i_1}
x_{B_r}	\bar{a}_{rp}	0
\vdots		\vdots
x_q	\bar{a}_{qp}	0
		\vdots
		\bar{b}_{r_m}

با توجه به این که $\theta = \text{Min} \left\{ \frac{0}{\bar{a}_{rp}}, \frac{0}{\bar{a}_{qp}}, \dots \right\}$ پس بایستی طبق قاعده‌ی بلند، X_{B_r} خارج می‌شد و این تناقض است و برهان تمام است.

۱۰-۱ نکاتی چند در رابطه با بکارگیری قواعد فوق

اگر چه بیشتر مسائل از واقعیات زندگی که به صورت LP فرموله می‌گردند، تبه‌گن می‌باشند، و قواعد فوق‌الذکر، یعنی قاعده لکزیکو و قاعده‌ی بلند را می‌توان جهت جلوگیری از به‌دور افتادن در رابطه با آن‌ها به‌کار گرفت، ولی در اغلب کدهای کامپیوتری تجاری که جهت حل

مسائل برنامه‌ریزی خطی نوشته شده‌اند (منظور کدهای کامپیوتری برای به‌کار بردن الگوریتم سیمپلکس می‌باشد) اعمال قواعد فوق‌الذکر در این کدها ملحوظ نگردیده‌اند. دو دلیل اصلی برای این کار وجود دارد. دلیل اول آن است که به‌کارگیری آن‌ها یا از نظر محاسباتی گران می‌باشد، مانند قاعده لکزیکو، یا از نظر محاسباتی کارآیی پایین دارد، از نظر مسیر سیمپلکسی که تولید می‌گردد، مانند قاعده بلند. دلیل دوم بخاطر گرد نمودن اعداد در کامپیوترهای ارقامی می‌باشد. بحث بدین صورت است که مقادیر سمت راست به‌روز شده، از مقدار واقعی آن‌ها در اثر گرد شدن دورگردیده و این مطلب خود به خود یک نوع آشوب نمودن می‌باشد (یعنی در حقیقت به‌طور ضمنی به‌کار بردن قاعده‌ی لکزیکو). از این رو مشکل جدی محاسباتی در رابطه با مسائل حقیقی زندگی نیز این امر را تأیید می‌نماید. ذکر این نکته ضروری است؛ در مسائل برنامه‌ریزی خطی که ساختار شبکه‌ای دارند (این مطلب در رابطه مسائل حمل و نقل و ... مطالعه خواهد شد). هیچ‌یک از مسائل فوق‌الذکر در رابطه با به‌کارگیری الگوریتم سیمپلکس دست‌کاری شده^۱ برای حل آن‌ها وجود ندارد و به‌کارگیری قواعد فوق‌الذکر جهت جلوگیری از به‌دور افتادن می‌تواند مضرتر نیز واقع گردد.

مطلب دیگری که در این جا لازم به ذکر آن می‌باشد، مسأله‌ی گیر کردن^۲ است. اگر چه قواعد فوق‌الذکر را می‌توان جهت جلوگیری از به‌دور افتادن به‌کار برد، این موضوع کاملاً امکان دارد که الگوریتم سیمپلکس در یک نقطه رأسی تبه‌گن یک دنباله طولانی (اگر چه متناهی) از عملیات محوری را انجام دهد؛ که این امر در رابطه با مسائلی که دارای ساختار خاصی هستند، تعداد عملیات محوری تبه‌گن برحسب m و n به‌صورت نمایی می‌باشند. این پدیده را، گیر کردن می‌نامیم. لغت گیر کردن از این جهت به‌کار گرفته می‌شود که وقتی اندازه مسأله بزرگ شود، الگوریتم وقت بسیار زیادی (اگر چه متناهی) صرف می‌کند تا از این نقطه رأسی تبه‌گن خارج شود. علاوه بر به‌کار بردن قواعد جلوگیری از به‌دور افتادن، مسأله چاره‌اندیشی در رابطه باگیر کردن نیز از دیدگاه تئورسین‌های این علم مورد توجه می‌باشد. این افراد علاقه مند به به‌کارگیری روشی در رابطه با رفع این مشکل می‌باشند که تعداد عملیات محوری تبه‌گن صورت گرفته از بالا به وسیله‌ی کثیرالجمله‌ای محدود گردد (کثیرالجمله‌ای برحسب m و n).

1) Modified Simplex 2) Modified Simplex

اساس جلوگیری از پدیده گیر کردن، در مسأله‌ی به نام مرحله ۱ حل می‌گردد. مرحله عبارت است از دنباله‌ای از عملیات محوری تبه‌گن که در آن هر متغیر غیراساسی که قابل وارد شدن باشد وارد می‌گردد تا الگاریتم از آن نقطه رأسی تبه‌گن خارج شود و هیچ زیردنباله محض آن این خاصیت را ندارد.

طراحان الگاریتم و چاره اندیشان رفع مشکل گیرکردن علاقه‌مند هستند که هم تعداد عملیات محوری تبه‌گن در یک مرحله (که آن را طول مرحله می‌نامند) و هم تعداد مراحل در عملیات محوری تبه‌گن کوچک گردد، یعنی به وسیله‌ی کثیرالجمله‌ای محدود شود. اولین شرط از دو شرط فوق‌الذکر که عبارت است از کوتاه نمودن طول مرحله به راحتی صورت می‌گیرد. در این رابطه روش‌های خاصی به کار گرفته شده که یکی از آن‌ها LRC^2 می‌باشد، که LRC به شرح زیر می‌باشد:

فرض کنید یک لیست دوری 3 از متغیرها داریم به صورت x_1, x_2, \dots, x_n . اگر در مرحله‌ای از عملیات محوری، x_k واردشونده باشد متغیر بعدی که می‌خواهد وارد شود (یعنی $z_j - g > 0$) اولین متغیر لیست

$$\{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_n\}$$

خواهد بود (که در آن $x_{n+1} \equiv x_1$). واضح است که بدین صورت طول مرحله از n بیشتر نخواهد شد، زیرا هر متغیری که می‌توانسته وارد شود در طول مرحله در عملیات محوری تبه‌گن وارد شده است. با توجه به طبیعت این روش یک خط‌مشی عملی مثبت می‌باشد. زیرا در هر عملیات محوری یک قدم جلو می‌رویم. توجه داشته باشید که روش بلند یک خط‌مشی عملی مثبت نمی‌باشد (در این مورد مثال‌هایی ارائه شده که علاقه‌مندان می‌توانند به منابع آخر کتاب مراجعه نمایند). این مسأله که آیا روش لکزیکو به همراه روش دانتزیگ در انتخاب متغیر واردشونده با مثبت‌ترین $z_j - c_j$ از گیر نمودن جلوگیری می‌نماید یا نه، کاری نمی‌تواند بکند. این مطلب ثابت شده است که برای مسائل برنامه‌ریزی خطی با ساختار شبکه‌ای این روش از گیرکردن جلوگیری می‌نماید.

مسأله‌ی پیدا نمودن روشی جهت کران‌دار نمودن تعداد مراحل به صورت کثیرالجزئی کاری است بس مشکل. برای مسائل برنامه‌ریزی خطی در حالت کلی تا کنون چنین روشی ابداع نشده است به هر حال در فصول بعدی برای مسائل با ساختار شبکه‌ای یک روش لکزیکو قابل اجرا با نتایج بسیار خوب موجود است، که اگر به همراه یک خط مشی عملی مثبت به کار گرفته شود، نتیجه بسیار خوبی ارائه می‌دهد.

۱-۱۱ قیود زاید

با توجه به اهمیت تشخیص قید زاید که در اکثر موارد باعث تبه‌گنی می‌گردد؛ در پایان این فصل، این مطلب را به دقت و با عمق بیشتری مورد مطالعه قرار می‌دهیم. توجه به مفاد این روش از ضروریات می‌باشد و درک عمیق آن توصیه می‌گردد.

۱-۱۱-۱ قیود تساوی زاید. ۱. مسأله‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = cx + ty \\ \text{s. t.} \quad & Ax + Dy = b \\ & Gx + Fy \geq h \\ & x \geq 0 \\ & y \text{ آزاد} \end{aligned} \quad (5-1)$$

یک قید تساوی در ۱-۵ را یک قید تساوی زاید گویند، اگر بتوان آن را به صورت ترکیب خطی از بقیه‌ی قیود تساوی نوشت.

۱۴-۱۱-۱ مثال. در قیود زیر:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 15$$

$$3x_1 + 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 25$$

یک قید زاید می‌باشد (کدامیک؟)

در حالت کلی به سادگی دیده می‌شود که هر تغییر در مقادیر ثابت سمت راست قیود تساوی زاید دستگاه را ناسازگار می‌نماید. مثلاً در مثال فوق تغییر هر یک از اعداد سمت راست باعث ناسازگاری دستگاه می‌گردد (چرا؟)

۱۵-۱۱-۱ قیود زاید نامساوی. یک قید در ۵-۱، قید نامساوی زاید است، اگر مجموعه‌ی جواب‌های شدنی دستگاه با حذف آن تغییر نکند. در ۵-۱ فرض کنید A ، دارای m_1 سطر و G دارای m_2 سطر باشند. قیدهای ۵-۱ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a^i x + d^i y = b_i \quad i = 1, \dots, m_1$$

$$g^i x + f^i y \geq h_i \quad i = 1, \dots, m_2$$

که در آن a^i سطر i ام A ، d^i سطر i ام D ، g^i سطر i ام G و f^i سطر i ام F می‌باشند. یکی از قیود نامساوی مثلاً قید $g^i x + f^i y \geq h_i$ را در نظر می‌گیریم. (هر یک از قیدهای نامساوی را برای این منظور می‌توان در نظر گرفت)

مسأله‌ی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & g^i x + f^i y \\ \text{s. t.} \quad & a^i x + d^i y = b_i \quad i = 1, \dots, m_1 \\ & g^i x + f^i y \geq h_i \quad i = 2, \dots, m_2 \\ & x \geq 0 \\ & y \text{ آزاد} \end{aligned} \quad (۶-۱)$$

فرض کنیم مقدار بهینه‌ی تابع مقصود \hat{h}_1 باشد.

اگر $\hat{h}_1 \geq h_1$ ($i = 2, \dots, m_2$)، در این صورت قید $g^i x + f^i y \geq h_1$ زاید است.

۱۶-۱۱-۱ تمرین. (مهم) با حل یک مسأله چگونه می‌توان نشان داد که وجود یک قید باعث ناسازگاری دستگاه می‌گردد. به دقت حل مسأله را روی کاغذ بیاورید.

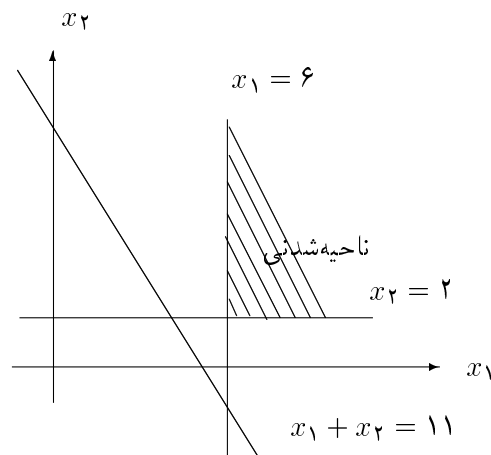
۱۷-۱۱-۱ تمرین. استدلال جبری زاید بودن قید $g^1 x + f^1 y \geq h_1$ را به دقت روی کاغذ بیاورید. (در مسأله‌ی ۶-۱)

۱۸-۱۱-۱ تمرین. چرا در پایان فاز اول قیدهای زاید از مسأله حذف می‌گردند؟ به دقت مطلب را در جزئیات بنویسید.

۱۹-۱۱-۱ مثال. دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x_1 & \geq 6 \\ x_2 & \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 & \geq 11 \end{aligned}$$

ناحیه‌شدنی در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل (۱-۵)

واضح است که قید نامساوی سوم زاید است (در دستگاه موردنظر) هیچ‌یک از قیدهای اول یا دوم زاید نیستند. مجموعه‌ی جواب‌های شدنی دستگاه در شکل (۱-۵) نشان داده شده است. اگر ثابت سمت راست در قید سوم به $14 + \epsilon$ (عدد مثبتی است) تبدیل گردد، قید سوم نیز زاید نخواهد بود.

۲۰-۱۱-۱ تمرین. فرق اساسی تغییر سمت راست ثابت قیدهای تساوی زاید و قیدهای نامساوی زاید را به دقت روی کاغذ بیاورید و از هر کدام چند مثال بزنید.

۲۱-۱۱-۱ قیدهای نامساوی نافذ (مار) ۱ یک قید نامساوی از ۱-۵ را نامساوی نافذ (مار - تنگ) در آن دستگاه گویند، اگر مجموعه‌ی جواب‌های شدنی ۱-۵، با ملحوظ داشتن آن به عنوان قید تساوی تغییر نکند. از این رو قید $g^l x + f^l y \geq h_l$ نافذ است اگر مجموعه‌ی جواب‌های شدنی ۱-۵ با قرار دادن $g^l x + f^l y = h_l$ به جای $g^l x + f^l y \geq h_l$ تغییر نکند. این مطلب زمانی اتفاق می‌افتد که $\hat{h}_l = h_l$ که در آن مقدار بهینه‌ی تابع مقصود

1) Binding Inequality Constraints

مسأله‌ی زیر است:

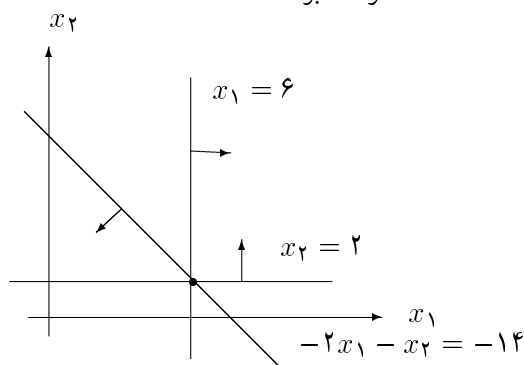
$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & g^l x + f^l y \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} g^i x + f^i y \geq h_i & i = l, \dots, m_2 \\ & i \neq l \\ a^i x + d^i y = b_i & i = 1, \dots, m_1 \end{cases} \\ & x \geq 0, \quad y \text{ آزاد} \end{aligned}$$

مطلب فوق را با یک مثال روشن می‌نمائیم.

۲۲-۱۱-۱ مثال. دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x_1 & \geq 6 \\ x_2 & \geq 2 \\ -2x_1 - x_2 & \geq 6 \end{aligned}$$

هر یک از قیدهای نامساوی در این دستگاه نافذ است. مجموعه جواب‌های شدنی این دستگاه، مجموعه‌ی منفرد $\{(6, 2)\}$ می‌باشد که در شکل (۱-۵) نشان داده شده است. اگر سمت راست از $14 - \varepsilon$ به 14 تغییر کند (که در آن ε هر عدد مثبتی است) قیدهای نامساوی نافذ در این دستگاه نخواهند بود.



شکل (۱-۶)

۱-۱۱-۲۳ حذف قیدهای زاید^۱. زاید بودن قیدهای تساوی در خلال تبدیل یک دستگاه از معادلات به صورت کانونی آن به راحتی صورت می‌گیرد و هیچ کوشش دیگری مورد نیاز نیست. از طرف دیگر تشخیص زاید بودن یا نافذ بودن قیدهای نامساوی در مقایسه بسیار مشکل است و نیاز به حل جداگانه LPهای مختلف دارد. از نقطه نظر ریاضی بسیار جذاب است قیدهای زاید در یک دستگاه را تشخیص و آن‌ها را از دستگاه حذف نمائیم و همین‌طور تشخیص قیدهای مارکه به جای آن‌ها، قیدهای تساوی قرار داده شود؛ که بدین صورت قیدهای کمتری خواهیم داشت. ظاهر مسأله بسیار ساده می‌باشد ولی در عمل تشخیص زاید بودن یا مار بودن قید کوشش فراوانی می‌طلبد که در عمل به صرفه نیست.

برای بررسی و مطالعه بیشتر در این مورد به [] مراجعه نمائید.

در کاربردهای عملی، یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی نه تنها برای به دست آوردن جواب بهینه مورد استفاده قرار می‌گیرد، بلکه بررسی تغییرات جواب بهینه را وقتی مقادیر سمت راست تغییر می‌کند؛ مورد بررسی قرار می‌دهد.

تحلیل حاشیه‌ای و تحلیل حساسیت در رابطه با بردار ثابت سمت راست اطلاعات بسیار مفید اقتصادی به دست می‌دهد، که در رابطه با برنامه‌ریزی بسیار سودمند است. هر نوع تغییر در مقادیر سمت راست قیدهای زاید باعث ناسازگاری دستگاه می‌گردد. بنابراین اطلاعات سودمندی عاید نمی‌گردد. در هر صورت چه حفظ و چه حذف قیدهای زاید، مار مطالبی دارد که بایستی به دقت مورد مطالعه قرار گیرد. قبل از بیان کلی موضوع مسأله ساده‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$(P) : \quad \text{Max} \quad x_1 + x_2$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1) Elimination of Redundant Constraints

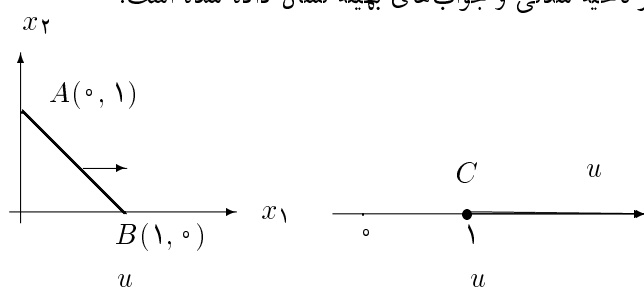
دوآل مسأله به صورت زیر خواهد بود:

$$(D) : \quad \text{Min} \quad w$$

$$\text{s. t.} \quad w \geq 1$$

$$w \geq 1$$

در شکل زیر ناحیه شدنی و جواب‌های بهینه نشان داده شده است:



در مسأله‌ی دوآل از قیدهای $w \geq 1$ و $w \geq 1$ یکی زاید است، از این رو با حذف آن دوآل به صورت زیر درمی‌آید:

$$\text{Min} \quad w$$

$$(D) : \quad \text{s. t.} \quad w \geq 1$$

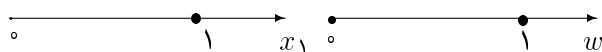
$$w \text{ آزاد}$$

که دوآل این مسأله به صورت عبارت خواهد بود از:

$$\text{Max} \quad x_1$$

$$(P') : \quad \text{s. t.} \quad x_1 = 1$$

$$x_1 \geq 0$$



ناحیه شدنی در مسأله‌ی P' فقط $x_1 = 1$ می‌باشد که همین نقطه، جواب بهینه مسأله است. یعنی با حذف قید زاید دوآل پرایمال دیگر جواب چندگانه ندارد. این مثال نمونه‌ای بود از این‌که با

حذف قیدهای زاید یا مار ممکن است، مسأله حاصل یا دوآل آن معادل مسأله اصلی نباشد، گرچه جواب‌های بهینه یکسان دارند (در DEA این مطلب کجا ظاهر می‌گردد؟) توجه (خیلی مهم). دو مسأله P_1 و P_2 را در نظر می‌گیریم معادل بودن این دو مسأله بستگی به تعریفی دارد که می‌آوریم. اگر تعریف زیر را به عنوان معادل بودن بپذیریم. تعریف. دو مسأله P_1 و P_2 را معادل گوئیم در صورتی که مجموعه‌ی جواب‌های بهینه این دو مسأله مساوی باشند.

یا ممکن است تعریف زیر را برای معادل بودن دو مسأله بیاوریم. تعریف دو مسأله P_1 و P_2 را معادل گوئیم، در صورتی که مجموعه‌ی جواب‌های شدنی و مجموعه‌ی جواب‌های بهینه آن دو مساوی باشند. در مثال قبل با تعریف اول دو مسأله، معادل هستند، در صورتی که با تعریف دوم، دو مسأله معادل نمی‌باشند. به هر حال وقتی بردار ثابت سمت راست در یک قید نامساوی زاید یا نافذ به مقتضای کار تغییر می‌کند، ممکن است دستگاه سازگار باقی بماند. هر قید نامساوی در یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی، توازن مواد اولیه و سمت راست این قید نشان‌دهنده‌ی مقدار مواد اولیه‌ی مورد یا محصول مورد درخواست می‌باشد. حتی اگر قید نامساوی زاید باشد، اگر این قید زاید از مدل حذف گردد، در این صورت کسب اطلاعات اقتصادی کامل میسر نخواهد بود، اگرچه جواب بهینه به دست آمده، همان جواب بهینه مسأله‌ی اصلی می‌باشد (مسأله اصلی مسأله‌ی است که دارای قیدهای زاید یا نافذ است که حذف نگردیده است) در فرموله نمودن یک مسأله‌ی عملی به عنوان LP، در مراحل اولیه مدل‌سازی، مجموعه‌ی جواب‌های شدنی به عنوان یک شیء هندسی قابل تشخیص نمی‌باشد بلکه سعی بر آن است که آن به عنوان یک مجموعه که با خواص جبری مشخص می‌گردد بیان نمائیم که این خواص جبری با حداقل قیود بیان می‌گردد. هر قیدی در یک LP نشان‌دهنده عرضه یک کالا یا تقاضای کالا می‌باشد (در این جا کالا به معنی اعم به کار برده می‌شود). بعد از این که مدل ساخته شد و همه چیز دورهم جمع شد (یعنی تابع مقصود مشخص گردید و قیدها تعیین شد) ممکن است بعضی از این قیود نامساوی در مدل زاید باشد. حذف این قیود زاید باعث از بین رفتن اطلاعاتی در رابطه با تعیین حساسیت باشد. از این رو بایستی بسیار با احتیاط با این مسأله برخورد نمود و

بهترین راه حذف نکردن قیدهای نامساوی زاید از مدل می‌باشد.

۱۲-۱ تمرینات فصل اول

(۱) مسأله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s. t. } 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

الف. مسأله را به طریق ترسیمی حل نمائید و بررسی کنید که نقطه‌ی بهینه یک جواب اساسی شدنی تبه‌گن می‌باشد.

ب. مسأله را با روش سیمپلکس حل نمائید.

ج. از قسمت الف، قیدهایی را که باعث تبه‌گنی می‌گردد معین نمائید و این قیدها را از مسأله حذف کنید و مجدداً مسأله را حل کنید و توجه کنید که تبه‌گنی از بین می‌رود و همان جواب بهینه قبلی به دست می‌آید.

د. آیا این مطلب همواره درست است که نقطه رأسی تبه‌گن را می‌توان با حذف قیدهایی غیرتبه‌گن نمود، بدون این که ناحیه شدنی تغییر نماید.

توجه نمائید که حل دقیق این مسائل بدون درک عمیق مطالب فصل ممکن نمی‌باشد.

(۲) فرض کنید یک جواب بهینه رأسی برای مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی از نوع می‌نیمم نمودن داریم. در حالت تبه‌گنی، آیا امکان این امر وجود دارد که این نقطه‌ی رأسی متناظر یک جواب اساسی شدنی باشد که $z_j - c_j > 0$ برای حداقل یک متغیر غیراساسی اگر این مطلب اتفاق بیفتد آیا تضمینی وجود دارد که یک جواب اساسی شدنی دیگری موجود باشد که متناظر همان نقطه رأسی باشد و $z_j - c_j \leq 0$ برای تمامی متغیرهای غیراساسی برقرار شود؟ چرا آری و چرا نه؟ مطلب را با یک مثال عددی

توضیح دهید.

(۳) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & (cx, cY) \\ \text{s. t.} \quad & A(x, Y) = (b, I) \\ & (x, Y) \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن $A = [a_{ij}]$ از مرتبه‌ی $n \times m$ و $c \in R^n$ و متغیرها عبارتند از بردار x که یک بردار n تایی است و Y یک ماتریس $n \times m$ تابع مقصود یک بردار سطری است و می‌نیمم نمودن به مفهوم لکزیکو صورت می‌گیرد، یعنی $(cx_1, cY_1) < (cx_2, cY_2)$ اگر و فقط اگر:

$$(cx_1, cY_1) - (cx_2, cY_2) > 0$$

هر سطر از ماتریس (x, y) مقید به نامنفی بودن به مفهوم لکزیکو می‌باشد.
الف. نشان دهید

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} B^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

یک جواب شدنی برای مسأله است مشروط بر این‌که

$$(B^{-1}b, B^{-1}) > 0$$

ب. نشان دهید که روش سیمپلکس با قاعده لکزیکو، دنباله‌ای به صورت

$$(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), \dots$$

که در آن

$$(cx_{j-1}, cY_{j-1}) - (cx_j, cY_j) > 0 \quad \text{به‌ازاء هر } j$$

تولید می‌کند.

(۴) مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } z(x) = cx$$

$$\text{s. t. } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

فرض کنیم x_{B_1} یک بردار اساسی شدنی با این خاصیت باشد که فقط یکی از متغیرهای اساسی برابر صفر می‌باشد (یعنی $x_{B_1} = B_1^{-1}b \geq 0$ و فقط یکی از مؤلفه‌های $B_1^{-1}b$ برابر صفر می‌باشد). ثابت کنید x_{B_1} نمی‌تواند در یک دور از پایه‌های تبه‌گن قرار گیرد (البته برای مسأله فوق)

(۵) LP زیر را در نظر بگیرید:

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	b
x_1	۱	۰	۰	۰	$\frac{2}{5}$	$-\frac{22}{5}$	$\frac{22}{5}$	۰	۰
x_2	۰	۱	۰	۰	$\frac{1}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$\frac{2}{5}$	۰	۰
x_3	۰	۰	۱	۰	$\frac{2}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	۰	۰
x_4	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱
۰	۰	۰	۰	۰	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$	۱	۰

z می‌نیمیم می‌گردد. $j = 1, \dots, 7$ $x_j \geq 0$ در حل این مسأله با روش سیمپلکس، با شروع از یک بردار اساسی شدنی $(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_B$ در هر مرحله متغیر واردشونده طبق قاعده‌ی زیر انتخاب می‌گردد:

$$s = \text{Min } \{j \mid \bar{c}_j < 0\}$$

و متغیر خارج‌شونده به صورت زیر برای خروج کاندیدا می‌گردد:

$$r = \text{Min} \{i \mid \text{سطر } i \text{ ام طبق قاعده می‌نیمیم می‌تواند خارج گردد}\}$$

با به‌کار بردن این قواعد نشان دهید که دورافتادن صورت می‌پذیرد و بررسی نمائید که با به کار بردن قاعده لکزیکو از به دورافتادن جلوگیری می‌گردد (مسئله از K.T.Marshel می‌باشد).

(۶) LP زیر را در نظر بگیرید :

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	b
x_1	۱	۰	۰	۰	$\frac{1}{3}$	$-\frac{22}{9}$	$\frac{2}{9}$	۰	۰
x_2	۰	۱	۰	۰	$\frac{1}{6}$	$-\frac{13}{9}$	$\frac{5}{18}$	۰	۰
x_3	۰	۰	۱	۰	$\frac{2}{3}$	$-\frac{16}{9}$	$\frac{1}{9}$	۰	۰
x_4	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱
۰	۰	۰	۰	۰	-۷	-۴	۱۵	۱	۰

z می‌نیم می‌گردد $j = 1, 2, \dots, 7$ اگر الگوریتم سیمپلکس جهت حل مسأله‌ی فوق با:

$$x_B = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

به‌کار برده شود، با به‌کار بردن قواعدی که در مسأله ۵ ذکر شد. نشان دهید که به دور افتادن صورت می‌پذیرد، علیرغم این که تابع مقصود در ناحیه شدنی از پائین نامحدود می‌باشد.

مسئله از J.W. Suurballe می‌باشد.

(۷) مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Min } z(x) = c(x)$$

$$\text{s. t. } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

نشان دهید با وجود تبه‌گنی به شرط آنکه می‌نیم منحصر به فردی در محاسبه‌ی زیر

$$\text{Min}_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\}$$

که در آن $\bar{b} = B^{-1}b$ و $\bar{a}_k = B^{-1}a_k$ و متغیر واردشونده می‌باشد، به‌دور افتادن صورت نخواهد گرفت.

(۸) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Min } z(x) = c(x)$$

$$\text{s. t. } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

که در آن A ماتریسی است از مرتبه‌ی $m \times n$ و

$$\text{rank}(A) = m < n$$

هر یک از عبارات زیر را به دقت بخوانید و بگوئید راست یا دروغ می‌باشد. اگر راست است اثبات نمائید، در غیراین صورت مثال نقض بیاورید.

- ۱- در یک مرحله محوری، سطر محوری، سطر r ام باشد، آنگاه ستون متعلق به متغیر وارد شونده نیز، ستون r ام جدول خواهد بود.
- ۲- در الگوریتم سیمپلکس دوآل (دوآل سیمپلکس) با شروع از یک جواب شدنی دوآل، هیچ معیاری برای نامحدود بودن $z(x)$ وجود ندارد.
- ۳- در حل مسأله (۱) با پرایمال سیمپلکس، متغیرهای پرایمال همواره نامنفی باقی می‌مانند، عیناً در حل (۱) با سیمپلکس دوآل همواره متغیرهای دوآل نامنفی باقی می‌مانند.
- ۴- وقتی مسأله (۱) با الگوریتم دوآل سیمپلکس حل می‌گردد، مقدار تابع مقصود به‌طور یکنواخت نزول می‌کند (وقتی از یک مرحله به مرحله بعدی می‌رویم).
- ۵- وقتی مسأله (۱) با الگوریتم دوآل سیمپلکس حل می‌گردد، وقتی یک متغیر نامنفی شد (در یک مرحله) در تمامی مراحل بعدی نامنفی باقی می‌ماند.
- ۶- وقتی مسأله‌ی (۱) با لگوریتم دوآل سیمپلکس حل می‌گردد، در هر مرحله مقدار تابع مقصود یک کران پائینی برای مراحل بعدی می‌باشد.

۷- به دور افتادن در تبه‌گن فقط در حل مسأله با الگوریتم پرایمال سیمپلکس اتفاق می‌افتد. در حل مسأله با الگوریتم دوآل سیمپلکس به دور افتادن نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

۸- برای پیدا نمودن جواب اولیه در پرایمال سیمپلکس متغیر تصنعی به مسأله افزوده می‌گردد و برای به دست آوردن جواب اولیه در دوآل سیمپلکس نامساوی تصنعی به مسأله اضافه می‌شود.

۹- فرض کنید در یک مسأله LP، $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ ، چون تابع مقصود از نوع می‌نیم نمودن می‌باشد، پس اگر (x_1, \dots, x_m) جواب اساسی شدنی، این جواب یک جواب بهینه می‌باشد.

۱۰- اگر در مسأله (۱) بردار $c \geq 0$ ، در این صورت دوآل متناظر آن شدنی می‌باشد.

۱۱- اگر در $\text{rank}(A) = m(1)$ و (۱) تبه‌گن نباشد، هر جواب شدنی که درست m مولفه‌ی مثبت داشته باشد، یک BFS می‌باشد.

۱۲- در حل یک LP در فاز اول هیچوقت حالت نامحدود بودن مسأله پیش نمی‌آید.

۱۳- اگر در یک LP در فاز اول حالت نامحدود بودن پیش آید، بایستی مسأله نشدنی باشد.

۱۴- در حل یک LP، در فاز اول برای مسأله شدنی تمامی متغیرهای تصنعی پایه را ترک می‌کنند.

۱۵- هیچ جواب شدنی (۱) با $m + 2$ یا بیشتر متغیر مثبت نمی‌تواند روی یک یال قرار گیرد.

(۹) مسأله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z(x) = c(x) \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (*)$$

فرض کنید B یک پایه شدنی است که فقط یکی از مؤلفه‌های $b \geq 0$ مساوی صفر می‌باشد ثابت کنید اگر B در یک دور افتادن مسأله نمی‌تواند یکی از پایه‌ها باشد.

۱۰ مسأله‌ی (*) را در نظر بگیرید که در آن $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$$\text{Rank}(A) = m < n$$

راست یا دروغ بودن عبارات زیر را مشخص کنید. در صورت راست بودن اثبات نمائید و در صورت دروغ بودن گزاره مثال نقض بزنید.

- ۱- اگر مسأله (*) بهینه‌ی چندگانه داشته باشد، بایستی بهینه‌ی موجود تبه‌گن باشد.
- ۲- اگر یک نقطه داخلی ناحیه شدنی بهینه (*) باشد در این صورت بایستی تمامی نقاط ناحیه شدنی بهینه باشد.

- ۳- اگر دستگاه $Ad = 0$ و $d \geq 0$ و $d \neq 0$ جواب داشته باشد، ناحیه محدود است و اگر جواب داشته باشد مسأله بهینه‌ی نامتناهی دارد.

- ۴- دستگاه معادلات $Ax = b$ ، $x \geq 0$ که در آن

$$\text{Rank}(A) = n - 1, \quad x \in R^n$$

و دستگاه دارای جواب است. مجموعه‌ی نقاط شدنی درست دو نقطه رأسی دارد.

- ۵- تعداد یال‌های مار بیک BFS همواره از بعد ناحیه شدنی بیشتر می‌باشد و در حالت تبه‌گنی باهم برابرند.

- ۶- اگر دستگاه $Ax = 0$ و $x \geq 0$ یک جواب غیرصفر داشته باشد، دستگاه $Ax = b$ ، $x \geq 0$ همواره شدنی است.

مراجع

- [1] D. Avis and V. Chvatal, "Notes on Bland's Pivoting Rule, "in Mathematical Programming Study 8, North-Holland, Amsterdam, July 1978, PP, 24-34.
- [2] E.M. L. Beale, "Cycling in the Dual Simplex Algorithm, "Naval Research Logistics Quarterly 2 (1955), 269-276.
- [3] R. G. Bland, "New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method, "Mathematics of Operations Research (May, 1977), 103-107.
- [4] R. Chandrasekharan, S. N. Kabadi, and K. G. Murty, "Some NP-Complete Programming, "Operations Research Letters 1, 3 (July 1982). 101-104.
- [5] A. Charnes, "Optimality and Degeneracy in Linear Programming", Econometrica 20, 2 (April 1952) 160-170.
- [6] W. H. Cunningham, "A Network Simplex Method", Mathematical Programming 11(1976), 105-116.
- [7] G. B. Dantzig, A. Orden, and P. Wolfe, "Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear Form Under Linear Inequality Constraints, " Pacific Journal of Mathematics 5 (1955), 183-195.
- [8] A. Gana, "Studies in the Complementarity problem, " PH. D. dissertation, Department of industrial and Operations Engineering, The University of Michigan, Ann Arbor, 1982.

-
- [9] A. J. Hoffman, "Cycling in the Simplex Algorithm, " National Bureau of Standards Report 2974, Washington, D. C. , December 1953.
- [10] K. T. Marshal and J. W. Suurballe, "A Note on Cycling in the Simplex Method," Naval Research Logistics Quarterly 16, 1 (March 1969), 121-137.
- [11] R. Saigl, "A Homotopy for Solving Large Sparse and Structured Fixed Point Problems, "Mathematics of Operations Research, to be Published.
- [12] P. Wolfe, "A Technique for Resolving Degeneracy in Linear Programming, " Journal of SLAM 11 (1963), 205-211.

فصل دوم

دوآلیتی در برنامه‌ریزی خطی^۱

هر برنامه‌ریزی خطی که حل می‌گردد، متناظر آن یک برنامه‌ریزی خطی دیگر هم‌زمان حل می‌شود. این برنامه‌ریزی خطی، در بعضی از خواص بسیار مهم صدق می‌نماید. آن را می‌توان برای به دست آوردن جواب برای مسأله‌ی اصلی بکار برد. متغیرهای این مسأله اطلاعات فوق‌العاده ارزشمندی در رابطه با جواب بهینه‌ی مسأله‌ی اصلی به دست می‌دهد.

۱-۲ فرموله نمودن مسأله‌ی دوآل^۲

متناظر هر مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی یک مسأله برنامه‌ریزی خطی دیگری وجود دارد که دوآل آن مسأله نامیده می‌شود. برنامه‌ریزی دوآل شامل خواص بسیار مهمی در رابطه با مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی اصلی دارد که در تمامی کاربردهای آن از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشد. دو صورت مهم از دوآلیتی (در تعریف آن) وجود دارد؛ فرم کانونی دوآلیتی و فرم استاندارد دوآلیتی. این دو فرم کاملاً معادل می‌باشند. این دو صورت در رابطه با صورت‌های کانونی و صورت‌های استاندارد مسأله برنامه‌ریزی خطی تعریف می‌شوند.

1) Duality in Linear Programming

2) Formulation of Dual problem

۲-۲ فرم کانونی دوآلیتی

مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را که به صورت کانونی می‌باشد در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
 P : \quad & \text{Min} \quad z(x) = cx \\
 & \text{s. t.} \quad Ax \geq b \\
 & \quad \quad \quad x \geq 0
 \end{aligned} \tag{۱-۲}$$

دوآل مسأله فوق چنین تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}
 D \quad & \text{Max} \quad W = wb \\
 & \quad \quad \quad wA \leq c \\
 & \quad \quad \quad w \geq 0
 \end{aligned} \tag{۲-۲}$$

توجه کنید که برای هر قید یک متغیر دوآل و برای هر قید دوآل یک متغیر پرایمال وجود دارد. در این رابطه با این موضوع بعداً بیشتر صحبت خواهیم نمود.

۱-۲-۲ مثال. مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی (پرایمال) زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
 P : \quad & \text{Min} \quad z = 6x_1 + 8x_2 \\
 & \text{s. t.} \quad 3x_1 + x_2 \geq 4 \\
 & \quad \quad \quad 5x_1 + 2x_2 \geq 7 \\
 & \quad \quad \quad x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

دوآل مسأله فوق چنین خواهد بود.

$$\begin{aligned}
 D : \quad & \text{Max} \quad w = 4w_1 + 7w_2 \\
 & \text{s. t.} \quad 3w_1 + 5w_2 \leq 6 \\
 & \quad \quad \quad w_1 + 2w_2 \leq 8 \\
 & \quad \quad \quad w_1, w_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

توصیه. این دو مسأله را به صورت ترسیمی حل نمائید. مقدار بهینه تابع مقصود آن دو را مقایسه کنید. این مطلب به شما در رابطه با مفاهیم بعدی دوآلیتی بینش عمیق خواهد داد. در تعریف فرم کانونی دوآلیتی بسیار مهم است که مسأله P را به صورت کانونی در بیاوریم. اگر مسأله‌ای از نوع می‌نیمم نمودن باشد بایستی تمامی قیود به صورت \geq و اگر از نوع ماکزیموم باشد تمامی قید به صورت \leq بایستی تبدیل شوند و تمامی متغیرها مقید به محدودیت نامنفی بودن باشند.

۳-۲ فرم استاندارد دوآلیتی^۱

تعریف معادل دیگری از دوآلیتی چنین می‌باشد. مسأله P را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
 P : \quad & \text{Min} \quad z = cx \\
 & \text{s. t.} \quad Ax = b \\
 & \quad \quad \quad x \geq 0
 \end{aligned} \tag{۳-۲}$$

دوآل آن چنین تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}
 D \quad & \text{Max} \quad W = wb \\
 & \quad \quad \quad wA \leq c \\
 & \quad \quad \quad w \text{ آزاد}
 \end{aligned} \tag{۴-۲}$$

مثال. ۲-۳-۲ مسأله‌ی پرایمال را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & 6x_1 + 8x_2 \\
 \text{s. t.} \quad & 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
 & 5x_1 + 2x_2 - x_4 = 7 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

1) Standard Form of Duality

دوآل این مسأله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 4w_1 + 7w_2 \\ \text{s. t. } \quad 3w_1 + 5w_2 &\leq 6 \\ w_1 + 2w_2 &\leq 8 \\ -w_1 &\leq 0 \\ -w_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

w_1 و w_2 آزاد هستند

با قبول یکی از تعاریف فوق ملاحظه می‌کنیم که دیگری نیز معتبر است. به عبارت دیگر، اگر یکی را به صورت تعریف اصلی قبول کنیم دیگری از آن حاصل می‌گردد. به عنوان مثال، فرض کنید که صورت استاندارد را به عنوان تعریف قبول نموده‌ایم. می‌خواهیم ثابت کنیم که صورت کانونی آن نتیجه می‌گردد.

$$\begin{aligned} P \quad \text{Min } z &= cx \\ \text{s. t. } \quad Ax - Ix_s &= b \\ x, x_s &\geq 0 \end{aligned}$$

با توجه به تعریف دوآل این مسأله چنین خواهد بود:

$$\begin{aligned} D \quad \text{Max } W &= wb \\ wA &\leq C \\ -wI &\leq 0 \\ w &\text{ آزاد} \end{aligned}$$

اما $-wI \leq 0$ به معنی $w \geq 0$ بنابراین مسأله به صورت کانونی خواهد بود.

۳-۳-۲ قضیه. دوآل دوآل پرایمال است.

مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = wb \\ \text{s. t.} \quad & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

با به‌کار بردن تبدیلات مناسب داریم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & (-b^t)w^t \\ \text{s. t.} \quad & (-A^t)w^t \geq (-c^t) \\ & w^t \geq 0 \end{aligned}$$

دوآل مسئله‌ی فوق‌الذکر چنین است:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x^t(-c^t) \\ \text{s. t.} \quad & x^t(-A^t) \leq (-b^t) \\ & x^t \geq 0 \end{aligned}$$

اما این مسئله همان مسئله:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

می‌باشد. این قضیه نشان می‌دهد که تعاریف را که ممکن است به صورت عکس به‌کار ببریم. لغت‌های «پرایمال» و «دوآل» در رابطه با مرجعی که انتخاب می‌کنیم نسبی می‌باشند. به عبارت دیگر در یک زوج مسائل برنامه‌ریزی به صورت فوق هر کدام را می‌توان پرایمال و دیگری را دوآل به حساب آورد.

۴-۲ صور مختلف دوآلیتی^۱

در عمل، بسیاری از مسائل برنامه‌ریزی خطی شامل قیدهایی از نوع کوچکتر یا مساوی، یا از نوع تساوی یا از نوع بزرگتر یا مساوی و همچنین متغیرهایی از نوع « \geq » یا « \leq » یا آزاد می‌باشند. در تئوری وجود حالت‌هایی به صورت‌های فوق هیچ مشکلی پیش نمی‌آورد، زیرا می‌توان با تبدیلات مناسب آن‌ها را به صورت‌های مورد نظر تبدیل نمود. خوشبختانه نیازی به چنین تبدیلاتی وجود ندارد و می‌توان با روشی که ذیلاً ذکر می‌کنیم که این روش‌ها مستقیماً با استفاده از تعریف نتیجه می‌گردد، دوآل مسئله را نوشت.

مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
 P: \quad \text{Min} \quad z &= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\
 \text{s. t.} \quad &A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \geq b_1 \\
 &A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 \leq b_2 \\
 &A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 = b_3
 \end{aligned}$$

و x_3 آزاد باشد. $x_1 \geq 0$ $x_2 \leq 0$

با تبدیلات زیر می‌توان مسئله‌ی فوق‌الذکر را به صورت کانونی تبدیل نمود. به جای $x_2 = -x'_2$ و $x_3 = x'_3 - x''_3$ ، قید دوم را در (-1) ضرب می‌کنیم و به جای قید سوم دو نامساوی قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad z &= c_1x_1 - c_2x'_2 + c_3x'_3 - c_3x''_3 \\
 \text{s. t.} \quad &A_{11}x_1 - A_{12}x'_2 + A_{13}x'_3 - A_{13}x''_3 \geq b_1 \\
 &-A_{21}x_1 + A_{22}x'_2 - A_{23}x'_3 + A_{23}x''_3 \geq -b_2 \\
 &A_{31}x_1 - A_{32}x'_2 + A_{33}x'_3 - A_{33}x''_3 \geq b_3 \\
 &-A_{31}x_1 + A_{32}x'_2 - A_{33}x'_3 + A_{33}x''_3 \geq -b_3 \\
 &x_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, x'_3 \geq 0, x''_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

1) Mixed Forms of Duality

متغیرهای دوآل را به w_1, w'_1, w''_1 و w_2 نشان می‌دهیم. دوآل مسأله فوق عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & w_1 b_1 \quad -w'_1 b_2 \quad +w_2 b_3 \quad -w''_1 b_3 \\ \text{s. t.} \quad & w_1 A_{11} \quad -w'_1 A_{12} \quad +w'_1 A_{21} \quad -w''_1 A_{21} \leq c_1 \\ & -w_1 A_{12} \quad +w'_1 A_{22} \quad -w'_1 A_{22} \quad +w''_1 A_{22} \leq -c_2 \\ & w_1 A_{13} \quad -w'_1 A_{23} \quad +w'_1 A_{23} \quad -w''_1 A_{23} \leq c_3 \\ & -w_1 A_{13} \quad +w'_1 A_{23} \quad -w'_1 A_{23} \quad +w''_1 A_{23} \leq -c_3 \\ & w_1 \geq 0, \quad w'_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0, \quad w''_1 \geq 0 \end{aligned}$$

با قرار دادن $w_2 = -w'_1$ و $w_3 = w'_1 - w''_1$ مسأله‌ی فوق‌الذکر به صورت زیر درمی‌آید که دوآل مسأله اصلی می‌باشد:

$$\begin{aligned} D : \quad \text{Max} \quad & W = w_1 b_1 + w_2 b_2 + w_3 b_3 \\ \text{s. t.} \quad & w_1 A_{11} + w_2 A_{21} + w_3 A_{31} \leq c_1 \\ & w_1 A_{12} + w_2 A_{22} + w_3 A_{32} \geq c_2 \\ & w_1 A_{13} + w_2 A_{23} + w_3 A_{33} = c_3 \\ & w_1 \geq 0 \quad w_2 \leq 0 \quad w_3 \text{ آزاد} \end{aligned}$$

در جمع‌بندی با استفاده از جدول زیر می‌توان مسأله به هر صورت که باشد دوآل آن را بدون تبدیل نوشت:

	مسأله از نوع می‌نیموم نمودن		مسأله از نوع ماکزیموم نمودن	
متغیرها	≥ 0	\longleftrightarrow	\leq	بندیها
	≤ 0	\longleftrightarrow	\geq	
	آزاد	\longleftrightarrow	$=$	
بندیها	\geq	\longleftrightarrow	≥ 0	متغیرها
	\leq	\longleftrightarrow	≤ 0	
	$=$	\longleftrightarrow	آزاد	

جدول (۱-۱)

۴-۴-۲ مثال. مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad z &= 8x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ \text{s. t.} \quad x_1 - 6x_2 + x_3 &\geq 2 \\ 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 &= -4 \\ x_1 &\geq 0 \quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \text{ آزاد} \end{aligned}$$

با به‌کار بردن روابط ذکر شده در جدول (۱-۱) دوآل مسأله‌ی فوق چنین خواهد بود.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad W &= 2w_1 - 4w_2 \\ w_1 + 5w_2 &\geq 8 \\ -6w_1 + 7w_2 &\leq 3 \\ w_1 - 2w_2 &= -2 \\ w_1 &\geq 0 \quad w_2 \text{ آزاد} \end{aligned}$$

۵-۴-۲ تمرین. روابط بین پرایمال و دوآل ذکر شده در بالا، برای صورت کانونی بود.

چنین روابطی را برای صورت استاندارد به‌دست آورید.

قبل از وارد شدن به‌صورت‌های مختلف بین روابط بین پرایمال و دوآل چند نمونه از

متغیرهای اقتصادی، مدیریتی، ... ذکر می‌نمائیم.

۶-۴-۲ مثال. یک مسأله‌ی حمل و نقل به‌صورت زیر در نظر بگیرید که از دو انبار W_1 ،

W_2 به سه مشتری R_1 و R_2 و R_3 طبق داده‌های زیر کالا ارسال می‌نماید.

مشتری	R_1	R_2	R_3	عرضه
W_1	۳	۴	۶	۲۰
W_2	۵	۵	۴	۲۵
تقاضا	۱۵	۲۰	۱۰	۴۵

مسأله‌ی حمل و نقل فوق‌الذکر به صورت زیر فرموله می‌گردد:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & ۳x_{۱۱} + ۴x_{۱۲} + ۶x_{۱۳} + ۵x_{۲۱} + ۵x_{۲۲} + ۴x_{۲۳} \\ \text{s. t.} & x_{۱۱} + x_{۱۲} + x_{۱۳} \geq ۲۰ \\ & x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳} \geq ۲۵ \\ & x_{۱۱} + x_{۲۱} \leq ۱۵ \\ & x_{۱۲} + x_{۲۲} \leq ۲۰ \\ & x_{۱۳} + x_{۲۳} \leq ۱۰ \end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3$$

(که در x_{ij} مقدار کالای ارسالی از انبار i به مشتری j می‌باشد)

برای آن‌که دوآل مسأله‌ی فوق را بنویسیم، قیدهای سوم و چهارم و پنجم را در عدد (-۱) ضرب می‌کنیم تا به صورت کانونی درآید و مسأله چنین خواهد بود.

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & Z = ۳x_{۱۱} + ۴x_{۱۲} + ۶x_{۱۳} + ۵x_{۲۱} + ۵x_{۲۲} + ۴x_{۲۳} \\ \text{s. t.} & x_{۱۱} + x_{۱۲} + x_{۱۳} \geq ۲۵ \\ & x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳} \geq ۲۰ \\ & -x_{۱۱} - x_{۲۱} \geq -۱۵ \\ & -x_{۱۲} - x_{۲۲} \geq -۲۰ \\ & -x_{۱۳} - x_{۲۳} \geq -۱۰ \end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3$$

دوآل مسأله چنین خواهد بود:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & W = ۲۵w_1 + ۲۰w_2 - ۱۵w_3 - ۲۰w_4 - ۱۰w_5 \\ \text{s. t.} & w_1 - w_3 \leq ۳ \\ & w_1 - w_4 \leq ۴ \\ & w_1 - w_5 \leq ۶ \\ P: & w_2 - w_3 \leq ۵ \\ & w_2 - w_4 \leq ۵ \\ & w_2 - w_5 \leq ۴ \end{array}$$

$$w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \geq 0$$

۲-۵ تفسیر اقتصادی مسأله ۱

در مثال ۲-۴-۳ هدف پیدا نمودن یک خط‌مشی جهت ارسال کالا از انبارهای W_1 و W_2 به مشتری‌های R_1 و R_2 و R_3 می‌باشیم که هزینه‌ی کل ارسال کالا می‌نیمم گردد. فردی در این میان ظاهر می‌گردد و این‌گونه پیشنهاد می‌نماید که حاضر است تمامی کالاهای انبار W_1 را از قرار هر واحدی w_1 و تمامی کالاهای انبار W_2 را از قرار هر واحدی w_2 خریداری نماید، و کالای خریداری شده را به مشتری اول از قرار هر واحدی w_3 و به مشتری دوم از قرار هر واحدی w_4 و به مشتری سوم از قرار هر واحدی w_5 بفروشد. فرد موردنظر با نشان دادن قیدهای دوآل، فروشندگان را متقاعد می‌نماید که سود حاصله از مشتریان از هزینه حمل و نقل کالا که قرار بود برای هر واحد از طرف مشتریان پرداخت گردد، اضافی نخواهد بود و از طرفی مقدار سود خودش $(10w_5 + 20w_4 + 15w_3) - (25w_2 + 20w_1)$ خواهد بود. خریدار سعی می‌نماید w ها را طوری مشخص نماید که سود دریافتی او ماکزیمم گردد، در عین حالی که رضایت مشتری را نیز جلب نموده است.

اتفاقی که می‌افتد آن است که:

الف. فروشندگان کالا، زحمت ارسال کالا و حل مسأله از گردنشان می‌افتد.

ب. خریدار کاری به دست آورده است که در قبال انجام آن پولی به دست می‌آورد.

۲-۵-۷ مثال. جهت تأمین سوخت مورد نیاز در یک کشور پالایشگاه‌های A ، B و C و D و

E فعالیت می‌کنند که قرار است روزانه سوخت مصرفی به شرحی که در جدول زیر داده شده تأمین نمایند. هزینه تأمین سوخت‌های موردنظر برای هر ساعت فعالیت نیز در جدول داده شده است.

	A	B	C	D	E	تقاضای روزانه
بشزین	۱۰	۸	۷	۶	۵	۷۰
گازوئیل	۸	۶	۵	۴	۴	۳۰
نفت سفید	۴	۳	۲	۲	۲	۲۰
هزینه هر ساعت فعالیت	۱۲	۱۰	۹	۸	۷	

(تقاضا برحسب میلیون لیتر می‌باشد و هزینه برحسب ۱۰۰۰ دلار می‌باشد.)
 اعداد داخل جدول مقدار سوخت تولید شده در هر ساعت می‌باشد. مثلاً در سطر اول و ستون اول؛ عدد ۱۰ نشان‌دهنده آن است که اگر پالایشگاه A یک ساعت فعالیت داشته باشد ۱۰ میلیون لیتر بنزین تولید می‌کند. (تمامی ارقام جدول اعم از تقاضا و تولید فرضی می‌باشند.)
 فرض کنیم:

$x_j =$ تعداد ساعات فعالیت پالایشگاه j باشد

$j = A, B, C, D, E$

مسأله‌ی فوق به صورت زیر فرموله می‌گردد:

$$\text{Min } z = ۱۲x_A + ۱۰x_B + ۹x_C + ۸x_D + ۷x_E$$

$$\text{s. t. } ۱۰x_A + ۸x_B + ۷x_C + ۶x_D + ۵x_E \geq ۷۰$$

$$۸x_A + ۶x_B + ۵x_C + ۴x_D + ۴x_E \geq ۳۰$$

$$۴x_A + ۳x_B + ۲x_C + ۲x_D + ۲x_E \geq ۲۰$$

$$x_A, x_B, x_C, x_D, x_E \geq ۰$$

دوآل مسأله‌ی فوق چنین خواهد بود:

$$\text{Max } W = ۷۰w_۱ + ۳۰w_۲ + ۲۰w_۳$$

$$\text{s. t. } ۱۰w_۱ + ۸w_۲ + ۴w_۳ \leq ۱۲$$

$$۸w_۱ + ۶w_۲ + ۳w_۳ \leq ۱۰$$

$$D: ۷w_۱ + ۵w_۲ + ۲w_۳ \leq ۹$$

$$۶w_۱ + ۴w_۲ + ۲w_۳ \leq ۸$$

$$۵w_۱ + ۴w_۲ + ۲w_۳ \leq ۷$$

$$w_۱, w_۲, w_۳ \geq ۰$$

در مثال ۲-۴-۳ هدف می‌نیمم نمودن هزینه تولید سوخت‌های موردنظر می‌باشد که عبارتند از ۷۰ میلیون لیتر بنزین، ۳۰ میلیون لیتر گازوئیل و ۷۰ میلیون لیتر نفت سفید. از طرف یک کمپانی بزرگ نفتی پیشنهادی به صورت زیر دریافت می‌شود که در حقیقت بیان‌کننده‌ی مسأله‌ی D است.

پیشنهاد به صورت ذیل است. شما پالایشگاه‌ها را کلاً تعطیل نمائید. ما سوخت مصرفی موردنیاز شما را؛ بنزین به قیمت w_1 و برای گازوئیل به قیمت w_2 و برای نفت سفید به قیمت w_3 تأمین می‌کنیم. پیشنهاددهنده با ارائه قیدهای دوآل، تولیدکننده را قانع می‌نماید که پول پرداختی جهت خرید سوخت از هزینه‌ی تولید آن بیشتر نیست. دو اتفاق مهم رخ می‌دهد.

الف. تولیدکننده با خیال راحت، پالایشگاه‌ها را تعطیل و سوخت موردنیاز خود را بدون هیچ دردسر و با پولی که بیشتر از هزینه تولید نمی‌باشد دریافت می‌کند.

ب. فروشنده یا پیشنهاددهنده مبلغی معادل

$$70w_1 + 30w_2 + 20w_3$$

از فروش سوخت دریافت می‌نماید.

گرچه مسأله‌ی فوق یک مسأله‌ی فرضی است ولی متأسفانه در جهان سوم این امر اتفاق می‌افتد. پس از تعطیل کارگاه‌های تولید، وقتی فروشنده مطمئن از نیاز خریدار شد، به هر قیمتی که دلش بخواهد جنس خود را می‌فروشد و خریدار چون ابزار تولید که مهم‌ترین آن‌ها کارگران و نیروهای متخصص باشد از دست داده است و مهم‌تر از همه وابستگی است که پیش آمده و بیکار شدن تعداد زیادی از نیروها است که مشکل اجتماعی ایجاد می‌نمایند.

فعلاً در این جا به ذکر همین دو مثال بسنده می‌کنیم و پس از بررسی مطالب ذیل تفسیر اقتصادی بیشتری که حالت کلی‌تری نیز دارد را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۲-۶ رابطه‌ی بین پرایمال-دوآل^۱

تعریفی را که برای دوآل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی آوردیم، منجر به نتایج و روابط بین پرایمال و دوآل می‌گردد که ذیلاً آن‌ها را بررسی می‌نمائیم.

1) Primal Dual Relationship

۸-۶-۲ رابطه بین مقادیر تابع مقصود پرایمال و دوآل.

مسأله‌ی P را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$P : \quad \text{Min} \quad z = cx$$

$$\text{s. t.} \quad Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

که دوآل آن یعنی مسأله‌ی D چنین خواهد بود:

$$D : \quad W = wb$$

$$wA \leq c$$

$$w \geq 0$$

فرض کنید:

$$S_P = \{x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$$

$$S_D = \{w \mid wA \leq c, w \geq 0\} \quad (5-2)$$

۹-۶-۲ قضیه. به ازاء هر $x \in S_P$ و به ازاء هر $w \in S_D$ داریم:

$$cx \geq wb$$

از این قضیه تحت عنوان، قضیه‌ی ضعیف دوآلیتی^۱ یاد می‌گردد.

برهان. فرض کنیم: $x^\circ \in S_P$ و $w^\circ \in S_D$ داریم:

$$Ax^\circ \geq b, \quad x^\circ \geq 0 \quad (a)$$

و

$$w^\circ A \leq c, \quad w^\circ \geq 0 \quad (b)$$

1) Weak Duality Theorem

(a) را در w° و (b) را در x° ضرب می‌کنیم، حاصل می‌شود:

$$w^\circ Ax^\circ \geq w^\circ b \quad (a')$$

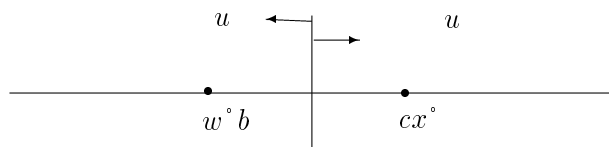
$$w^\circ Ax^\circ \leq cx^\circ \quad (b')$$

از (a') و (b') نتیجه می‌شود:

$$cx^\circ \geq w^\circ b \quad (۶-۲)$$

و حکم ثابت است.

در نمودار زیر این مطلب اراقه شده است:



شکل (۱-۲)

قضیه فوق به ما می‌گوید که به‌ازاء هر $cx, x \in S_P$ یک کران بالا برای مجموعه‌ی زیر است:

$$H_D = \{wb \mid w \in S_D\}$$

هم‌چنین برای $wb, w \in S_D$ یک کران پائین برای مجموعه‌ی H_P که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، می‌باشد:

$$H_P = \{cx \mid x \in S_P\}$$

از قضیه ضعیف دوآلیتی نتایج بسیار مهمی عاید می‌گردد که ذیلاً درج می‌گردد.

نتیجه‌ی اول. اگر $x_0 \in S_P$ و $w_0 \in S_D$ و $w_0 b = cx_0$ آن‌گاه x_0 بهینه‌ی پرایمال و w_0 بهینه‌ی دوآل است.

برهان. فرض کنیم x عضو دلخواهی از S_P باشد. طبق قضیه‌ی فوق:

$$cx \geq w^\circ b$$

اما $w^\circ b = cx^\circ$ پس

$$\forall x (x \in S_P \implies cx^\circ \leq cx)$$

یعنی x° بهینه مسأله‌ی P است.

عیناً می‌توان ثابت کرد که w° بهینه مسأله‌ی D است. این مطلب در مسائل بهینه‌سازی کاربرد بسیار زیادی دارد.

نتیجه‌ی دوم. اگر مسأله‌ی P بهینه نامتناهی داشته باشد D نشدنی است و همین‌طور اگر D بهینه نامتناهی داشته باشد P نشدنی است.

برهان. فرض کنید P بهینه نامتناهی داشته باشد و D شدنی باشد در این صورت اگر $w^\circ \in S_D$ بایستی:

$$w^\circ b \leq -\infty$$

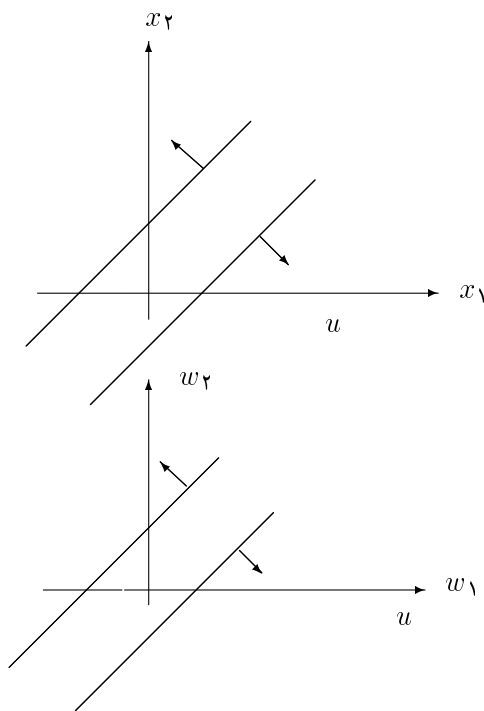
که این امر امکان ندارد. (چرا؟) عیناً مورد دیگر قابل اثبات است.

سوالاتی که در اینجا پیش می‌آید آن است که آیا نشدنی بودن یکی از دو مسائل مستلزم نامحدود بودن (بهینه نامتناهی داشتن) دیگری است؟ جواب آن است که چنین ضرورتی وجود ندارد. در مثال زیر این مطلب ارائه شده است.

۱۰-۶-۲ مثال. مسائل پرایمال و دوآل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} P : \text{Min} \quad Z &= -x_1 - x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D : \text{Max} \quad W &= w_1 + w_2 \\ \text{s. t.} \quad & w_1 - w_2 \leq -1 \\ & -w_1 + w_2 \leq -1 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$



شکل (۲-۲)

با رسم قیدهای تعریف‌کننده ناحیه شدنی هر دو مسأله ملاحظه می‌گردد که:

$$S_P = \phi$$

$$S_D = \phi$$

نتیجه‌ی سوم. اگر $S_P \neq \phi$ و $S_D \neq \phi$ آن‌گاه هر دو مسأله‌ی بهینه‌ی متناهی دارند.

برهان. چون هر LP یا شدنی یا نشدنی و اگر شدنی باشد یا نامحدود است یا بهینه‌ی متناهی دارد. چون $S_D \neq \phi$ پس P هم شدنی و هم کران دار است، یعنی بهینه‌ی متناهی دارد. عین مطلب را می‌توان در رابطه با D بیان نمود.

۷-۲ قضیه قوی دوآلیتی^۱

اگر P و D یعنی مسأله‌ی پرایمال و دوآل هر دو شدنی باشند، هر دو بهینه‌ی متناهی دارند و مقدار بهینه‌ی تابع مقصود هر دو مساوی است به عبارت دیگر اگر x^* بهینه‌ی P و w^* بهینه‌ی D باشند، داریم:

$$w^*b = cx^*$$

برهان. در نتیجه‌ی سوم دیدیم که تحت شرایط قضیه هر دو مسأله بهینه‌ی متناهی دارند. حال می‌خواهیم ثابت کنیم که مقدار بهینه‌ی P و D مساوی هستند. فرض کنید x^* بهینه‌ی مسأله‌ی P است. پس اگر B پایه متناظر آن باشد، (توجه کنید که ثابت نمودیم اگر مسأله بهینه‌ی متناهی داشته باشد، همواره یک بهینه BFS دارد) داریم:

$$Ax^* \geq b$$

$$x^* \geq 0$$

و به‌ازاء هر j :

$$z_j - c_j = w^*a_j - c_j \leq 0 \quad (*)$$

که در آن $w^* = C_B B^{-1}$ و C_B بردار ضرایب متغیرهای اساسی است.

از $(*)$ داریم:

$$w^*A \leq c$$

پس w^* در قیدهای مسأله‌ی دوآل صدق می‌کند. حال ثابت می‌کنیم $w^* \geq 0$. در حل مسأله P صورت استاندارد آن با روش سیمپلکس ملحوظ شده است یعنی صورت:

$$\text{Min } z = cx + 0x_s$$

$$\text{s. t. } Ax - Ix_s = b$$

در مسأله‌ی فوق با استفاده از $(*)$ داریم (برای j ها متعلق به x_s)

$$wa_j - c_j = w(-e_j) - 0 \leq 0 \quad j \text{ به‌ازاء هر } j$$

1) Strong Duality Theorem

یعنی:

$$-wI \leq 0$$

پس:

$$w \geq 0$$

و این بدان معنی است که $w^* = c_B B^{-1} b$ یک جواب شدنی دوآل می باشد. از طرفی داریم:

$$Z^* = (c_B, c_N) \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} = c_B B^{-1} b = w^* b = W^*$$

و حکم ثابت است.

برای مسأله ی:

$$\text{Min } z(x) = cx$$

$$P : Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

مسأله ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } W = wb$$

$$\text{s. t. } wA \leq 0 \quad (7-2)$$

$$w \geq 0$$

مسأله ۷-۲ فرم متجانس دوآل^۱ گویند و آن را به HD نشان می دهند. توجه کنید که دوآل مسأله HD همان ناحیه شدنی P را دارد. بنابراین اگر HD نامحدود باشد، آنگاه طبق نتایج فوق الذکر P نشدنی است. بالعکس اگر P نشدنی باشد، در این صورت HD بایستی نامحدود باشد (زیرا HD شدنی است $w = 0$ در قیدهای HD صدق می کند)، چه در غیر این صورت HD بایستی جواب بهینه داشته باشد (طبق قضیه دوآلیتی در این صورت بایستی P جواب بهینه داشته باشد یعنی شدنی باشد، که این تناقض است پس نتیجه ی مهم زیر عاید می گردد.

1) Homogenous Form of Dual

نتیجه. مسأله‌ی پرایمال نشدنی است اگر و فقط اگر فرم متجانس دوآل مسأله نامحدود باشد و بالعکس.

با به‌کار بردن نتایج فوق‌الذکر، دو قضیه‌ی بسیار مهم و اساسی زیر را در دوآلیتی به‌دست می‌آوریم. این دو قضیه به ما اجازه می‌دهد که مسأله دوآل را در جهت حل مسأله پرایمال به‌کار ببریم و همچنین الگوریتمی برای حل هر دو مسأله به‌دست آوریم.

۱۱-۷-۲ قضیه اول. با ملحوظ داشتن مسأله پرایمال و دوآل درست یکی از عبارات ذیل صادق می‌باشد:

الف. مسأله‌ی پرایمال دارای جواب بهینه x^* و مسأله‌ی دوآل دارای جواب بهینه w^* بوده و $cx^* = w^*b$.

ب. اگر یکی از مسائل پرایمال یا دوآل نامحدود باشد دیگری دارای جواب شدنی نمی‌باشد.

ج. هر دو مسأله نشدنی هستند.

از این قضیه ملاحظه می‌شود که دوآلیتی کاملاً متقارن نمی‌باشد. بهترین چیزی که می‌توان گفت آن است که:

$$\begin{aligned} P \text{ دارای بهینه است} &\Leftrightarrow D \text{ دارای بهینه است} \\ (D)P \text{ نامحدود است} &\Leftrightarrow (P)D \text{ نشدنی است} \\ (D)P \text{ نشدنی است} &\Leftrightarrow (P)D \text{ نامحدود یا نشدنی است} \\ (D)P \text{ نشدنی است} &\Leftrightarrow (P)D \text{ نامحدود در فرم همگن است} \end{aligned}$$

در بالا بهینه به معنی بهینه متناهی است و نامحدود به معنی داشتن مقدار نامحدود برای تابع مقصود می‌باشد.

۱۲-۷-۲ قضیه‌ی دوم. قضیه‌ی مکمل زائد^۱ مجدداً مسأله‌ی (P) و (D) را

به صورت زیر در نظر بگیرید :

$$P : \quad \text{Min} \quad z = cx$$

$$\text{s. t.} \quad Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

$$D : \quad \text{Max} \quad W = wb$$

$$wA \leq c$$

$$w \geq 0$$

با اضافه نمودن متغیرهای کمکی مسائل فوق‌الذکر را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت:

$$\text{Min} \quad z = cx$$

$$\text{s. t.} \quad Ax - u = b \quad (۸-۲)$$

$$x, u \geq 0$$

$$\text{Max} \quad W = wb$$

$$\text{s. t.} \quad wA + v = c \quad (۹-۲)$$

$$w, v \geq 0$$

فرض کنید (x^*, u^*) جواب بهینه ۸-۲ و (w^*, v^*) جواب بهینه ۹-۲ باشند داریم:

$$Ax^* - u^* = b$$

و

$$w^*A + v^* = c$$

1) Complementary slackness Theorem

اگر دستگاه اول را چپ در w^* و دوم را از راست در x^* ضرب کنیم و حاصل اولی را از دومی کم کنیم داریم:

$$\begin{array}{r} (-1) \quad w^*Ax^* - w^*u^* = w^*b \\ w^*Ax^* + v^*x^* = cx^* \\ \hline w^*u^* + v^*x^* = cx^* - w^*b = 0 \end{array}$$

(قبلاً ثابت نمودیم که $w^*b = cx^*$) پس:

$$w^*u^* + v^*x^* = 0$$

با توجه به این‌که $0 \leq w^*u^*$ و $0 \leq v^*x^*$ پس:

$$w^*u^* = 0 \Rightarrow w_i^*u_i^* = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$v^*x^* = 0 \Rightarrow v_j^*x_j^* = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

اگر قرار دهیم ($j = 1, \dots, n$) $v_j = w_{m+j}$ و ($i = 1, \dots, m$) $v_i = x_{n+i}$ داریم:

$$\begin{array}{cccc} x_1, \dots, x_n & x_{n+1}, \dots, x_{n+m} & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ w_{m+1}, \dots, w_{m+n} & w_1, \dots, w_m & & \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (10-2)$$

یعنی:

$$x_j w_{m+j} = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$w_i x_{n+i} = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (11-2)$$

از ۱۱-۲ نتیجه می‌شود که اگر متغیری در یکی از مسائل مثبت باشد، قید متناظر آن در مسأله‌ی دیگری فعال می‌باشد (تنگ می‌باشد) و اگر قید در جواب بهینه تنگ (نافذ) نباشد، متغیر متناظر آن در مسائل دیگر صفر می‌باشد.

۱۱-۲ را می‌توان به صورت زیر نوشت. (چرا؟)

$$w^*(Ax^* - b) = 0$$

$$(c - w^*b)x^* = 0 \quad (12-2)$$

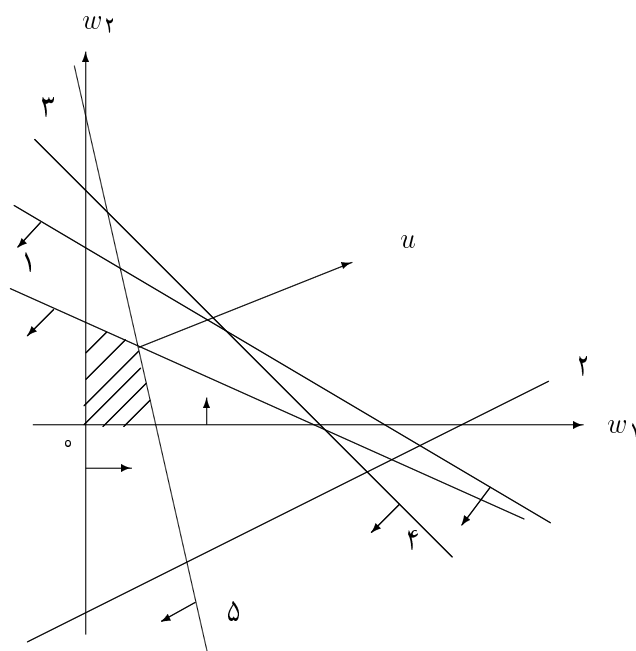
که روابط ۱۲-۲ بیان مطلب فوق‌الذکر می‌باشد.

مطلب فوق متغیرهای دو مسأله را به هم مربوط می‌سازد، متغیر x_j با w_{m+j} ($j = 1, \dots, n$) و w_i ($i = 1, \dots, m$) را زوج‌های مکمل می‌نامند.

مثال ۱۳-۷-۲ مسائل زیر را در نظر بگیرید (در حقیقت P پرایمال و دوآل D است) با به کار بردن قضیه‌ی مکمل زائدبا حل مسأله‌ی دوآل، جواب بهینه‌ی پرایمال را به دست آورید.

$$\begin{aligned}
 P : \quad & \text{Min} \quad Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\
 & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D : \quad & \text{Max} \quad W = 4w_1 + 3w_2 \\
 \text{s. t.} \quad & w_1 + 2w_2 \leq 2 \\
 & w_1 - 2w_2 \leq 3 \\
 & 2w_1 + 3w_2 \leq 5 \\
 & w_1 + w_2 \leq 2 \\
 & 3w_1 + w_2 \leq 3 \\
 & w_1, w_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



شکل (۲-۳) حل مسأله‌ی دوآل

با توجه به این‌که دوآل دارای دو متغیر می‌باشد، این مسأله را به صورت ترسیمی حل می‌کنیم. حل ترسیمی مسأله در شکل (۲-۳) نشان داده شده است. جواب بهینه مسأله عبارت است از $w_1^* = \frac{4}{5}$ و $w_2^* = \frac{3}{5}$ و مقدار تابع مقصود برابر با $w^* = 5$ خواهد بود، با توجه به این‌که $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ تا از قیدها یعنی قید (۲)، (۳) و (۴) از نقطه بهینه نمی‌گذرند پس $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ چون $0 < w_1^* \text{ و } w_2^* < 0$ پس قید اول و دوم بایستی تنگ باشد یعنی:

$$\begin{cases} x_1^* + 3x_5^* = 4 \\ 2x_1^* + x_5^* = 3 \end{cases}$$

که از این دستگاه حاصل می‌گردد $x_1^* = 1$ و $x_5^* = 1$ و همان‌طوری‌که انتظار می‌رود $Z^* = 5 = W^*$. بنابراین با استفاده از جواب بهینه‌ی دوآل، جواب پرایمال حاصل گردید.

۱۴-۷-۲ اصل راهنما^۱ فرض کنید که راهنمای شما، از شما می‌خواهد که مسأله‌ی

D و P را حل نمائید. شما می‌توانید، مسائل را با دست یا کامپیوتر حل کنید و هر الگوریتمی را

1) The Supervisor Principle

که مایل باشید برای حل مسائل به‌کار برید، حتی ممکن است، جواب را حدس بزنید. راهنمای آدم بسیار شکاک می‌باشد و وقتی جواب‌ها x^* برای P و w^* برای D به ایشان نشان می‌دهید و ادعا می‌کنید که به ترتیب جواب‌های بهینه پرایمال و دوآل می‌باشند، او ادعای شما را قبول نمی‌کند مگر این‌که، خود شخصاً مطلب را بررسی نماید. آن‌چه که راهنما باید انجام دهد عبارت است از این‌که، آیا x^* شدنی P و w^* شدنی D و $cx^* = w^*b$ یا نه؟ اگر این سه شرط برقرار باشد، قضیه ضعیف دوآلیتی تضمین می‌کند که x^* واقعاً بهینه‌ی P و w^* در حقیقت بهینه‌ی D می‌باشد. این مطلب تحت عنوان اصل راهنما برای زوج پرایمال و دوآل P نامیده می‌شود. اصل راهنما برای مسائل بهینه‌سازی، سریع‌ترین روش برای چک نمودن آن است که آیا جواب داده شده بهینه می‌باشد یا بهینه نمی‌باشد. قضیه ضعیف دوآلیتی یک اصل راهنمای بسیار مناسب برای زوج پرایمال - دوآل مسائل برنامه‌ریزی خطی فراهم می‌نماید. در مقایسه‌ی این مطلب با وضعیت مسائل برنامه‌ریزی صحیح و بهینه‌سازی غیر محدب که نمی‌توان شرایط بهینگی خوبی ارائه داد تا بر مبنای آن اصل راهنمای مناسب جهت چک نمودن بهینگی به دست آورد. ملاحظه می‌گردد که یکی از خواص مهم مسأله برنامه‌ریزی خطی، وجود اصل راهنمای سریع و بسیار ساده می‌باشد که برای زوج پرایمال - دوآل آن ارائه گردید ولی متأسفانه برای بسیاری از مسائل بهینه‌سازی رسیدن به چنین ابزاری ممکن نمی‌باشد.

۸-۲ دوآل شدن یک پایه^۱

مسأله LP که با روش سیمپلکس حل می‌گردد، به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z(x) = cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (۱۳-۲)$$

(در صورت استاندارد مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی) که در آن A ماتریسی است از مرتبه‌ی $m \times n$ و $\text{rank}(A) = m$. فرض کنید B پایه برای مسأله‌ی فوق بوده و بردار متغیر اساسی

1) Dual Feasibility of a Basic

متناظر آن x_B و c_B ضرائب x_B در تابع مقصود باشد. با توجه به آن چه گذشت $w = c_B B^{-1}$ ،
جواب دوآل متناظر آن می‌باشد. مسأله‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\text{Min } z(x) = c_B x_B + c_N x_N$$

$$P : \quad Bx_B + Nx_N = b$$

$$x_B, x_N \geq 0$$

$$\text{Max } W = wb$$

$$D : \quad wb \leq c_B$$

$$wN \leq c_N$$

w آزاد

جواب اساسی ۱۳-۲ که متناظر B می‌باشد از حل دستگاه زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{cases} x_N = 0 \\ Bx_B = b \end{cases}$$

و پایه پرایمال شدنی است اگر فقط اگر جواب دستگاه فوق در شرط $x_B = B^{-1}b \geq 0$ صدق نماید و جواب دوآل متناظر پایه B از حل دستگاه:

$$wB = c_B \quad (۱۴-۲)$$

عاید می‌گردد. جواب دوآل دستگاه ۱۴-۲ ممکن است شدنی نباشد، مگر این‌که این جواب در قیدهای مسأله‌ی دوآل صدق نماید. این جواب دوآل شدنی و B پایه شدنی دوآل است اگر

$$wN \leq c_N$$

از این رو، B یک پایه شدنی است اگر $w = c_B B^{-1}$ و این جواب در قیدهای $wA \leq c$ صدق کند. یعنی:

$$[c - (c_B B^{-1})A] \geq 0$$

با توجه به این که $\bar{c} = c - (c_B B^{-1})A$ بردار ضرایب نسبی در این Lp است (نسبت به پایه B). بنابراین یک پایه برای Lp ۱۳-۲ دوآل شدنی است اگر فقط اگر بردار ضرایب نسبی آن نامنفی باشد. و این همان شرط بهینگی در سیمپلکس پرایمال است توجه نمائید روش سیمپلکسی که تا به حال یعنی در فصول گذشته در رابطه با آن صحبت نمودیم به آن روش سیمپلکس پرایمال گویند. روش سیمپلکس دوآل در همین فصل مورد بحث قرار خواهد گرفت. بنابراین پایه‌ای مانند B برای مسأله‌ی ۱۳-۲ یک پایه‌ی بهینه و x_B بردار اساسی متناظر با آن بردار اساسی بهینه است اگر فقط اگر آن‌ها هم پرایمال و هم دوآل شدنی باشند.

روش سیمپلکس پرایمال از یک پایه پرایمال شدنی شروع می‌نماید و جلو می‌رود تا در شرط دوآل شدنی بودن نیز صدق نماید (در صورت داشتن بهینه متناهی). بنابراین تمامی پایه‌های جدول سیمپلکس جز پایه متناظر جدول نهائی دوآل شدنی نمی‌باشند. در حقیقت وقتی یک پایه دوآل شدنی در روش سیمپلکس پرایمال به دست آمد، کار خاتمه می‌یابد.

۱۵-۸-۲ تفسیر اقتصادی بیشتری از مسأله‌ی دوآل.

مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی دوآل آن را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
 P : \quad & \text{Min} \quad Z = cx \\
 & \text{s. t.} \quad Ax \geq b \\
 & \quad \quad \quad x \geq 0
 \end{aligned} \tag{۱۵-۲}$$

$$\begin{aligned}
 D : \quad & \text{Max} \quad W = wb \\
 & \text{s. t.} \quad wA \leq c \\
 & \quad \quad \quad w \geq 0
 \end{aligned} \tag{۱۶-۲}$$

فرض کنید B یک پایه‌ی بهینه‌ی برای مسأله‌ی پرایمال بوده و c_B بردار قیمت متناظر آن باشد. فرض کنید BFS متناظر B ، یعنی x^* غیرته‌گن است. اگر R مجموعه اندیس متغیرهای

غیراساسی باشد) یعنی $(R \subseteq \{1, \dots, m+n\})$ داریم:

$$z = C_B B^{-1} b - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j = w^* b - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j \quad (17-2)$$

اگر b_i یعنی مقدار سمت راست i امین قید را قدری تغییر دهیم (مثبت یا منفی) به طوری که جواب حاصل شدنی باقی بماند، جواب به دست آمده بهینه است (چرا؟) و اگر z^* مقدار بهینه‌ی تابع مقصود باشد و B_i^{-1} ستون i ام B^{-1} ، داریم:

$$\frac{\partial Z^*}{\partial b_i} = w_i^* = c_B B_i^{-1} \quad (18-2)$$

بنابراین w_i^* میزان تغییرات مقدار بهینه تابع مقصود به ازاء یک واحد از افزایش b_i می‌باشد (یعنی وقتی b_i تبدیل به $b_i + 1$ می‌شود تابع مقصود با اندازه‌ی w_i^* تغییر می‌کند. با فرض این‌که تمامی متغیرهای غیراساسی در سطح صفر باقی می‌مانند و بدون توجه به این‌که جواب شدنی باقی ماند یا نه). چون $w_i^* \geq 0$ پس z^* افزایش می‌یابد یا ثابت باقی می‌ماند و اگر b_i تبدیل به $b_i - 1$ شود z^* کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

توجه. کاهش یا افزایش z^* را به صورت زیر نیز می‌توان استدلال نمود:

$$z_{\text{جدید}}^* = w^* b_{\text{جدید}} = w^* \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \pm 1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = w^* \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \pm w^* \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$z_{\text{جدید}}^* = z_{\text{قدیم}}^* \neq w_i^*$$

از نظر اقتصادی می‌توان w^* را به عنوان قیمت سایه^۱ برای بردار منابع سمت راست ملحوظ داشت. برای توضیح، اگر i امین قید نمایش تقاضا حداقل به اندازه b_i از محصول i باشد و cx نشان دهنده هزینه کلی تولید، در این صورت w_i افزایش هزینه‌ی تولید یک واحد اضافی از محصول i می‌باشد. به عبارت دقیق‌تر w_i منصفانه‌ترین بهایی^۲ است که برای تولید واحد

1) Shadow Price 2) Fair Price

اضافه‌ای از محصول i پرداخت می‌گردد.

در حالت کلی در نظر بگیرید که منابعی مانند b_1, \dots, b_m در اختیار داریم و می‌خواهیم محصولاتی مانند $1, 2, \dots, n$ تولید کنیم که سود حاصل از تولید یک واحد از محصول j ام برابر با c_j می‌باشد. به چه صورت بایستی محصولات تولید گردد که سود کلی ماکزیمم شود، با فرض این‌که a_{ij} ($j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m$) مقداری از منبع i ام می‌باشد که در تولید یک واحد از محصول j ام مصرف می‌گردد. مسأله را می‌توان به صورت زیر فرموله نمود:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = \sum c_j x_j \\ \text{s. t.} \quad & \sum a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \end{aligned} \quad (**)$$

(x_j سطح تولید محصول j ام می‌باشد.)

پیشنهادی به صورت زیر ارائه می‌گردد. منابع b_1, \dots, b_m شما را به ترتیب با قیمت هر واحد w_1, \dots, w_m خریداریم. شما به جای فروش محصولات مواد اولیه منابع را به ما بفروشید، ما تضمین می‌کنیم که پول دریافتی شما بابت فروش منابع از سود تولید محصول j ام شما کمتر نخواهد بود به عبارت دیگر پیشنهاد به این صورت است:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m w_i a_{ij} &\geq c_j \quad j = 1, \dots, n \\ w_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (*)$$

در عین حال پیشنهاددهنده به دنبال یافتن w هایی است که پول پرداختی‌اش با در نظر گرفتن قیدهای (*) کمترین شود. به عبارت دیگر دنبال حل مسأله زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & W = \sum_{i=1}^m w_i b_i \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \geq c_j & j = 1, \dots, n \\ w_i \geq 0 & i = 1, \dots, m \end{cases} \end{aligned}$$

که این مسأله دوآل مسأله‌ی (**) می‌باشد.

مانند سابق، فرض کنید w_i نشان دهنده‌ی قیمت سایه باشد. قیمت سایه، در حقیقت قیمت منصفانه منابع موجود می‌باشد در این جا به یک نکته بسیار مهم تفسیر اقتصادی قیمت‌های سایه اشاره می‌نمائیم و آن این است که اگر تمامی منبع i را در جواب بهینه نتوان برای تولید به‌کار برد، در حقیقت قید متناظر آن در نقطه بهینه تنگ نخواهد بود و قیمت سایه متناظر آن صفر خواهد بود، به عبارت دیگر هر نوع افزایش در این منبع عایدی برای تولیدکننده نخواهد داشت. (چند مثال در این مورد بزنید)

۹-۲ قیمت‌های سایه تحت تبه‌گنی^۱

قبل از شروع بحث مطالبی را که مورد نیاز این بحث می‌باشد می‌آوریم. درک عمیق و تسلط بر نحوه استدلال مطالب اکیداً توصیه می‌گردد. یادآور می‌شویم که مطالب نه تنها در این جا بلکه در بسیاری از زمینه‌های بهینه‌سازی کاربرد دارد.

۱۶-۹-۲ تعریف. تابع آفین تابعی است مانند f :

$$f : R^n \longrightarrow R$$

که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = c^0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j = c^0 + cx$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد که تابع آفین هم محدب است و هم مقعر (ثابت کنید). فرض کنیم:

$$f_i(x) = c^i + \sum_{j=1}^n c_j^i x_j \quad (i = 1, \dots, k)$$

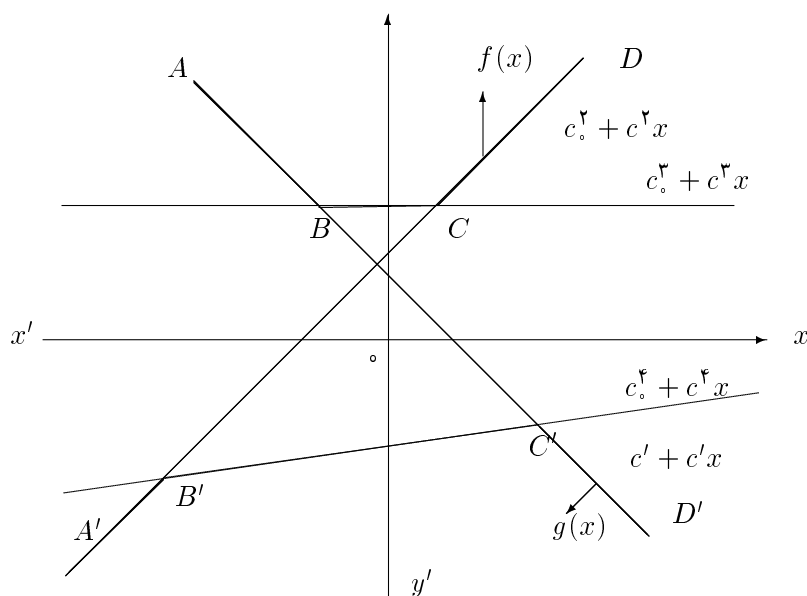
1) Shadow Price Under Degeneracy 2) Pointwise Maximum

k تابع آفینی باشد و $f_i : S \rightarrow R$ و S محدب باشد تابع نقطه‌ای ماکزیمم^۲ و تابع نقطه‌ای می‌نیمم^۱ به صورت زیر تعریف می‌شود به ازاء هر $x \in S$:

$$f(x) = \text{Max}_{1 \leq i \leq k} (f_i(x))$$

$$g(x) = \text{Min}_{1 \leq i \leq k} (f_i(x))$$

تابع نقطه‌ای ماکزیمم را مورد بحث قرار می‌دهیم. عین مطالب بررسی شده با مختصری تغییرات در رابطه با تابع نقطه‌ای می‌نیمم را می‌توان بررسی نمود قبل از بیان کلی خواص f و g ذیلاً مثالی در جهت روشن شدن مطلب ارائه می‌گردد.



شکل (۲-۴)

شکل ۲-۵ تابع $f(x)$ یعنی نقطه‌ای ماکزیمم در بالای محور به وسیله خط AB و پاره خط BC و نیم خط CD و تابع $g(x)$ یعنی نقطه‌ای می‌نیمم به وسیله خط $A'B'$ پاره خط $B'C'$ و نیم خط $C'D'$ نشان داده شده است. همان طوری که از این شکل پیداست $f(x)$ تابعی است محدب و $g(x)$ تابعی است مقعر که این مطلب را در حالت کلی اثبات خواهیم نمود. هر دو تابع قطعه قطعه خطی^۲ می‌باشند. (البته این زمانی صحیح است که

1) Pointwise Minimum 2) Piecewise Linear

f_i ها آفینی باشند).

۱۷-۹-۲ قضیه. تابع $f(x)$ یعنی نقطه‌ای ماکزیمم تابعی است محدب.

برهان. باید ثابت کنیم به‌ازاء هر x_1 و x_2 از S و هر $\lambda \in (0, 1)$ داریم:

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

قرار می‌دهیم $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = x$ چون S محدب است پس $x \in S$ در نتیجه:

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq k} (f_i(x)) = \max_{1 \leq i \leq k} [c_i^l + c_i^h x]$$

فرض کنیم ماکزیمم فوق در اندیسی مانند h اتفاق می‌افتد. پس:

$$f(x) = c_o^h + c^h x$$

با همین استدلال داریم:

$$f(x_1) = c_o^l + c^l x_1 \geq c_o^h + c^h x_1 \quad (\text{چرا؟}) \quad (a)$$

$$f(x_2) = c_o^s + c^s x_2 \geq c_o^h + c^h x_2 \quad (\text{چرا؟}) \quad (b)$$

طرفین (a) و (b) را به‌ترتیب در λ و $(1 - \lambda)$ ضرب نموده و با هم جمع می‌کنیم داریم:

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq \lambda(c_o^h + c^h x_1) + (1 - \lambda)(c_o^h + c^h x_2)$$

یا

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq c_o^h + c^h x = f(x)$$

یعنی:

$$f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

حکم ثابت است. عیناً می‌توان ثابت کرد که $g(x)$ تابعی است مقعر. (ثابت کنید)

۲-۹-۱۸ قضیه. تابع $f(x)$ یعنی نقطه ای ماکزیمم، تابعی است قطعه قطعه خطی. برهان. برای اثبات این که یک تابع قطعه قطعه خطی است. باید ثابت کنیم که اگر S یعنی حوزه تعریف تابع به صورت زیر افراز شود:

$$S = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_r$$

که در آن:

$$\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, \quad (j = 1, \dots, r) \Gamma_j \neq \emptyset$$

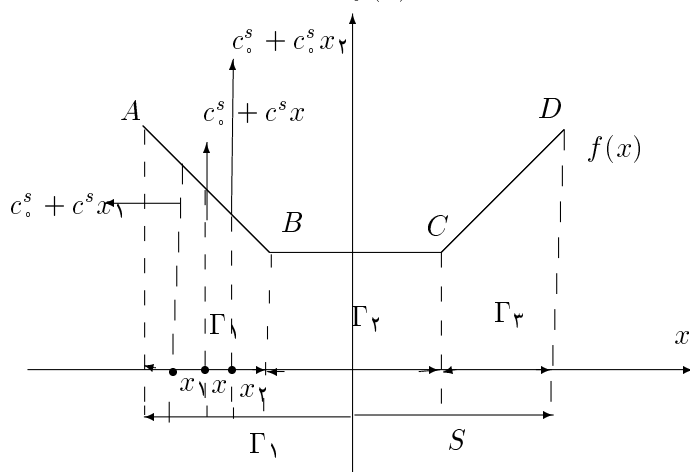
(برای $i \neq j$) آن گاه اگر به ازاء هر x_1 و x_2 از Γ_j ($j = 1, \dots, r$)

$$f(x_1) = c^s + c^s x_1$$

$$f(x_2) = c^s + c^s x_2$$

و $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ باید داشته باشیم:

$$f(x) = c^s + c^s x \quad (0 < \lambda < 1)$$



شکل (۲-۵)

(۱) توجه (مهم) مطالبی را که از خواننده خواسته می شود قلم به دست گرفته و ثابت کنند، از اصولی ترین روش یادگیری است. از این رو توجه به این توصیه ها از ضرورت آموزش می باشد.

شکل (۲-۶) تابع $f(x)$ از سه پاره‌خط AB و BC و CD تشکیل شده است. فرض کنیم:

$$f(x) = c_o^h + c^h x$$

اگر $h = s$

در این صورت حکم ثابت است. اگر $h \neq s$ باید داشته باشیم: (فرض خلف)

$$\begin{aligned} f(x) &= c_o^h + c^h x > c_o^s + c^s x \\ &= \lambda c_o^s + (1 - \lambda)c_o^s + c^s[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \\ &= \lambda[c_o^s + c^s x_1] + (1 - \lambda)[c_o^s + c^s x_2] \\ &> [c_o^h + c^h x_1] + (1 - \lambda)[c_o^h + c^h x_2] \\ &= c_o^h + c^h[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] = c_o^h + c^h x = f(x) \end{aligned}$$

یعنی $f(x) > f(x)$ و طبق اصل تثلیث قوی این ممکن نیست. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

پس یعنی ثابت کردیم در صورتی که f_i ها آفینی باشند، $f(x) = \text{Max}_{1 \leq i \leq k} (f_i(x))$ یک تابع قطعه‌قطعه خطی و محدب است.

عیناً می‌توان ثابت کرد که تحت همان شرایط تابع $g(x)$ تابع قطعه‌قطعه خطی می‌باشد. (ثابت کنید.) با این مقدمات به بررسی قیمت‌های سایه تحت تبه‌گنی می‌پردازیم.

حال مسأله‌ی پرایمال P و دوآل D به همان صورتی که در ۲-۱۵ و ۲-۱۶ داده شده‌اند را در نظر بگیرید و فرض کنید که یک جواب بهینه تبه‌گن در دست می‌باشد. تا زمانی که مشتق Z در معادله‌ی ۲-۱۷ نسبت به b_i ، w_i^* باقی بماند، (به مفهوم معمولی از مشتق) درحالی‌که تمامی پارامترها b_k و $(k \neq i)$ و x_j ها ($j \in R$) در سطح کنونی خود نگه‌داشته شوند، ممکن است منعکس‌کننده قیمت سایه واقعی نباشد. (توضیح این‌که ممکن است چندین w جواب بهینه دوآل باشند و مشتق یکی از آن‌ها را می‌دهد.) یعنی معادله ۲-۱۸ ممکن است معتبر

نباشد. در حقیقت، همان طوری که بعداً خواهیم دید، z^* ممکن است برحسب b_i تابع مشتق پذیر نباشد. به عبارت دیگر، یک آشوب جزئی در b_i ممکن است. پایه‌ی بهینه موجود را نشدنی نماید که تغییر در پایه مورد نیاز باشد.

به عبارت دقیق‌تر، فرض کنیم که مسأله‌ی D در ۲-۱۶ شدنی است، به طوری که مسأله‌ی P به‌ازاء هر مقدار بردار b نامحدود نمی‌باشد. اگر $z^*(b_i)$ مقدار بهینه تابع مقصود برحسب پارامتر سمت راست b_i فرض شود، تا زمانی که b_i در ناحیه تغییر کند و P شدنی باقی می‌ماند، با توجه به این که دوآل شدنی و پرایمال شدنی است، پس D جواب بهینه متناهی دارد و با توجه به قضایای ثابت شده، D دارای بهینه راسی می‌باشد، یعنی:

$$D \text{ و } P \text{ مشترک} = w^* = z^*(b_i) = \text{Max}\{w^j b, j = 1, \dots, E\}$$

که در آن $\{w^1, w^2, \dots, w^E\} = k$ مجموعه‌ی نقاط راسی ناحیه شدنی مسأله‌ی D می‌باشد.

پس:

$$z^*(b_i) = \text{Max}\{(w_1^j, \dots, w_m^j) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \mid (w_1^j, \dots, w_m^j) \in k\}$$

یا

$$z^*(b_i) = \text{Max}\{w_i^j b_i + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m w_l^j b_l \mid w^j \in k\}$$

$$z^*(b_i) = \text{Max}\{w_i^j + w_i^j b_i \mid j = 1, \dots, E\}$$

که در آن

$$w_i^j = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m w_l^j b_l$$

مقدار ثابتی است برای j و پس

$$(j = 1, \dots, E) \quad f_j(b_i) = w_0^j + w_i^j b_i$$

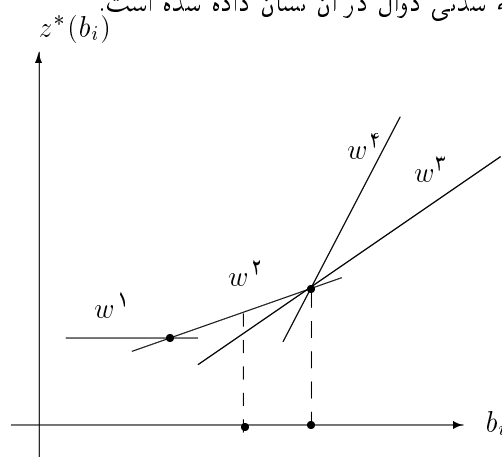
$$z^*(b_i) = \underset{1 \leq j \leq E}{Max} [f_j(b_i)] \quad (19-2)$$

با توجه به آن چه گذشت $z^*(b_i)$ یک تابع نقطه‌ای ماکزیمم می‌باشد که ثابت کردیم محدب و قطعه‌قطعه خطی است.

توجه کنید ناحیه‌ای که P را شدنی نگه می‌دارد یک چند وجهی است مانند F که در آن ناحیه $bd < 0$ برای تمامی جهت‌های رأسی دورشونده ناحیه شدنی D ، زیرا فرض بر این است که P شدنی است پس D نمی‌تواند نامحدود باشد.

در جمع‌بندی $z^*(b_i)$ یک تابع نقطه‌ای ماکزیمم می‌باشد که حوزه تعریف آن F است. و با توجه به این که افزایش b_i ناحیه شدنی P را تنگ‌تر می‌کند پس تابع $z^*(b_i)$ یک تابع نائزولی برحسب b_i می‌باشد؛ یعنی با افزایش b_i ، $z^*(b_i)$ یا ثابت می‌ماند یا افزایش پیدا می‌کند. برای توضیح شکل ۲-۷ ملاحظه شود. این شکل از چهار تابع آفینی تشکیل شده است؛

که نقاط رأسی ناحیه شدنی دوآل در آن نشان داده شده است.



شکل (۲-۶)

تغییرات z^* به عنوان تابعی از b_i داده شده است. در نظر بگیرید $\beta_1 = b_i$ در این نقطه $z^*(b_i)$ مشتق پذیر می‌باشد، در حقیقت $\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = w_i^2$ که سازگاری کامل با ۲-۱۸ دارد. اما در نقطه

$\beta_2 = b_i$ ، $z^*(b_i)$ مشتق پذیر نمی باشد، به عبارت دیگر $z^*(b_i)$ در این نقطه گره دارد. توجه نمائید که برای $b_i = \beta_2$ مسأله ی دوآل دارای جواب بهینه ی چندگانه w^1, w^2, w^3 می باشد، و این مستلزم آن است که پرایمال در بهینه جواب تبهگن داشته باشد. این مطلب را تحت عنوان قضیه ی زیر ثابت می کنیم.

۱۹-۹-۲ قضیه. بهینگی چندگانه دوآل مستلزم بهینگی تبهگنی در پرایمال می باشد.

برهان. فرض کنید D در بهینه جواب چندگانه دارد و x^* بهینه غیرتبهگن پرایمال می باشد. به عبارت دیگر اگر S_D^* مجموعه ی جواب های بهینه دوآل باشد به طوری که $\text{Card}(S_D^*) > 1$ ، در این صورت :

$$\forall w^*(w^* \in S_D^* \longrightarrow w^*b = cx^*)$$

و B پایه بهینه متناظر x^* باشد. پس x^* متناظر تنها پایه B می باشد و جواب بهینه متغیرهای دوآل از رابطه $wB = cB$ به دست می آید که منحصر به فرد است و این خلاف فرض می باشد، پس بایستی x^* تبهگن باشد.

به روش دیگر می توان مطلب فوق را اثبات نمود.

قیدهای دوآل را در نظر بگیرد:

متغیرهای پرایمال متناظر آنها	قیدهای دوآل
x_1	$wa_1 \leq c_1$
x_2	$wa_2 \leq c_2$
\vdots	\vdots
x_n	$wa_n \leq c_n$

برای سهولت در بیان می توان فرض کرد که $x^* = (x_1^*, \dots, x_m^*, 0, \dots, 0)$ باشد که در آن $x_j^* > 0$ ($j = 1, \dots, m$) (این مطلب به کلیت استدلال خللی وارد نمی نماید.) پس با توجه

به قضیه‌ی مکمل زاید در جواب بهینه باید داشته باشیم :

$$w_1^* a_1 = c_1$$

⋮

$$w_m^* a_m = c_m$$

یعنی:

$$w^* B = c_B$$

که از آن حاصل می‌شود $w^* = c_B B^{-1}$ که منحصر به فرد است و این خلاف فرض می‌باشد. از این رو بایستی x^* تبه‌گن باشد. در نتیجه تعداد مؤلفه‌های مخالف صفر کمتر از m می‌باشد. باز هم به کلیت استدلال خللی وارد نمی‌شود که فرض کنیم $(x_1^*, \dots, x_q^*, 0, \dots, 0) = x^*$ می‌باشد که در آن $x_j^* > 0$ ($j = 1, 2, \dots, q$). در نتیجه با توجه به آنچه گفته شد، در بهینگی قیدهای زیر از دوآل به صورت معادله می‌باشد.

$$w^* a_1 = c_1$$

⋮

$$w^* a_q = c_q$$

در نتیجه $\text{rank}[a_1, \dots, a_q] = q$. برای تشکیل پایه بایستی $m - q$ از ستون‌های دیگر به صورتی انتخاب گردند که $\{a_1, \dots, a_q\}$ تشکیل پایه دهند، که تمامی این پایه‌ها متناظر x^* خواهد بود. بنابراین جواب‌های بهینه چندگانه متناظر پایه‌های متفاوتی می‌شود که همگی آن‌ها متناظر x^* است. توجه کنید که عکس مطلب ممکن است همواره صادق نباشد. یعنی اگر x^* بهینه تبه‌گن باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که دوآل بهینه چندگانه دارد. زیرا اگر B_1, \dots, B_t همگی متناظر x^* باشند، ممکن است :

$$w^* = c_{B_1} B_1^{-1} = c_{B_2} B_2^{-1} = \dots = c_{B_t} B_t^{-1}$$

یک جواب منحصر به فرد باشد. در این مورد به مثال زیر توجه نمایید.

شکل (۲-۷)

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= -3x_1 \\ \text{s. t. } \quad x_1 &\leq 7 \\ &\quad x_2 \leq 5 \\ P: \quad 5x_1 + 7x_2 &\leq 70 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

با توجه به شکل ملاحظه می‌گردد که تمامی نقاط BD بهینه مسأله‌ی P می‌باشد و نقطه‌ی D یک جواب رأسی تبه‌گن است. دوآل مسأله‌ی فوق چنین خواهد بود. برای نوشتن دوآل ابتدا قیدها را در عدد (-1) ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= -3x_1 \\ \text{s. t. } \quad -x_1 &\geq 7 \\ &\quad -x_2 \geq -5 \\ -5x_1 - 7x_2 &\geq -70 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } W &= -7w_1 - 5w_2 - 70w_3 \\ \text{s. t. } \quad -w_1 &\leq -3 \\ &\quad -w_2 - 7w_3 \leq 0 \\ w_1, w_2, w_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

صورت استاندارد پرایمال چنین است:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= -3x_1 \\ \text{s. t. } \quad x_1 & \quad \quad \quad +x_3 & & = 7 \\ & \quad \quad x_2 & \quad \quad +x_4 & & = 5 \\ 5x_1 & +7x_2 & & & +x_5 & \leq 70 \\ x_j & \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	1	0	1	0	0	7
x_4	0	1	0	1	0	5
x_5	5	7	0	0	1	70
$z_i - c_j$	3	0	0	0	0	$z^* = 0$

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_1	1	0	1	0	0	7
x_4	0	1	0	1	0	5
x_5	0	7	-1	0	1	35
$z_i - c_j$	0	0	-3	0	0	$z^* = -21$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	1	0	0	7
x_2	0	1	0	1	0	5
x_5	0	0	-1	-7	1	0
$z_j - c_j$	0	0	-3	0	0	$z^* = -21$

جواب بهینه‌ی مسأله $x^* = (7, 5, 0, 0, 0)$ می‌باشد که یک جواب تبه‌گن است، که پایه

متناظر آن $B_1 = [a_1, a_2, a_5]$ اکنون برای این پایه داریم:

$$w^* = (w_1^*, w_2^*, w_5^*) = C_B B_1^{-1} = (-3, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 1 \end{pmatrix} = (-3, 0, 0)$$

برای پایه B_2 ، x_4 را وارد می‌کنیم، داریم:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_1	۱	۰	۱	۰	۰	۷
x_2	۰	۱	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	۰	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	۵
x_3	۰	۰	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	۱	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	۰
$z_i - c_j$	۰	۰	-۳	۰	۰	$z^* = -۲۱$

$$B_3 = [a_1, a_2, a_3](w_1^*, w_2^*, w_3^*) = (-۳, ۰, ۰) \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & ۰ & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & ۱ & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = (-۳, ۰, ۰)$$

به سادگی دیده می شود که $B_3 = [a_1, a_2, a_3]$

و از اینجا نیز $wB = C_B$

$$w^* = (-۳, ۰, ۰)$$

ملاحظه می گردد:

$$(-۳, ۰, ۰) = c_{B_1} B_1^{-1} = c_{B_2} B_2^{-1} = c_{B_3} B_3^{-1}$$

و اما از روی شکل نیز مطالب به سادگی دیده می شود:

$$w_1 a_1 = c$$

$$a_1 = (۱, ۰)$$

$$c = (-۳, ۰)$$

$$w_1^* a_1 = c \Rightarrow w_1^* = -۳$$

$$w_2^* = ۰, w_3^* = ۰$$

ملاحظه می گردد که x^* تبه گن می باشد ولی بهینه دوآل همان:

$$w^* = (-۳, ۰, ۰)$$

است (که البته تبه گن است) یعنی دوآل بهینه چندگانه ندارد. پس خاصیت فوق متقارن نیست

و به شکل زیر در جمع بندی بیان می گردد:

الف. اگر دوآل بهینه چندگانه داشته باشد جواب بهینه پرایمال تبه‌گن است.

ب. اگر پرایمال جواب بهینه تبه‌گنی داشته باشد. نمی‌توان نتیجه گرفت که دوآل بهینه چندگانه دارد. اکنون از معادله ۱۸-۲ می‌توان مشتق جهت‌دار یک‌طرفی (مشتق سمت راست و مشتق سمت چپ) $z^*(b_i)$ را نسبت به b_i تعریف نمود. مشتق سمت راست که آن را با $\frac{\partial^+ z^*}{\partial b_i}$ نشان می‌دهیم میزان تغییرات در z^* در رابطه با افزایش b_i را نشان می‌دهد، یعنی:

$$\frac{\partial^+ z^*}{\partial b_i} = \text{Max}\{w_i^j \mid w_i^j \text{ است } b_i \text{ در دوآل بهینه رأسی بهینه دوآل در } b_i \text{ است}\} \quad (20-2)$$

عیناً مشتق سمت چپ که آن را به $\frac{\partial^- z^*}{\partial b_i}$ نشان می‌دهیم، مقدار منفی تغییرات در z^* را وقتی b_i کاهش پیدا می‌کند نشان می‌دهد. مانند بالا با ملحوظ داشتن معادله ۱۸-۲ داریم:

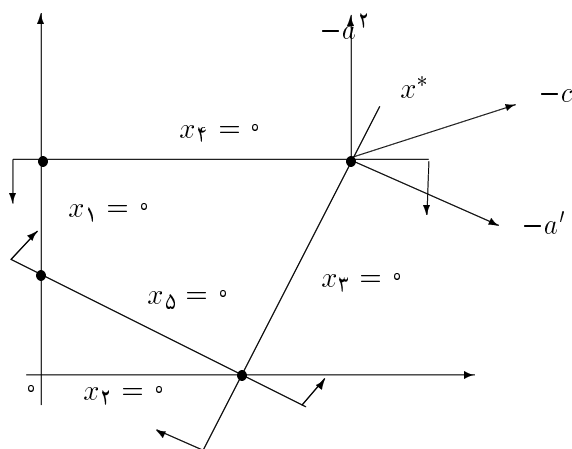
$$\frac{\partial^- z^*}{\partial b_i} = \text{Min}\{w_i^j \mid w_i^j \text{ یک نقطه رأسی بهینه دوآل در } b_i \text{ است}\} \quad (21-2)$$

از معادلات ۲۰-۲ و ۲۱-۲ به ترتیب قیمت‌های سایه سمت راست و سمت چپ متناظر z^* از مؤلفه‌ی بردار سمت راست حاصل می‌گردد. توجه کنید که اگر x^* غیرتبه‌گن باشد در این صورت نقطه‌ی رأسی بهینه‌ی دوآل منحصر به w^* خواهد بود و از آن خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^+ z^*}{\partial b_i} = \frac{\partial^- z^*}{\partial b_i} = w_i^*$$

مانند آنچه در معادله‌ی ۱۸-۲ ذکر گردید.

مثال. ۲۰-۹-۲



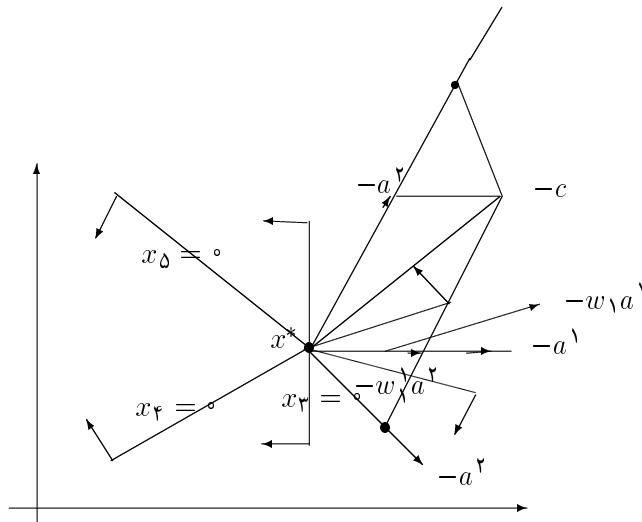
شکل (۲-۸)

در شکل فوق $m = 3$ و $n = 2$ ، x_3 و x_4 و x_5 متغیرهای کمکی می‌باشند که متناظر ۳ قید مسأله هستند. a^1 و a^2 و a^3 گرادیان‌های این ۳ قید می‌باشند. توجه کنید چون ناحیه شدنی نیم‌فضا $Ax \geq b$ (یعنی $a^i x - b_i \geq 0$ ، $i = 1, 2, 3$) پس $-a^1$ و $-a^2$ و $-a^3$ به سمت خارج می‌باشند. توجه کنید که هر پایه دوآل دو متغیر اساسی دارد. در این شکل مسأله جواب بهینه منحصر به فرد x^* دارد. پس دو قید از قیدهای دوآل به صورت تساوی می‌باشند. با توجه به شکل می‌توان نوشت $w_1(-a_1) + w_2(-a_2) = c$ با $w_1 a_1 + w_2 a_2 = c$ که در آن w_1 و w_2 هر دو مثبت می‌باشند و به‌طور منحصر به فرد مشخص می‌گردند. و این بدین معنی است که یک نقطه رأسی منحصر به فرد در ناحیه شدنی دوآل وجود دارد که $w^* = c_B B^{-1}$ است (w_1 و w_2 متغیرهای اساسی و w_3 و w_4 و w_5 متغیرهای غیر اساسی می‌باشند و w_4 و w_5 دو متغیر کمکی در قیدهای دوآل می‌باشند). چون ما کزیمم در معادله‌ی ۲-۱۸ منحصر به فرد است، بنابراین داریم $\frac{\partial z^*}{\partial b_1} = w_1^* > 0$ و $\frac{\partial z^*}{\partial b_2} = w_2^* > 0$ و $\frac{\partial z^*}{\partial b_3} = 0$ قابل توجه می‌باشد که در جدول متناظر x^* داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = -(z_3 - c_3) = w_3$$

توجه نمائید که وقتی در امتداد یالی که در آن $x_4 = 0$ حرکت می‌کنیم در جهتی که x_3 افزایش می‌یابد، b_1 به‌طور حاشیه‌ای افزایش پیدا می‌کند. (چرا؟) واضح است که در این حرکت

مقدار بهینه تابع مقصود تغییر می‌نماید. (کم می‌شود یا زیاد؟) حال شکل (۹-۵) را به صورت زیر در نظر بگیرید.



شکل (۹-۲)

x^* جواب بهینه‌ی منحصر به فرد مسأله است و تبه‌گن می‌باشد و دو پایه بهینه متناظر این نقطه وجود دارند که عبارتند از $B_1 = [a_1, a_2, a_4]$ و $B_2 = [a_1, a_2, a_3]$ (چرا؟ دقیقاً توضیح دهید پایه $[a_1, a_2, a_5]$ دوآل شدنی نمی‌باشد (چرا؟) (توجه کنید که در نقطه‌ی بهینه همه‌ی $z_j - c_j \leq 0$ کدامیک؟) علت این امر چیست؟ در جدول سیمپلکس چه اتفاقی می‌افتد وقتی با مسأله‌ای به صورت فوق روبرو می‌شویم؟) هر یک از پایه‌های B_1 و B_2 یک نقطه‌ی رآسی بهینه دوآل به دست می‌دهند. برای پایه‌ی B_1 داریم $W^{*1} = (w_1^1, w_2^1, w_3^1)$ که در آن $w_1^1 > 0$ و $w_2^1 > 0$ و $w_3^1 > 0$ داریم:

$$-w_1^1 a_1^1 - w_2^1 a_3^1 = -c$$

و برای پایه‌ی B_2 داریم:

$$-w_1^2 a_1^2 - w_2^2 a_3^2 = c$$

که در حقیقت ملاحظه می‌گردد که $B_2 \setminus \underbrace{(w_1^2, w_2^2, w_3^2)}_{w_1^2 < w_3^2}$ که در آن $w_1^2 > 0$ و $w_2^2 > 0$ پس:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z^+}{\partial b_1} &= w_1^2 > 0 & \frac{\partial z^-}{\partial b_1} &= 0 = w_1^2 \\ \frac{\partial z^+}{\partial b_2} &= w_2^2 > 0 & \frac{\partial z^-}{\partial b_2} &= 0 = w_2^2 \\ \frac{\partial z^+}{\partial b_3} &= w_3^2 > 0 & \frac{\partial z^-}{\partial b_3} &= w_3^1 > 0 \end{aligned}$$

از آن چه گذشت خلاصه مطالب فوق چنین خواهد بود:

(۱) اگر x^* جواب بهینه غیرتبه‌گن برای مسأله‌ی پرایمال باشد، در این صورت اگر مؤلفه‌ی i ام b_i یعنی b_i به صورتی تغییر کند که پرایمال شدنی بماند، در این صورت بهینه دوآل منحصر به فرد خواهد بود.

$$w^* = c_B B^{-1} = (w_1^*, \dots, w_m^*)$$

و

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = w_i^* \quad i = 1, \dots, m$$

(۲) اگر دوآل جواب چندگانه داشته باشد، در این صورت جواب بهینه پرایمال تبه‌گن می‌باشد و چندین پایه متناظر نقطه‌ی بهینه پرایمال خواهد بود، مثلاً B_1, \dots, B_t که جواب بهینه‌ی دوآل متناظر آن عبارت خواهد بود از

$$w_r^* = (w_1^{*r}, \dots, w_m^{*r}) = C_{B_r} B_r^{-1} \quad r = 1, \dots, t$$

$$\text{مثلاً} \begin{cases} \frac{\partial z^+}{\partial b_i} = \text{Max}_{1 \leq r \leq t} \{w_i^{*r}\} & i = 1, \dots, m \\ \frac{\partial z^-}{\partial b_i} = \text{Min}_{1 \leq r \leq t} \{w_i^{*r}\} & i = 1, \dots, m \end{cases}$$

۱۰-۲ لم فارکاس

لم فارکاس که کاربردهای فراوانی در مسائل بهینه‌سازی دارد در این جا ذکر می‌گردد. توصیه اکید آن است که خوانندگان هم از نظر جبری و هم از نظر هندسی دقت بیشتری نمایند. قضایای دیگری با استفاده از لم فارکاس اثبات می‌شود که از آن‌ها در این فصل استفاده خواهد شد.

لم فارکاس به ما می‌گوید که فقط یکی از دستگاه‌های ذیل دارای جواب می‌باشد.

$$I \begin{cases} Ax \geq 0 \\ Cx < 0 \end{cases} \quad II \begin{cases} wA = c \\ w \geq 0 \end{cases}$$

که در آن A ماتریسی است از مرتبه‌ی $m \times n$ و $c \in R^n$.

برهان. در دستگاه اولی (I) متغیرها $x = (x_1, \dots, x_n)$ و در دستگاه دوم (II) متغیرها $w = (w_1, \dots, w_m)$ می‌باشند.

لم فوق به ما می‌گوید که اگر x موجود باشد که $Ax \geq 0$ و $Cx < 0$ آن‌گاه دستگاه $wA = c$ و $w \geq 0$ جواب ندارد و اگر w موجود باشد که $wA = c$ و $w \geq 0$ آن‌گاه x یافت نمی‌شود که $Ax \geq 0$ و $Cx < 0$. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر یکی از آن‌ها جواب داشته باشد دیگری دارای جواب نیست. فرض کنیم $wA = c$ ، $w \geq 0$ دارای جواب است. می‌خواهیم ثابت کنیم که $Ax \geq 0$ ، $Cx < 0$ دارای جواب نیست.

اثبات به برهان خلف می‌باشد. فرض کنیم دستگاه $Ax \geq 0$ و $Cx < 0$ دارای جواب است یعنی x° است که:

$$Ax^\circ \geq 0, \quad Cx^\circ < 0 \quad (a)$$

چون $wA = c$ و $w \geq 0$ طبق فرض دارای جواب، یعنی w° وجود دارد که:

$$w^\circ A = c, \quad w^\circ \geq 0 \quad (b)$$

طرفین (a) را در w° و طرفین (b) را در x° ضرب می‌کنیم، داریم:

$$w^\circ Ax^\circ \geq 0$$

$$w^\circ Ax^\circ = cx^\circ < 0$$

از آن نتیجه می‌شود که $0 \leq cx^\circ < 0$ و این تناقض است و با این تناقض برهان تمام است (چرا تناقض است؟ با استفاده از اصول میدان مرتب به دقت جواب دهید).

حال فرض کنیم که دستگاه I دارای جواب نیست. ثابت می‌کنیم دستگاه II دارای جواب است.

مسئله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$P : \quad \text{Min} \quad Z = cx$$

$$\text{s. t.} \quad Ax \geq 0$$

توجه کنید که $x^* = 0$ جواب بهینه‌ی مسئله‌ی فوق می‌باشد. مسئله‌ی P را به صورت استاندارد برمی‌گردانیم؛ یعنی قرار می‌دهیم $x = x' - x''$ و $x' \geq 0$ و $x'' \geq 0$ خواهیم داشت:

$$P' : \quad \text{Min} \quad Z = cx' - cx''$$

$$\text{s. t.} \quad Ax' - Ax'' - Ix_s = 0$$

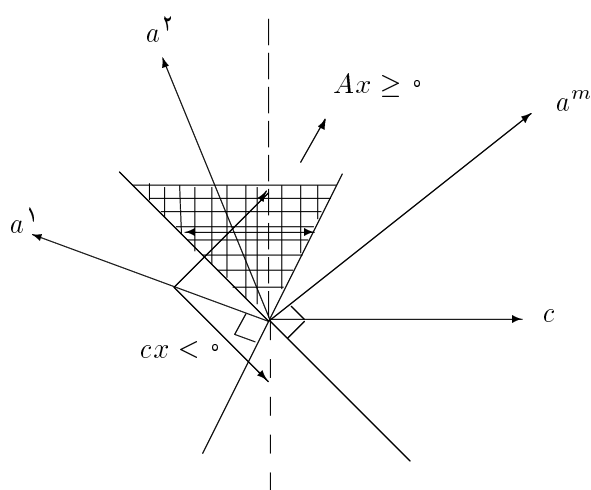
$$x', x'', x_s \geq 0$$

$x_s^* = 0, 0 = x'^* = x''^*$ جواب مسئله‌ی P' می‌باشد. با شروع از یک جواب اساسی شدن‌ی اولیه، با به‌کار بردن روش‌های جلوگیری از به‌دور افتادن، پایه‌ی بهینه‌ای برای مسئله‌ی P' می‌توان یافت که برای آن « $z_j - c_j \leq 0$ » برای تمامی متغیرهای غیراساسی. فرض کنیم این پایه B باشد، قرار می‌دهیم « $w = c_B B^{-1}$ » چون به‌ازاء هر j ، $wa_j - c_j = z_j - c_j \leq 0$ پس $wA - c \leq 0$ و $-w \leq 0$ پس:

$$wA = c, \quad w \geq 0$$

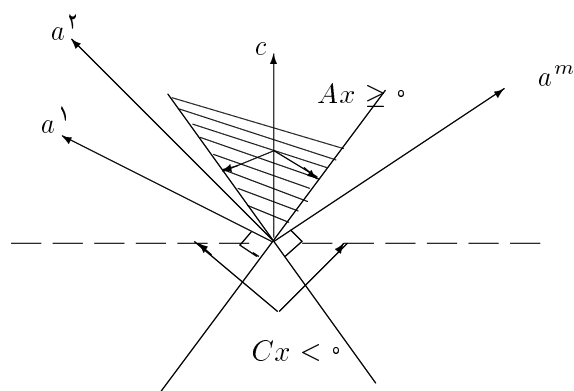
و حکم ثابت است.

لم فارکاس را از نظر هندسی تعبیر می‌نمائیم. این مطلب در شکل‌های (۱۰-۲) و (۱۱-۲) نشان داده شده‌اند. در شکل (۱۰-۲) نشان داده شده که وقتی دستگاه I دارای جواب باشد و c در Pos سطرهای A نباشد $wA = c$ و $w \geq 0$ دارای جواب نخواهد بود و در شکل (۱۱-۲) نشان داده شده که اگر c در Pos سطرهای A باشد، دستگاه $Ax \geq 0$ و $Cx < 0$ نمی‌تواند جواب داشته باشد.



شکل (۲-۱۰)

در این شکل قسمت هاشور دو بیل خورده $Ax \geq 0$ و $Cx < 0$ می‌باشد و c در Pos سطرهای A نیست.



شکل (۲-۱۱)

در این شکل $Ax \geq 0$ و $Cx < 0$ دارای جواب نیست و c در Pos سطرهای A است.

۱۱-۲ صورت‌هائی دیگری از لم فارکاس^۱

شق‌های دیگری از لم فارکاس موجود است، که کاربردهای فراوانی دارد. دو صورت از آن را ذیلاً می‌آوریم و بقیه‌ی صورت‌ها در مرجع [۱] موجود است.

1) Alternate Forms of Farkas Lemma

صورت اول. درست یکی از دستگاه‌های زیر دارای جواب است:

$$I \begin{cases} Ay \leq \circ \\ y \leq \circ \\ cy > \circ \end{cases} \quad II \begin{cases} wA \leq c \\ w \geq \circ \end{cases}$$

برهان. دستگاه II را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$wA + Iv = c$$

$$w, v \geq \circ$$

با توجه به لم فارکاس داریم:

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} x \geq \circ \quad cx < \circ$$

یعنی $Ax \geq \circ$ ، $Ix \geq \circ$ و $cx < \circ$ با قرار دادن $-x = y$ داریم:

$$\begin{cases} Ay \leq \circ \\ y \leq \circ \\ cy > \circ \end{cases}$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

صورت دوم. تنها یکی از دو دستگاه زیر جواب دارد:

$$\begin{cases} Ax = \circ \\ x \geq \circ \\ cx < \circ \end{cases} \quad \begin{cases} wA \leq c \\ \text{آزاد} \end{cases}$$

اثبات به عنوان تمرین به عهده‌ی خواننده واگذار می‌شود.

اکنون با استفاده از لم فارکاس قضیه قوی دوآلیتی را به صورتی دیگر اثبات می‌کنیم و شرایطی برای بهینگی به دست می‌آوریم که تحت عنوان شرایط کاروش - کهن - تاکر^۱ نامیده

1) Karush-Kuhn-Tucker (K.K.T)

می شود.

۱۲-۲ شرایط بهینگی کاروش - کهن - تاکر برای قیدهای

نامساوی

مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } Z = cx$$

$$\text{s. t. } Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

که در آن c و b بردار n تایی و m تایی (به ترتیب) می‌باشند و A ماتریسی است از مرتبه‌ی $m \times n$.

فرض کنید \bar{x} نقطه‌ی بهینه مسئله فوق‌الذکر است. اگر $S = \{x \mid Ax \geq b \text{ \& } x \geq 0\}$ ناحیه‌ی شدنی مسئله باشد، ثابت می‌کنیم در نقطه \bar{x} جهت بهبوددهنده وجود ندارد. یعنی دستگاه $Gd \geq 0$ و $cd < 0$ دارای جواب نمی‌باشد؛ که در آن G گرادیان تمامی ابرصفحه‌های مار بر \bar{x} می‌باشد.

به برهان خلف فرض کنیم دستگاه:

$$Gd \geq 0$$

$$cd < 0$$

دارای جواب باشد. قرار می‌دهیم:

$$x = \bar{x} + \lambda d$$

$$Gx = G\bar{x} + \lambda Gd = g + \lambda Gd \geq g$$

که در آن:

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} G \\ \bar{G} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix}$$

و $G\bar{x} = g$, $G\bar{x} > \bar{g}$ قرار می‌دهیم:

$$f(x) = G\bar{x} - \bar{g}$$

تابع $f(x)$ در \bar{x} اکیداً مثبت است. پس به ازاء هر x از حومه‌ی \bar{x} مانند $N_\delta(\bar{x})$, $f(x) \geq 0$.

یعنی $x + \varepsilon d \in S$ (چرا؟ دقیقاً توضیح دهید)

که در آن $\delta > \varepsilon > 0$ و $d \neq 0$ یکی از جواب‌های $Gd \geq 0$ و $cd < 0$ می‌باشد پس:

$$c(\bar{x} + \varepsilon d) = c\bar{x} + \varepsilon cd < c\bar{x}$$

و این تناقض است زیرا \bar{x} طبق فرض بهینه بود. پس دستگاه:

$$I) \begin{cases} Gd \geq 0 \\ cd < 0 \end{cases}$$

دارای جواب نیست. یعنی در \bar{x} جهت بهبوددهنده وجود ندارد. از این رو دستگاه (طبق لم فارکاس):

$$I \begin{cases} uG = c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

دارای جواب است. G ماتریس گرادیان ابرصفحه‌های ما بر \bar{x} است. فرض کنیم:

$$I = \{i \mid a^i \bar{x} = b_i\}$$

که a^i سطر i ام A است و

$$J = \{j \mid e_j \bar{x} = 0\}$$

در حقیقت I اندیس قیدهایی از $Ax \geq b$ و J اندیس قیدها از $Ix \geq 0$ می‌باشند که در \bar{x} تنگ می‌باشند.

پس دستگاه $uG = c$ و $u \geq 0$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{i \in I} w_i a^i + \sum_{j \in T} v_j e_j = c \quad (22-2)$$

$$w_i \geq 0 \quad i \in I \quad v_j \geq 0 \quad j \in J \quad (23-2)$$

که در آن:

$$\begin{cases} w_i = u_i & i \in I \\ v_j = u_j & j \in J \end{cases}$$

شرایط سه‌گانه زیر یعنی :

$$\begin{cases} A\bar{x} \geq b \quad , \quad \bar{x} \geq 0 \\ \sum_{i \in I} w_i a^i + \sum_{j \in J} v_j e_j = c \\ w_i \geq 0 \quad i \in I \quad v_j \geq 0 \quad j \in J \end{cases}$$

را شرایط **K.K.T** برای مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی فوق‌الذکر گویند. تا به حال ثابت نمودیم که اگر \bar{x} بهینه‌ی مسأله فوق باشد، شرایط فوق‌الذکر سه‌گانه لازم است برقرار باشد.

از نظر هندسی، معادلات ۲۲-۲ و ۲۳-۲ بیان می‌کند که در نقطه بهینگی، گرادیان تابع مقصود، یعنی C در داخل Pos گرادیان ابرصفحه‌های مار بر این نقطه قرار می‌گیرد، یعنی C را می‌توان به صورت ترکیب خطی نامنفی از گرادیان ابرصفحه‌های مار بر \bar{x} نوشت.

اینک ثابت می‌کنیم که شرایط سه‌گانه فوق‌الذکر برای بهینگی \bar{x} کافی می‌باشد. برای این منظور فرض می‌کنیم x^0 جواب شدنی مسأله باشد و I و J همان هستند که قبلاً تعریف

شده‌اند. طرفین ۲-۲۲ را در $x^\circ - \bar{x}$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} c(x^\circ - \bar{x}) &= \sum_{i \in I} w_i a^i (x^\circ - \bar{x}) + \sum_{j \in J} e_j v_j (x^\circ - \bar{x}) \\ c x^\circ - c \bar{x} &= \sum_{i \in I} (w_i a^i x^\circ - w_i a^i \bar{x}) + \sum_{j \in J} e_j v_j x^\circ - \sum_{j \in J} e_j v_j \bar{x} \\ &= \sum_{i \in I} w_i (a^i x^\circ - b_i) + \sum_{j \in J} v_j e_j x^\circ - \circ \end{aligned}$$

زیرا $e_j \bar{x} = \circ$ ($j \in J$). اما به‌ازاء هر $(i \in I)$ $a^i x^\circ - b_i \geq \circ$ و هر $j \in J$ $e_j x^\circ \geq \circ$

پس:

$$c x^\circ - c \bar{x} \geq \circ$$

یعنی:

$$\forall x^\circ (x \in S \longrightarrow c \bar{x} \leq c x)$$

پس \bar{x} بهینه است.

حال ثابت می‌کنیم که معادلات ۲-۲۲ و ۲-۲۳ به مفهوم شدنی بودن دوآل و شرایط مکمل

زائد می‌باشد. برای این منظور تعریف می‌کنیم:

$$w_i = \begin{cases} w_i & i \in I \\ \circ & i \in \{1, \dots, m\} - I \end{cases} \quad v_j = \begin{cases} v_j & j \in J \\ \circ & j \in \{1, \dots, n\} - J \end{cases}$$

در نتیجه معادلات ۲-۲۲ و ۲-۲۳ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{i=1}^m w_i a^i + \sum_{j=1}^n e_j v_j = c$$

$$w_i (a^i \bar{x} - b_i) = \circ, \quad v_j \bar{x}_j = \circ \quad i \text{ و } j \text{ بازای هر}$$

$$w_i \geq \circ \quad i = 1, \dots, m$$

$$v_j \geq \circ \quad j = 1, \dots, n \quad (2-24)$$

پس ۲۴-۲ را به صورت ماتریسی می‌نویسیم:

$$wA + Iv = c$$

$$w(A\bar{x} - b) = 0, v\bar{x} = 0$$

پس اگر \bar{x} بخواهد جواب بهینه باشد بایستی سه شرط ذیل برقرار باشد:

$$Ax = b \quad x \geq 0 \quad \text{(۱) :PF}$$

$$wA + v = c \quad w, v \geq 0 \quad \text{(۲) :DF}$$

$$w(Ax - b) = 0 \quad vx = 0 \quad \text{(۳) :CS}$$

بالعکس اگر PF ، DF ، CS در نقطه‌ای برقرار باشد آن نقطه بهینه است.

اینک توضیح می‌دهیم که شرایط K.K.T معادل همان قضیه‌ی قوی دوآلیتی است و

اگر فرض کنیم x^* بهینه P باشد، w^* و v^* هست که:

$$Ax^* \geq b \quad x^* \geq 0 \quad \text{:PF}$$

$$w^*A + Iv^* = c \quad w^* \geq 0, v^* \geq 0 \quad \text{:DF}$$

$$w^*(Ax^* - b) = 0 \quad x^*v^* = 0 \quad \text{:CS}$$

اما با توجه به این‌که:

$$w^*Ax = w^*b$$

$$w^*Ax^* + Iv^*x^* = c^x$$

داریم:

$$w^*Ax^* = c^x$$

یعنی $c^x = w^*b$ و این بدان معنی است که مسأله‌ی D شدنی است و بهینه دارد و مقدار

بهینه P و D مساوی هستند. (با استفاده از قضیه‌ی دوآلیتی).

شرایط بهینگی کاروش - کوهن - تاکر یکی از ابزار بسیار مهم بررسی نمودن آن است که

آیا جواب داده شده بهین می‌باشد. اینک ثابت می‌کنیم در جدول سیمپلکس پرایمال همواره

1) Primal Feasible 2) Dual Feasible 3) Complementarity Slackness

شرط PF و CS برقرار است و الگوریتم به دنبال پایه‌ای است که DF برقرار باشد و در جدول نهایی هر سه شرط PF و DF و CS برقرار می‌باشد. برای بررسی مطلب بیان شده، جدول سیمپلکس (پرایمال) متناظر پایه B که نشان دهنده‌ی مسأله به صورت استاندارد کانونی می‌باشد را در نظر بگیرید. جدول متناظر BFS می‌باشد.

	$x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m$	$x_{m+1} \ \dots \ x_j \ \dots \ x_n$	RHS
x_1	1 0 ... 0	$\bar{a}_{1m+1} \ \dots \ \bar{a}_{1j} \ \dots \ \bar{a}_{1n}$	\bar{b}_1
x_2	0 1 ... 0	$\bar{a}_{2m+1} \ \dots \ \bar{a}_{2j} \ \dots \ \bar{a}_{2n}$	\bar{b}_2
\vdots	$\vdots \ \vdots \ \dots \ \vdots$	$\vdots \ \vdots \ \dots \ \vdots$	\vdots
x_m	0 0 ... 1	$\bar{a}_{mm+1} \ \dots \ \bar{a}_{mj} \ \dots \ \bar{a}_{mn}$	\bar{b}_m
$z_j - c_j$	0 0 ... 0	$z_{m+1} - c_{m+1} \ \dots \ z_j - c_j \ \dots \ z_n - c_n$	$z^* = c_B B^{-1} b$

(۱) اولاً چون جدول متناظر یکی از مراحل سیمپلکس می‌باشد (با نامگذاری مجدد متغیرها فرض بر آن شده که متغیرهای اساسی x_1, \dots, x_m و متغیرهای غیراساسی x_{m+1}, \dots, x_n می‌باشند) پس $\bar{b}_i \geq 0$ برای $i = 1, \dots, m$ یعنی پرایمال شدنی می‌باشد.

(۲) شرایط CS نیز برقرار است. بایستی برای این منظور ثابت کنیم:

$$w^i (a^i x^* - b_i) = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (25-2)$$

$$v_j x_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (26-2)$$

چون x^* جواب شدنی است. پس معادلات ۲-۲۵ همواره برقرار است. برای اثبات ۲-۲۶ آن را به صورت زیر داریم:

$$v_j x_j = (w a_j - c_j) x_j$$

برای $j = 1, \dots, m$ ، $(w a_j - c_j) x_j = 0$ زیرا:

$$w a_j - c_j = z_j - c_j$$

برای متغیرهای اساسی برابر با صفر می‌باشند. برای متغیرهای غیراساسی یعنی

$$x_j = 0, \quad j = m+1, \dots, n$$

در هر صورت:

$$z_j - c_j = (wa_j - c_j)x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

یعنی در جدول سیمپلکس CS برقرار است.

در نتیجه در پرایمال سیمپلکس به دنبال پیدا نمودن پایه‌ای می‌باشیم که شدنی دوآل باشد یعنی به‌ازاء هر j هر $z_j - c_j \leq 0$ که در حقیقت پیدا نمودن پایه‌ای است که $w = c_B B^{-1}$ و $wA - c \leq 0$ (چرا؟ دقیقاً توضیح دهید).

شرایط لازم و کافی K.K.T برای بهینگی در مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با استفاده از لم فارکاس اثبات گردید. اینک چند قضیه‌ی دیگر که مورد استفاده فراوان دارد ذیلاً بیان و ثابت می‌کنیم.

۲۱-۱۲-۲ قضیه موتزکینز^۱ (قضیه‌ای از شقوق)^۲ فرض کنیم A ، C و D

ماتریس‌هایی از مرتبه‌های $m_1 \times n$ ، $m_2 \times n$ و $m_3 \times n$ (به ترتیب) باشند، که در آن $m_1 \geq 1$. درست یکی از دستگاه‌های زیر دارای جواب می‌باشد:

$$I) \begin{cases} Ax > 0 \\ cx \geq 0 \\ Dx = 0 \end{cases} \quad (27-2)$$

$$II) \begin{cases} wA + \mu C + \gamma D = 0 \\ w \geq 0, \quad w \neq 0, \quad \mu \geq 0 \end{cases} \quad (28-2)$$

واضح است که اگر (w, μ, γ) در ۲۸-۲ صدق کند، آنگاه $(\alpha w, \alpha \mu, \alpha \gamma)$ برای هر $\alpha > 0$ در آن دستگاه صدق خواهد کرد. با به‌کار بردن این حقیقت، می‌توان w ها را نرمال نمود، یعنی

2) Motzkin's Theorem 2) Theorem of Alternatives

فرض کرد که $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ ، $w_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) و همین طور به جای $\gamma^+ - \gamma^- = \gamma$ که در آن $\gamma^+ \geq 0$ و $\gamma^- \geq 0$ پس ۲۸-۲ با توجه به مطالب بالا به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{cases} A^t w^t + c^t \mu^t + D^t \gamma^{+t} - D^t \gamma^{-t} & = 0 \\ \lambda w^t & = 1 \end{cases} \quad (w^t, \mu^t, \gamma^{+t}, \gamma^{-t}) \geq 0$$

(a)

یا:

$$A = \begin{bmatrix} A^t & C^t & D^t & -D^t \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

با توجه به لم فارکاس:

$$I) \begin{cases} AX = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad II) \begin{cases} wA \leq 0 \\ wb > 0 \end{cases}$$

(a) صورت I دستگاہ می باشد. صورت II چنین خواهد بود:

$$\begin{aligned} (-x^t, \alpha)(A) &\leq 0 & (-x^t, \alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} &> 0 \\ (-x^t, \alpha) \begin{pmatrix} A^t & C^t & D^t & -D^t \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\leq 0 \\ (-x^t, \alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} &> 0 \end{aligned}$$

نتیجه می شود:

$$-x^t A^t + \alpha \leq 0 \implies Ax \geq \alpha > 0 \implies Ax > 0$$

$$-x^t c^t \leq 0 \quad c^t x^t \geq 0 \implies cx \geq 0$$

$$\begin{cases} -x^t D^t \leq 0 \\ x^t D^t \leq 0 \end{cases} \implies D^t x^t = 0 \implies Dx = 0, \alpha > 0$$

و این همان ۲۷-۲ می باشد و حکم ثابت است.

۲۲-۱۲-۲ قضیه تاکر^۱ (قضیه‌ای از شقوق) فرض کنید A و C و D به ترتیب ماتریس‌هایی از مرتبه‌های $m_1 \times n$ و $m_2 \times n$ و $m_3 \times n$ که در آن $m_1 \geq 1$. درست یکی از دستگاه‌های زیر دارای جواب شدنی است و دیگری جواب ندارد.

$$I) \begin{cases} Ax \geq 0, Ax \neq 0 \\ cx \geq 0 \\ Dx = 0 \end{cases} \quad II) \begin{cases} wA + \mu C + vD = 0 \\ w > 0 \\ \mu \geq 0 \end{cases}$$

مانند قضیه قبل اثبات می‌شود (اثبات به عهده خواننده است).

۱۳-۲ پایداری مدل‌های برنامه‌ریزی خطی^۲

برای بیان مطلب، موضوعاتی که مورد نیاز می‌باشد ذکر می‌کنیم.

۲۳-۱۳-۲ تعریف. دنباله تابعی است بر N به صورت:

$$f : N \longrightarrow R$$

اگر $f(n) = u_n$ نشان می‌دهیم و به صورت $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌نویسیم. گوئیم $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$

$$\forall \varepsilon \exists N. \forall n(n \geq N. \Rightarrow |U_n - \alpha| < \varepsilon)$$

در این صورت گوئیم دنباله $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست.

برای مطالعه بیشتر در زمینه همگرایی سری‌ها، فشردگی، نقاط حدی به منابع [۱۹، ۲۰]

مراجعه شود.

در مطالعه پایداری مدل‌های بهینه‌سازی، دو نوع پایداری مورد نظر می‌باشد.

اولی عبارت است از پایداری عددی الگوریتم مورد نظر که جهت حل مسأله به کار گرفته

می‌شود. الگوریتمی که برای حل مسأله به کار می‌رود، در خلال روند محاسبات، مرتکب خطای

1) Tucker's Theorem 2) Stability of the Linear Programming Model

ناشی از گرد نمودن می‌گردد و ممکن است در اثر همین امر، جواب نهائی به‌دست آمده، از مقدار واقعی جواب بسیار دور باشد. الگاریتمی را پایدار گویند، که خطای ناشی از انباشته شدن در خلال انجام عملیات از یک مقدار مشخصی که قبلاً تعیین شده است کمتر باشد.

مسئله‌ی پایداری الگاریتم‌های LPها به‌طور خلاصه قبلاً مورد بررسی قرار گرفت و علاقه‌مندان به مطالعه بیشتر در این زمینه به مرجع [] مراجعه نمایند.

مفهوم دومی در پایداری خود مدل‌ها می‌باشد و آن عبارت است از این‌که تحت تغییرات بسیار کوچکی در مقادیر داده‌ها، چه تغییراتی و چه مقدار در مدل اثر می‌گذارد. در بسیاری از مسائل علمی بهینه‌سازی مقادیر اجزاء داده‌ها، از ملاحظات علمی تقریب زده شده است و خیلی دقیق نمی‌باشد و بایستی در رابطه با آن‌ها خطائی ملحوظ گردد. حتی اگر مقادیر داده‌ها به دقت اندازه‌گیری شده باشد، ممکن است با تغییرات زمان عوض شود (نمونه آن قیمت نفت و طلا... در بازار جهانی است). اگر مدل جواب بهینه‌ای با داده‌های ثابت به‌دست بدهد ولی با تغییرات بسیار کوچک مدل نشدنی گردد یا تغییرات زیادی در جواب بهینه حاصل شود در این صورت گویند مدل مورد نظر ناپایدار می‌باشد. یک مدل بهینه‌سازی را پایدار گویند، اگر تغییرات بسیار کوچک ولی دلخواه در مقادیر داده‌ها در مدل باعث تغییرات بسیار کوچک در مقدار بهینه تابع مقصود گردد و تغییرات بسیار کوچکی در جواب بهینه بدهد. ذیلاً فقط در رابطه با پایداری مدل‌های مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی بحث خواهد شد و پایداری مدل‌های بهینه‌سازی در حالت غیرخطی در جلد دیگر این سری از کتاب‌ها بررسی می‌شود.

قبل از این‌که مطلب را در حالت کلی مورد بحث قرار دهیم، ابتدا چند مثال جهت روشن شدن موضوع ارائه می‌دهیم:

مثال. ۲-۱۳-۲ دو دستگاه از معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

و دستگاه:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \quad (29-2)$$

در ۲۹-۲ یکی از قیدها زائد می‌باشد. در حقیقت ۲-۱۳-۲ و ۲۹-۲ معادل هستند. با تغییرات بسیار کوچک مانند ε در سمت راست یکی از ۲۹-۲ با ثابت نگه داشتن بقیه‌ی داده‌ها، ۲۹-۲ نشدنی می‌شود. به عنوان مثال دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + \varepsilon \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

که برای هر مقدار $\varepsilon \neq 0$ ناسازگار می‌باشد. بنابراین دستگاه ۲۹-۲ ناپایدار است. درحالی‌که ۲۴-۱۳-۲ پایدار می‌باشد و هر تغییر داده‌های آن باعث همان مقدار تغییر در جواب‌های دستگاه می‌گردد. ملاحظه می‌گردد دو دستگاه معادل به مفهوم ریاضی یکی پایدار و دیگری ناپایدار می‌باشد.

مثال دیگری در نظر بگیرید. این مثال از پروفیسور د.گیل^۱ می‌باشد:

$$\begin{aligned} f(\alpha) = \text{Max} \quad & x \\ & x \leq 1 \\ & \alpha x \leq 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$x \in R'$ که در آن α یک عدد حقیقی نامنفی است. جواب بهینه‌ی آن بازاء تمامی مقادیر $\alpha > 0$ ، $x^* = 0$ که در نتیجه مقدار بهینه‌ی تابع مقصود $f(\alpha) = 0$ ولی برای $\alpha = 0$ $f^*(0) = 1$ یعنی مقدار بهینه‌ی آن برابر با ۱ است.

اما در حومه‌ای از $\alpha = 0$ ، یک تغییر بسیار ناچیز باعث می‌گردد که مقدار بهینه‌ی تابع

1) Professor D.Gale

مقصود یک باره از عدد یک به صفر تبدیل گردد. از این رو این مسأله‌ی برنامه ریزی خطی ناپایدار می‌باشد (در حومه‌ای از $\alpha = 0$).

مثال دیگری از پروفیسور اس.ام.رابینسون^۱ در نظر بگیرید. توجه شود که روش شهودی فوق برای تبیین مطلب می‌باشد. بسیاری از صاحب نظران روش شهودی را قبول ندارند و روش مجرد را مفیدتر می‌دانند.

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \\ \text{s. t. } & x_1 + \frac{4}{3}x_2 + 2x_3 = \frac{3}{4} \\ & x_2 + 3x_3 = \frac{3}{4} \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

دوآل مسأله است و مقدار بهینه‌ی تابع مقصود برابر با یک است. با تغییر ضریب a_{12} در ماتریس تکنولوژی از $\frac{4}{3}$ به $(\frac{4}{3} - \varepsilon)$ برای $\varepsilon > 0$ ولی بسیار کوچک، مسأله برمی‌گردد به مسأله‌ی آشوب شده و برای این مسأله $x^0 = (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0)^t$ جواب بهینه است و مقدار بهینه‌ی تابع مقصود برابر با ۲ می‌گردد و جواب بهینه‌ی دوآل از عبارت خواهد بود از:

$$w^* = (0, -\frac{2}{3}, 3) + (\frac{1}{\varepsilon})(\frac{4}{3}, -\frac{4}{9}, \frac{4}{3})$$

و مقدار بهینه دوآل نیز برابر با ۲ خواهد شد. بنابراین LP فوق ناپایدار است.

در مطالعه پایداری یک مدل برنامه ریزی خطی که متعلق به دسته‌ی خاصی از مدل‌ها می‌باشد، ممکن است ضروری به نظر برسد، که آشوب مقادیر در مقادیر اجزاء داده‌ها، به صورتی انجام شود که در خاصیت مورد نظر صدق نماید. بنابراین مدل آشوب شده متعلق به همان دسته خواهد بود. به عنوان مثال مسأله‌ی حمل و نقل متوازن^۲ را در نظر بگیرید (مسأله‌ی حمل و نقل متوازن است اگر مجموع عرضه مساوی مجموع تقاضا باشد) چون این مدل یک قید زائد دارد (به صورت معادله) از دیدگاه یک LP مدل ناپایداری است. به هر حال در دسته‌ی مدل‌های متوازن، ضرایب ماتریس تکنولوژی هرگز تغییر نمی‌کند و مقادیر عرضه و تقاضا یعنی

1) S.M.Robinson 2) Balanced Transportation Problem

b_j, a_i به‌ازاء هر i و هر j همواره مثبت می‌باشند و $\sum a_i = \sum b_j$. وقتی پایداری مدل‌های متوازن حمل و نقل مورد مطالعه قرار می‌گیرد؛ (تحت آشوب‌هایی در c_{ij} ها یا a_i و b_i ها با حفظ متوازن ماندن مسأله)، ملاحظه می‌گردد که مسأله علیرغم مطالب فوق‌الذکر کاملاً پایدار است. بنابراین در مطالعه‌ی پایداری مدل خاصی با ویژگی خاص، همواره ضرورت دارد، شرایطی را که داده‌ها در مدل صادق هستند به حساب آورده شود، و آشوب‌هایی ملحوظ گردد که ویژگی مدل را به هم نزنند.

در این قسمت پایداری دو دسته از مدل‌های LP مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. یکی از این دستجات؛ مدل‌های LP به صورت متقارن می‌باشد. و دسته‌ی دیگر مدل‌های کلی LP می‌باشد که در آن‌ها ممکن است بعضی از قیود به صورت تساوی یا نامساوی بوده و بعضی متغیرها آزاد باشند.

۱۴-۲ پایداری در مدل‌های برنامه‌ریزی خطی به صورت

متقارن^۱

قبل از این‌که وارد بحث فوق شویم مطلبی را که مورد نیاز می‌باشد، بررسی می‌نماییم. ثابت کردیم که شرایط K.K.T برای بهینگی عبارتند از PF ، DF و CS که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$PF : \quad Ax \geq b \ \& \ x \geq 0$$

$$DF : \quad wA + v = c \ \& \ w, v \geq 0$$

$$CS : \quad w(Ax - b) = 0 \ \& \ vx = 0$$

مسائلی که در آن تابع مقصود، مشروط به قیدهایی می‌نیمیم می‌گردد که این قیدها، به صورت معادله می‌باشند را می‌توان با تکنیک ضرایب لاگرانژ حل نمود. وقتی قیدها به صورت نامساوی هستند، ضرایب لاگرانژ متناظر آن‌ها بایستی در محدودیت علامتی و شرایط مکمل زاید صدق

1) Stability in the Linear Programming in Symmetric Form

نماید. که این شرایط برای مسأله‌ی، زیر بایستی برقرار باشد، به صورتی که بیان می‌گردد

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

برای تابع لاگرانژ:

$$L(x, w, v) = cx - w(Ax - b) + -vx$$

به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = c - wA - v = 0$$

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

$$w(Ax - b) = 0$$

$$vx = 0$$

$$v \geq 0 \quad w \geq 0$$

بیان می‌گردد که همان شرایط K.K.T می‌باشد.

برای مسأله‌ی:

$$\begin{aligned} P : \quad \text{Min} \quad & Z(x) = cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

و دوآل آن یعنی:

$$D : \quad \text{Max} \quad W = wb$$

$$wA \leq c$$

$$w \geq 0$$

با تابع لاگرانژ:

$$L(x, w, v) = cx - w(Ax - b) - vx$$

نقطه (x^*, w^*, v^*) را نقطه زینتی^۱ تابع $L(x, w, v)$ گویند اگر $w^* \geq 0$ و $v^* \geq 0$ و

$$L(x, w^*, v^*) \geq L(x^*, w^*, v^*) \geq L(x^*, w, v)$$

برای هر $w \geq 0$ و $v \geq 0$ و هر x برقرار باشد.

۲۵-۱۴-۲ قضیه. نقطه‌ی (x^*, w^*, v^*) نقطه‌ی زینتی $L(x, w, v)$ است اگر و

فقط اگر x^* جواب بهینه‌ی مسأله‌ی P و w^* جواب بهینه‌ی مسأله‌ی D باشند که در آن

$$v^* = c - w^*A$$

برهان. فرض کنیم x^* بهینه‌ی P و w^* بهینه‌ی D باشند در این صورت:

$$L(x^*, w^*, v^*) = cx^* - w^*(Ax^* - b) - v^*x^*$$

با توجه به این‌که $v^*x^* = 0$ و $w^*(Ax^* - b) = 0$ داریم:

$$L(x^*, w^*, v^*) = cx^*$$

1) Saddle Point

بازاء هر x از ناحیه شدنی

$$\begin{aligned} L(x, w^*, v^*) &= cx - w^*(Ax - b) - v^*x \\ &= cx - w^*(Ax - b) - (c - w^*A)x = cx - w^*Ax + w^*b - cx + w^*Ax \\ &= w^*b \end{aligned}$$

$$L(x^*, w, v) = cx^* - w(Ax^* - b) - vx^* \leq cx^*$$

اما طبق فرض $cx^* = w^*b$

پس $L(x, w^*, v^*) \geq L(x^*, w^*, v^*) \geq L(x^*, w, v)$ حال فرض می‌کنیم که (x^*, w^*, v^*) نقطه‌ی زینی باشد. ثابت می‌کنیم x^* بهینه‌ی P و w^* بهینه‌ی D است. بازاء هر x داریم:

$$L(x, w^*, v^*) \geq L(x^*, w^*, v^*)$$

$$cx - w^*(Ax - b) - v^*x \geq cx^* - w^*(Ax^* - b) - v^*x$$

$$cx - w^*Ax + w^*b - v^*x \geq cx^* - w^*Ax^* + w^*b - v^*x^* \quad \text{یا}$$

$$(c - w^*A - v^*)x \geq (c - w^*A - v^*)x^* \quad (a')$$

بازاء هر x سمت راست a' مقدار ثابتی است. بایستی $c - w^*A - v^* = 0$ در غیر این صورت z یافت می‌شود که:

$$c_j - w^*a_j - v_j^* < 0$$

که در این صورت با انتخاب بردار $x > 0$ تا به اندازه کافی (از نظر قدرمطلق مؤلفه بزرگ) نامساوی بهم می‌خورد. عیناً اگر مؤلفه‌ی مثبت باشد نامساوی با انتخاب مناسب x برقرار نخواهد بود. پس مسأله‌ی دوآل شدنی است. عیناً می‌توان ثابت نمود پرابمال شدنی است و شرایط CS برقرار است.

توجه کنید که در مسأله‌ی P و D حالت تقارنی به صورت زیر وجود دارد تمامی قیدها به صورت نامساوی هستند (هم در P و هم در D) و متغیرها در هر دو نامنفی هستند، به خاطر

همین است که صورت P را صورت متقارن LP گویند. حال بحث اصلی را شروع می‌نمائیم. مسأله LP را به صورت متقارن یعنی:

$$P : \quad \text{Min} \quad cx$$

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

که در آن A ماتریسی از مرتبه $m \times n$ می‌باشد را در نظر می‌گیریم، و پایداری آن را در حالتی که A و b و c آشوب می‌شوند مورد مطالعه قرار می‌دهیم. فرض بر این است که تحت این تغییرات نامنفی بودن متغیرها عوض نمی‌شود. تمامی داده‌ها برای راحتی در ماتریسی به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A = \begin{pmatrix} A & \vdots & b \\ \dots & \dots & \dots \\ c & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

که در آن A ماتریسی است از مرتبه $(m+1)(n+1)$ ، عضوی که در سطر $m+1$ و ستون $n+1$ قرار گرفته همواره صفر می‌باشد. جز این عضو، تمامی اعضای باقیمانده از داده‌ها می‌باشند. حال تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\psi(A, x, w) = cx - w(Ax - b) = cx + wb - wAx$$

بردار $\bar{x} \in R^n$ و $\bar{w} \in R^m$ توأمأ در شرایط نقطه زینی متناظر پرایمال - دوآل LP های P و D صدق می‌کند اگر $\bar{x} \geq 0$ و $\bar{w} \geq 0$

$$\psi(A, \bar{x}, w) \leq \psi(A, \bar{x}, \bar{w}) \leq \psi(A, x, \bar{w}) \quad (30-2)$$

بازاء هر $x \geq 0$ ، $\pi \geq 0$.

توجه کنید در نوشتن تابع لاگرانژین در قسمت قبلی نامنفی بودن روی x ، به عنوان قید ملحوظ گردید و با ضریب بردار در تابع گنجانده شده است. از این رو نامساوی در شرط

نقطه‌ی پایداری که قبلاً ذکر شد بایستی بازاء هر $x \in R$ برقرار باشد. در این جا شرط نامنفی بودن x در تابع لاگرانژین گنجانده نشده است، بنابراین نامساوی در شرایط نقاط زینی که در این جا ذکر گردید بازاء هر $x \geq 0$ برقرار می‌باشد.

حال قضیه‌ی زیر را که جواب‌های بهینه P و D را با نقاط زینی $\psi(A, x, w)$ برقرار می‌نماید بیان و اثبات می‌کنیم. این قضیه بعداً در نتایج پایداری مدل‌های مسائل برنامه‌ریزی خطی متقارن به‌کار برده می‌شود.

۲-۱۴-۲ قضیه. اگر $\bar{x} \in R^m$ و $\bar{w} \in R^m$ آن‌گاه \bar{x} بهینه‌ی P و \bar{w} بهینه‌ی D

می‌باشند اگر و فقط اگر (\bar{x}, \bar{w}) تواماً در شرایط نقاط زینی ۲-۳۰ صدق نمایند.

توجه کنید که در این قسمت P همان مسأله متقارن LP و D دوآل متناظر آن می‌باشد.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر \bar{x} بهینه‌ی P و \bar{w} بهینه‌ی D باشد. آن‌گاه (\bar{x}, \bar{w}) یک

نقطه‌ی زینی $\psi(A, x, w)$ می‌باشد. با توجه به شرایط مکمل زائد و قضیه‌ی قوی دوآلیتی

داریم:

$$\bar{w}(A\bar{x} - b) = 0 \quad (۳۱-۲)$$

$$c\bar{x} = \bar{w}b \quad (۳۲-۲)$$

حال برای هر $w \geq 0$ داریم:

$$\psi(A, \bar{x}, w) = c\bar{x} - w(A\bar{x} - b) \leq c\bar{x} \quad (*)$$

زیرا $0 \leq A\bar{x} - b$ (به خاطر شدنی بودن پرایمال در \bar{x}) و با توجه به ۲-۳۱ داریم:

$$c\bar{x} = \psi(A, \bar{x}, \bar{w}) \quad (**)$$

و برای هر $x \geq 0$ داریم:

$$\psi(A, x, \bar{w}) = cx - \bar{w}(Ax - b) = (c - \bar{w}A)x + \bar{w}b$$

(زیرا $0 \leq c - \bar{w}A \leq 0$ بخاطر شدنی بودن دوآل در \bar{w}) $c\bar{x} \geq \bar{w}b = c\bar{x}$ به خاطر $\bar{\pi}b = c\bar{x}$ اما: ۳۱-۲

$$c\bar{x} = c\bar{x} - \bar{w}(A\bar{x} - b) = \psi(A, \bar{x}, \bar{w})$$

پس:

$$\psi(A, \bar{x}, w) \leq \psi(A, \bar{x}, \bar{w}) \leq \psi(A, x, \bar{w})$$

حال ثابت می‌کنیم که اگر ۲-۳ برقرار باشد، آنگاه \bar{x} بهینه‌ی P و \bar{w} بهینه‌ی D می‌باشند. با توجه به:

$$\psi(A, \bar{x}, w) \leq \psi(A, \bar{x}, \bar{w}) \leq \psi(A, x, \bar{w})$$

بازاء هر $0 \leq x \leq \pi$ داریم:

$$c\bar{x} - w(A\bar{x} - b) \leq c\bar{x} - \bar{w}(A\bar{x} - b) \quad (a)$$

و

$$c\bar{x} - \bar{w}(A\bar{x} - b) \leq cx - \bar{w}(Ax - b) \quad (b)$$

از (a) نتیجه می‌شود:

$$w(A\bar{x} - b) \geq \bar{w}(A\bar{x} - b) \quad w \geq 0 \quad \text{بازاء هر } (c)$$

از این نتیجه می‌شود که:

$$a^i \bar{x} - b_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

با توجه به این که سمت راست (c) مقدار ثابتی است با ملحوظ داشتن $0 \leq w$ و انتخاب مؤلفه‌ی متناظر به اندازه کافی بزرگ در مؤلفه‌ی موردنظر عدد منفی بسیار کوچکی به دست می‌آید که نمی‌تواند از مؤلفه‌ی متناظر آن در سمت راست بزرگ‌تر باشد، پس ناچاراً $A\bar{x} - b \geq 0$ و چون رابطه برای $0 \leq x$ برقرار است از $0 \leq \bar{x}$ پس \bar{x} ، جواب شدنی پرایمال می‌باشد. اینک ثابت می‌کنیم \bar{w} جواب شدنی دوآل است.

از (b) داریم بازاء هر $x \geq 0$

$$(c - \bar{w}A)\bar{x} \leq (c - \bar{w}A)x \quad (t)$$

بردار سمت چپ بردار ثابتی است، (t) بازاء هر $x \geq 0$ برقرار می‌باشد. با بخشی مشابه بحث بالا نتیجه می‌شود که:

بازاء هر $j, c_j - \bar{w}a_j \leq 0$ ، یعنی \bar{w} جواب شدنی دوآل می‌باشد.

اینک ثابت می‌کنیم که شرط CS نیز برقرار است. برای اثبات در ۲-۳ به جای $w = 0$

قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$c\bar{x} \leq c\bar{x} - \bar{w}(A\bar{x} - b)$$

یعنی $\bar{w}(A\bar{x} - b) \leq 0$ چون $\bar{w} \geq 0$ و $(A\bar{x} - b) \geq 0$ داریم:

$$\bar{w}(A\bar{x} - b) \geq 0$$

پس:

$$\bar{w}(A\bar{x} - b) = 0$$

عیناً اگر در ۲-۳ قرار دهیم $x = 0$ داریم:

$$c\bar{x} - \bar{w}(A\bar{x} - b) \leq \bar{w}b$$

یعنی پس:

$$(c - \bar{w}A)\bar{x} + \bar{w}b \leq \bar{w}b$$

یعنی، $(c - \bar{w}A)\bar{x} \leq 0$ از طرفی $c - \bar{w}A \geq 0$ و $\bar{x} \geq 0$ پس $(c - \bar{w}A)\bar{x} \geq 0$

پس $(c - \bar{w}A)\bar{x} = 0$ یعنی CS برقرار است و حکم ثابت است.

فرض کنیم S_P ناحیه‌ی شدنی P (پرایمال) و S_D ناحیه‌ی شدنی دوآل D و S_P^* و S_D^*

به ترتیب مجموعه‌ی جواب‌های بهینه‌ی P و D باشند. قضیه زیر را که شرط لازم و کافی برای

محدود بودن S_P^* و S_D^* می‌باشد را بیان و ثابت می‌کنیم.

قضیه ۲۷-۱۴-۲

(۱) S_P^* غیرخالی و محدود می‌باشد اگر و فقط اگر $S_P \neq \emptyset$ و هیچ $d \neq \emptyset$ یافت نشود که:

$$Ad \geq \emptyset \quad cd \leq \emptyset \quad d \geq \emptyset \quad (۳۳-۲)$$

(۲) S_D^* غیرخالی و محدود است اگر و فقط اگر S_D غیرخالی بوده و $\mu \neq \emptyset$ یافت نشود که:

$$\mu A \leq \emptyset \quad \mu b \geq \emptyset, \mu \geq \emptyset \quad (۳۴-۲)$$

برهان.

(۱) فرض کنیم $\phi \neq S_P^*$ و محدود باشد. طبق قضیه‌ی قوی دوآلیتی بایستی هم (P) و هم (D) شدنی باشند. بنابراین:

$$A^t w^t + I v = c \quad w \geq \emptyset \quad u \geq \emptyset$$

دارای جواب است. طبق لم فارکاس:

$$Ad \geq \emptyset \quad cd < \emptyset, y \geq \emptyset \quad (۳۵-۲)$$

دارای جواب نیست.

حال فرض کنیم که \bar{x} جواب بهینه‌ی پرایمال باشد. پس S_P^* مجموعه‌ی تمام جواب‌های شدنی $Ax \geq b$ و $x \geq \emptyset$ می‌باشد که $cx = c\bar{x}$. مطلب فوق معادل این است که مجموعه‌ی جواب‌های دستگانه:

$$Ax - Is = b$$

$$cx = c\bar{x}$$

$$x \geq \emptyset \quad s \geq \emptyset \quad (۳۶-۲)$$

غیرخالی و محدود می‌باشد. پس دستگاہ:

$$Ay - It = 0$$

$$cy = 0$$

$$y, t \geq 0$$

جوابی جز $(y, t) = (0, 0)$ ندارد (چرا؟) و این امر مستلزم آن است که:

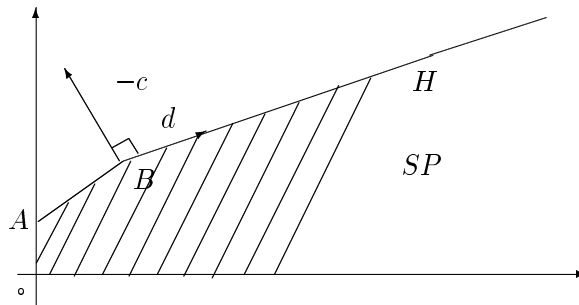
$$Ad \geq 0 \quad cd = 0 \quad d \geq 0 \neq 0 \quad (37-2)$$

دارای جواب نیست.

۳۷-۲ و ۳۵-۲ تماماً مستلزم ۳۳-۲ می‌باشند. تعبیر هندسی قضیه قبل چیست؟ برای تعبیر هندسی قضیه شکل (۲-۱۲) ملاحظه گردد. در این شکل همان طوری که در فصول قبل گفته شد. شرط:

$$Ad \geq 0 \quad d \geq 0, d \neq 0$$

شرط داشتن جهت دورشونده برای مجموعه SD می‌باشد. (کتاب اول ملاحظه گردد)



شکل (۲-۱۲)

در این شکل d جهت دورشونده SP است و $cd = 0$ و ملاحظه می‌گردد که S_P^* نامحدود می‌باشد.

شرایط ذیل که در بالا اثبات شد (شرط ۳۴-۲ عیناً اثبات می‌شود) یعنی شرایط:

الف. $d \neq 0$ ، $d \geq 0$ ، $cd \leq 0$ ، $Ad \geq 0$ دارای جواب نیست.

ب. $\mu \neq 0$ ، $\mu \geq 0$ ، $\mu b \geq 0$ ، $\mu A \leq 0$ دارای جواب نیست. به عنوان

شرایط منظمی^۱ برای قیدهای در پرایمال - دوآل P و D گویند.

(۲) اگر S_D^* و S_P^* هر دو غیرخالی باشند و محدود آن‌گاه شرایط الف و ب یعنی شرایط

۳۳-۲ و ۳۴-۲ برقرار می‌باشد.

بالعکس فرض کنیم شرایط ۳۳-۲ و ۳۴-۲ برقرار باشد. شرط ۳۳-۲ مستلزم شرط ۳۵-۲

می‌باشد، یعنی:

$$Ad \geq 0 \quad cd < 0 \quad y \geq 0$$

یعنی:

$$wA + Iv = c$$

$$w \geq 0 \quad v \geq 0$$

پس دوآل شدنی است. عیناً می‌توان ثابت کرد ۳۴-۲ مستلزم شدنی بودن پرایمال خواهد بود

(ثابت کنید). پس طبق قضیه قوی دوآلیتی $S_D^* \neq \emptyset$ و $S_P^* \neq \emptyset$. عیناً می‌توان ثابت کرد که

هر دو محدود می‌باشند (ثابت کنید).

به بیان دیگر شرایط منظمی برای مسائل پرایمال - دوآل به صورت زیر می‌باشد:

$$(۳۸-۲) \quad \text{بازاء هر } d \text{ که } Ad \geq 0, d \geq 0 \text{ آنگاه } cd > 0$$

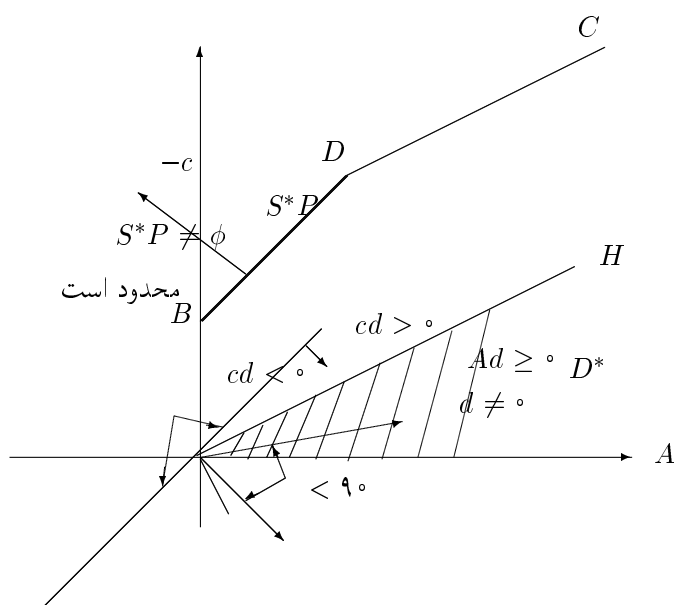
$$(۳۹-۲) \quad \text{بازاء هر } \mu \text{ که } \mu A \geq 0, \mu \geq 0 \text{ آنگاه } \mu b < 0$$

واضح است که ۳۸-۲ معادل ۳۳-۲ و ۳۹-۲ معادل ۳۴-۲ می‌باشد. ۳۸-۲ و ۳۹-۲ را از نظر

هندسی تعبیر می‌نمائیم. توجه داشته باشید که درک این تعبیر هندسی اساس کارها در بقیه‌ی

قسمت کار است.

1) Regularity Conditions



شکل (۲-۱۳) ناحیه شدنی $AOBDC$ می‌باشد.

در این شکل ناحیه‌ی هاشورزده شده تمامی جهت‌های دورشونده ناحیه شدنی $S_P = \{x | AX \geq b, x \geq 0\}$ می‌باشند. همان طوری که گفته شد اگر $d \neq 0$ جهت دورشونده ناحیه‌ی S_P باشد آن است که شرط لازم و کافی برای آن که $d \neq 0$ جهت دورشونده ناحیه‌ی S_P باشد آن است که $Ad \geq 0$ و $d \geq 0$ قسمتی که $cd < 0$ در شکل با علامت نشان داده شده از شکل ملاحظه می‌گردد که $d \in D^*$ که $cd > 0$. (روی شکل تعمق بیشتری بنمائید و تمامی جزئیات را بنویسید). توجه نمائید در شکل فوق دستگاه $d \neq 0$ و $Ad \geq 0$ و $d \geq 0$ و $cd \geq 0$ دارای جواب نیست یعنی $D^* \cap \{d | cd \leq 0\} = \emptyset$ در نتیجه $S_P^* \neq \emptyset$ و محدود است.

با این مقدمات به بحث اصلی می‌پردازیم.

فرض کنیم A^* یک ماتریس $m \times n$ و b^* یک بردار $m \times 1$ و C^* یک بردار $1 \times n$.

مسأله‌ی آشوب شده زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
 P^* : \quad & \text{Min} \quad (c + \lambda c^*)x \\
 & \text{s. t.} \quad (A + \lambda A^*)x \geq (b + \lambda b^*) \\
 & \quad \quad \quad x \geq 0
 \end{aligned} \tag{۲-۴۰}$$

و دوآل آن:

$$D^* : \quad \text{Max} \quad (b + \lambda b^*)$$

$$w(A + \lambda A^*) \geq (b + \lambda b^*)$$

$$w \geq 0 \quad (41-2)$$

ماتریس

$$A^* = \begin{pmatrix} A^* & \vdots & b^* \\ \dots & \dots & \dots \\ c^* & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

را ماتریس آشوب متناظر مسأله‌ی آشوب شده می‌نامیم.

مقدار بهینه‌ی تابع آشوب شده را به $f(\lambda, A^*)$ نشان می‌دهیم. در این جا شرایطی را برقرار می‌نمائیم که تحت آن شرایط؛ برای هر امکان انتخاب ماتریس آشوب A^* وجود داشته باشد، عددی مانند $0 < \alpha$ به طوری که بازاء هر $0 \leq \lambda \leq \alpha$ جواب بهینه شدنی داشته باشد؛ (یعنی $f(\lambda, A^*)$ موجود و متناهی باشد)؛ و $f(\lambda, A^*)$ پیوسته از راست گردد و

$$f'(\lambda, A^*) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\lambda, A^*) - f(0, A^*)}{\lambda}$$

موجود باشد. این حد یعنی $f'(\lambda, A^*)$ را مقدار حاشیه‌ای P نسبت به آشوب A^* می‌نامند. فرض کنیم S_{P^*} و S_{D^*} به ترتیب نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی جواب‌های شدنی P^* و مجموعه‌ی جواب‌های بهینه‌ی P^* باشند. عیناً S_{D^*} و S_{D^*} به ترتیب مجموعه‌ی جواب‌های شدنی D^* و مجموعه‌ی جواب‌های بهینه D^* باشند.

۲۸-۱۴-۲ قضیه. برای هر امکان انتخاب ماتریس آشوب A^* ، اگر عددی مانند $0 < \alpha$ وجود داشته باشد، به طوری که بازاء هر $0 \leq \lambda \leq \alpha$ ، مسائل آشوب شده P^* و D^* یعنی مسائل ۴۰-۲ و ۴۱-۲ دارای جواب شدنی باشند، آنگاه شرایط منظمی برقرار می‌باشد، یعنی ۳۳-۲ و ۳۴-۲.

برهان. فرض کنید $(1, 1, \dots, 1) = e_r \in R^r$. مسأله‌ی آشوب شده‌ای را در نظر بگیرید که $A^* = 0$ و $b^* = 0$ و $c^* = -e_n^t$. برای این انتخاب از ماتریس آشوب، طبق فرض قضیه عددی مانند $\tilde{\alpha}$ وجود دارد، به طوری که P^* یعنی $2-40$ و D^* یعنی $2-41$ دارای به ترتیب جواب بهینه‌ی $\tilde{x}(\lambda)$ و $\tilde{w}(\lambda)$ می‌باشند. (بازاء هر $0 \leq \lambda \leq \tilde{\alpha}$)

طبق آنچه اثبات شد داریم:

$$\begin{aligned} (c - \tilde{\alpha} e_n^t) \tilde{x}(\tilde{\alpha}) - \tilde{w}(\tilde{\alpha})(A \tilde{x}(\tilde{\alpha}) - b) &\leq \\ (c - \tilde{\alpha} e_n^t)x - \tilde{w}(\tilde{\alpha})(Ax - b) \quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (42-2)$$

اگر y ای وجود داشته باشد که $Ay \geq 0$ و $y \geq 0$ و $y \neq 0$ با قرار دادن:

$$x = \tilde{x}(\tilde{\alpha}) + y$$

با قرار دادن x در $2-42$ به دست می‌آید:

$$0 \leq (c - \tilde{\alpha} e_n^t)y - T \tilde{w}(\tilde{\alpha})Ay$$

چون $y \geq 0$ و $y \neq 0$ و $\tilde{\alpha} > 0$ و $\alpha e_n^t y > 0$ هم‌چنین چون $\tilde{w}(\tilde{\alpha}) \geq 0$ و $Ay \geq 0$ ، $2-14-28$ مستلزم آن است که:

$$cy > 0$$

و این بدان معنی است برقرار می‌باشد. از این رو $2-30$ برقرار می‌باشد.

اگر قرار دهیم $A^* = 0$ و $b^* = e_m$ و $c^* = 0$ عیناً می‌توان ثابت کرد (ثابت کنید که

رابطه $2-31$ برقرار می‌باشد).

۲-۱۴-۲۹ قضیه. اگر شرایط منظمی $2-30$ و $2-31$ برقرار باشد آن‌گاه برای هر انتخاب

ماتریس آشوب A^* ، عددی مانند $\alpha > 0$ وجود دارد به طوری که بازاء هر $0 \leq \lambda \leq \alpha$ مسائل آشوب شده P^* و D^* جواب بهینه شدنی دارد.

برهان. فرض کنید چنین نباشد. پس یک ماتریس آشوبی مانند A^* وجود دارد، به طوری که بازاء هر عدد مثبت α_1 به هر اندازه کوچک عدد مثبتی دیگری مانند $\alpha_h < \alpha_1$ که برای آن حداقل یکی از مسائل آشوب شده پرایمال یا دوآل نشدنی می‌باشند. برای $\lambda = \alpha_h$ ، A^* را طوری انتخاب کنید که در این شرط صدق کند و آن را از این به بعد ثابت بگیرد. فرض کنید مسأله‌ی آشوب شده پرایمال نشدنی باشد، یعنی وقتی $\lambda = \alpha_h$ ، دستگاه:

$$(A + \alpha_h A^*)x - I_m s = b + \alpha_h b^*, x \geq 0, s \geq 0$$

دارای جواب شدنی (x, s) نمی‌باشد. طبق لم فارکاس این مستلزم آن است که برداری مانند $\mu(\alpha_h)$ موجود باشد به طوری که:

$$\begin{aligned} \mu(\alpha_h)(A + \alpha_h A^*) &\leq 0 \\ \mu(\alpha_h)(b + \alpha_h b^*) &> 0 \\ \mu(\alpha_h) &\geq 0 \end{aligned} \quad (43-2)$$

واضح است که $\mu(\alpha_h) \neq 0$ می‌توان با تقسیم بر نرم اقلیدسی (در صورت ضرورت) فرض کرد که $\| \mu(\alpha_h) \| = 1$ به جای پرایمال آشوب شده، اگر دوآل آشوب شده آن نشدنی باشد (وقتی $\lambda = \alpha_h$) با به‌کار بردن همان بحث‌ها نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} (A + \alpha_h A^*)y(\alpha_h) &\geq 0 \\ \| y(\alpha_h) \| = 1 \quad y(\alpha_h) &\geq 0 \\ (c + \alpha_h c^*)y(\alpha_h) &< 0 \end{aligned} \quad (44-2)$$

با به‌کار بردن این بحث‌ها، یک دنباله نزولی یکنوا از اعداد مثبت $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ که متقارب به صفر می‌باشند به دست می‌آید که دارای خاصیت زیر می‌باشند:

برای $h = 1, 2, \dots$ یا دستگاه ۴۳-۲ دارای جوابی مانند $\mu(\alpha_h)$ با $\| \mu(\alpha_h) \| = 1$ یا ۴۴-۲ جوابی مانند $y(\alpha_h)$ دارد یا هر دو دارای جواب می‌باشند. چون برای $h = 1, 2, \dots$ یا ۴۳-۲ یا ۴۴-۲ هر دو دارای جواب می‌باشند، این امکان موجود است که از دنباله $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$

یک زیر دنباله‌ای مانند $\{\alpha_{g_i}\}_{i=1}^{\infty}$ انتخاب نمائیم، به طوری که برای $h = g_1, g_2, \dots$ یکی از دو دستگاه ۲-۴۳ یا ۲-۴۴ مثلاً ۲-۴۳ همواره جواب داشته باشد و $\|\mu(\alpha_{g_h})\| = 1$ حال دنباله‌ی $\{\mu(\alpha_{g_r})\}_{r=1}^{\infty}$ را در نظر بگیریم که: $\|\mu(\alpha_{g_r})\| = 1$ تمامی این بردارها روی کره‌ای به مرکز مبدا و به شعاع واحد قرار دارند. چون کره‌ای به شعاع واحد در R^m مجموعه‌ی فشرده است. از هر دنباله نامتناهی آن یک زیردنباله نامتناهی می‌توان انتخاب نمود که متقارب به نقطه حدی باشد. با به کار بردن این خاصیت یک زیر دنباله مانند:

$$\mu(\alpha^1), \mu(\alpha^2), \dots$$

انتخاب می‌کنیم به طوری که:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mu(\alpha^r) = \hat{\mu} \quad (\hat{\mu} \text{ روی مرز کره است})$$

چون $\alpha_{g_1}, \alpha_{g_2}, \dots, \alpha_{g_n}, \dots$ یکنوا نزولی هستند و به سمت صفر میل می‌نمایند، پس هر زیر دنباله از آن مانند:

$$\alpha^1, \dots, \alpha^n, \dots$$

نیز یکنوا نزولی است و به سمت صفر میل می‌کند پس $\hat{\mu}$ نیز در خاصیت:

$$\hat{\mu}A \leq 0 \quad \hat{\mu}b \geq 0 \quad \hat{\mu} \geq 0 \quad \mu \neq 0$$

صدق می‌نماید. که با ۲-۳۱ در تناقض می‌باشد.

اگر زیردنباله اولیه:

$$\alpha_{g_1}, \alpha_{g_2}, \dots, \alpha_{g_n}, \dots$$

به صورتی باشند که وقتی $h = g_1, \dots, \dots$ دستگاه ۲-۴۴ جواب داشته باشد، با به کار بردن بحثی مشابه آن چه گذشت $\hat{\mu}$ به دست می‌آید که با ۲-۳۱ در تناقض خواهد بود. بنابراین اگر ۲-۳۰ و ۲-۳۱ برقرار باشد، برای هر A^* ، همواره عدد مثبتی مانند α موجود است که S_{P^*} و S_{P^*} بازاء هر $\alpha \leq \lambda \leq 0$ غیرتهی است و این مستلزم آن است که P^* و D^* هر دو جواب بهینه داشته باشند.

۳۰-۱۴-۲ قضیه. اگر شرایط منظمی ۲-۳۰ و ۲-۳۱ برقرار باشد، آن‌گاه برای هر انتخاب از ماتریس آشوب A^* عددی مانند $\alpha' > 0$ موجود است به طوری که بازاء هر $0 \leq \lambda \leq \alpha'$ مسائل P^* و D^* هر دو دارای جواب بهینه هستند و $f(\lambda, A^*)$ وقتی λ در این بازه تغییر می‌کند محدود می‌باشد.

برهان. ماتریس آشوب A^* را انتخاب کنید و آن را ثابت نگهدارید. طبق قضیه‌ی قبل عدد مثبتی مانند α موجود است، به طوری که بازاء هر $0 \leq \lambda \leq \alpha$ ، هر دو مسأله‌ی P^* و D^* ، جواب بهینه می‌باشند، و $f(\lambda, A^*)$ موجود و در بازه‌ی $\lambda \in [0, \alpha]$ متناهی می‌باشد. حال ثابت می‌کنیم که عددی مانند $\alpha' < \alpha$ موجود است که $\alpha' \leq \alpha$ ، به طوری که برای λ حالتی که $0 \leq \lambda \leq \alpha'$ ؛ $f(\lambda, A^*)$ محدود می‌باشد. با به‌کار بردن همان بحث، مانند قضیه‌ی قبل این نتیجه به دست می‌آید. اگر بتوان نشان داد که وقتی:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

یک دنباله یکنواخت نزولی از اعداد مثبت که همه‌ی آن‌ها از α کمتر یا مساوی هستند به سمت صفر متقارب باشند، آن‌گاه مقادیر $f(\alpha_h, A^*)$ بازاء هر $h = 1, 2, \dots$ محدود می‌باشند. فرض کنید چنین نباشد آن‌گاه بایستی یک دنباله یکنوا نزولی از اعداد مثبت مانند:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$$

که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

به طوری که؛ برای $\alpha_h < \alpha$ و برای هر $h = 1, 2, \dots$ ، $\{f(\alpha_h, A^*)\}$ ، $h = 1, 2, \dots$ نامحدود می‌باشد.

فرض کنید $\bar{x}(\alpha_h)$ جواب بهینه P^* باشد وقتی $\lambda = \alpha_h$ برای $h = 1, 2, \dots$ و $\{f(\alpha_h, A^*) | h = 1, 2, \dots\}$ نامحدود باشد فقط زمانی که $\{g_1, g_2, \dots\}$ نامحدود باشد. در چنین حالتی این امکان وجود دارد که یک زیردنباله

$\{\bar{x}(\alpha_h) \mid h = g_1, g_2, \dots\}$ به صورتی انتخاب گردد $\{\|\bar{x}(\alpha_{g_r})\|\}_{r=1}^{\infty}$ یکنوا صعودی و به سمت $+\infty$ میل نماید. تعریف می‌کنیم:

$$y(\alpha_{g_r}) = \frac{\bar{x}(\alpha_{g_r})}{\|\bar{x}(\alpha_{g_r})\|}, \quad r = 1, 2, \dots$$

از این تعریف داریم:

$$\begin{aligned} (A + \alpha_h A^*)\bar{x}(\alpha_h) &\geq b + \alpha_h b^* \\ (c + \alpha_h c^*)\bar{x}(\alpha_h) &= f(\alpha_h, A^*) \end{aligned} \quad (45-2)$$

بنابراین به دست می‌آید:

$$(A + \alpha_{g_r} A^*)y(\alpha_{g_r}) \geq (b + \alpha_{g_r} b^*) / \|\bar{x}(\alpha_{g_r})\| \quad r = 1, 2, \dots \quad (46-2)$$

همین طور داریم $y(\alpha_{g_r}) \geq 0$ و $\|y(\alpha_{g_r})\| = 1$ برای $(r = 1, 2, \dots)$ پس $y(\alpha_{g_r}) \geq 0$ بازا هر $r (r = 1, 2, \dots)$ روی کره‌ای به شعاع واحد قرار خواهند گرفت که یک مجموعه‌ی فشرده می‌باشد. بنابراین این امکان وجود دارد که زیردنباله‌ای مانند دنباله‌ی $(y(\alpha_{g_r}))_{r=1}^{\infty}$ انتخاب گردد که آن را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$y(\alpha^1), y(\alpha^2), \dots, y(\alpha^n), \dots$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(\alpha^n) = \bar{y}$$

\bar{y} نیز روی کره مذکور قرار می‌گیرد. این مستلزم آن خواهد بود که $\bar{y} \geq 0$ و $46-2$ داریم:

$$(A + \alpha^p A^*)y(\alpha^p) \geq (b + \alpha^p b^*) / \|\bar{x}(\alpha^p)\| \quad (47-2)$$

چون $\{\alpha^p\}_{p=1}^{\infty}$ زیردنباله‌ای از $\{\alpha_r\}_{r=1}^{\infty}$ می‌باشد و $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha_r = 0$ پس:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha^p = 0$$

بنابراین $A\bar{y} \geq 0$ ، زیرا:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\bar{x}(\alpha^p)\| = \infty$$

چون $\bar{y} \leq 0$ و $A\bar{y} \geq 0$ بایستی داشته باشیم $c\bar{y} > 0$. اما:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f(\alpha^p, A^*) / (\|\bar{x}(\alpha^p)\|) = c\bar{y}$$

(با توجه به ۲-۴۵) از این رو این حد اکیداً مثبت می‌باشد. بنابراین:

$$f(\alpha^p, A^*) > 0 \quad \text{بازاء هر } p \quad (۲-۴۸)$$

حال فرض می‌کنیم که $\bar{w}(\alpha^p)$ جواب بهینه مسأله‌ی D^* باشد بنابراین وقتی:

$$\lambda = \alpha^p \quad p = 1, 2, \dots$$

داریم:

$$\bar{w}(\alpha^p)(A + \alpha^p A^*) \leq (c + \alpha^p c^*) \quad (۲-۴۹)$$

$$\bar{w}(\alpha^p)(b + \alpha^p b^*) = f(\alpha^p, A^*) \quad (۲-۵۰)$$

چون $\{f(\alpha^p, A^*) | p = 1, 2, \dots\}$ نامحدود است، از ۲-۵۰ داریم $\{\bar{w}(\alpha^p) | p = 1, 2, \dots\}$ نیز نامحدود می‌باشد بنابراین امکان انتخاب دنباله‌ای مانند $\{\bar{w}(\alpha_{q_r})\}_{r=1}^{\infty}$ از دنباله فوق وجود دارد که $\|\bar{w}(\alpha_{q_r})\| > 0$ (بازاء هر r) و این دنباله یکنوا صعودی و حد آن $+\infty$ باشد. فرض کنید:

$$\mu(\alpha_{q_r}) = \bar{w}(\alpha_{q_r}) / \|\bar{w}(\alpha_{q_r})\|$$

با به‌کار بردن همان روش قبلی می‌توان زیر دنباله‌ای از $\{\mu(\alpha_{q_r})\}_{r=1}^{\infty}$ انتخاب نمود که حد این زیردنباله $\bar{\mu}$ باشد که $\bar{\mu}A \leq 0$ و $\bar{\mu} \geq 0$ و

$$\bar{\mu}b = \lim_{t \rightarrow \infty} f(\alpha_t, A^*) / \bar{w}(\alpha_t)$$

و با توجه به این‌که $\bar{\mu}b < 0$ پس خواهیم داشت:

$$f(\alpha_t, A^*) < 0$$

و این متناقض با ۲-۴۸ می‌باشد. از این رو $\{f(\alpha_h, A^*)\}_{h=1}^{\infty}$ محدود می‌باشد.

۳۱-۱۴-۲ قضیه. فرض کنید شرایط منظمی برای P و D برقرار می‌باشد ماتریس آشوب A^* را انتخاب نمایید و آن را ثابت نگهدارید. عددی مانند $\alpha' < \circ$ انتخاب نمایید. (مانند آنچه در قضیه‌ی (۲-۱۶-۲۹) گذشت) فرض کنید $\{\alpha_h\}_{h=1}^{\infty}$ یک دنباله یکنوا نزولی از اعداد مثبت باشد که:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \alpha_h = \circ$$

که در آن:

$$\alpha \leq \alpha' \quad h = 1, 2, \dots$$

فرض کنید $\bar{x}(\alpha_h)$ و $\bar{w}(\alpha_h)$ به ترتیب جواب‌های بهینه‌ی D^* و P^* باشند (وقتی $\lambda = \alpha_h$) آن‌گاه دنباله‌های $\{\bar{x}(\alpha_h)\}_{h=1}^{\infty}$ و $\{\bar{w}(\alpha_h)\}_{h=1}^{\infty}$ محدود می‌باشند برهان. فرض کنید که این دنباله‌ها محدود نباشند (فرض خلف)، مثلاً $\{\bar{x}(\alpha_h)\}_{h=1}^{\infty}$ نامحدود باشد. در این حالت امکان انتخاب یک زیردنباله مانند:

$$\{\bar{x}(\alpha_h) | h = g_1, g_2, \dots\}$$

به طوری که $\|\bar{x}(\alpha_{g_r})\|$ ، $r = 1, 2, \dots$ اکیداً یکنوا اکیداً صعودی است و به سمت $+\infty$ میل می‌نماید، تعریف می‌کنیم:

$$y(\alpha_{g_r}) = \bar{x}(\bar{\alpha}_{g_r}) / (\|\bar{x}(\alpha_{g_r})\|)$$

برای $r = 1, 2, \dots$ از دنباله $\{y(\alpha_{g_r})\}_{r=1}^{\infty}$ می‌توان یک زیردنباله‌ای انتخاب نمود که به سمت حدی مانند \bar{y} میل نماید (مانند قضیه (۲-۱۶-۲۹)) که در شرایط:

$$A\bar{y} \geq \circ \quad \bar{y} \geq \circ$$

صدق می‌نماید و داریم:

$$(c + \alpha_{g_r} c^*)y(\alpha_{g_r}) = f(\alpha_{g_r}, A^*) / \|\bar{x}(\alpha_{g_r})\|$$

طبق قضیه (۲-۱۶-۲۹) $f(\alpha_{g_n}, A^*)$ محدود می‌باشد و خواهیم داشت $c\bar{y} = 0$ یعنی:

$$A\bar{y} \geq 0 \quad \bar{y} \geq 0, \bar{y} \neq 0 \quad c\bar{y} = 0$$

که تناقض می‌باشد. پس $\{\bar{x}(\alpha_h)\}_{h=1}^{\infty}$ محدود است. عیناً می‌توان ثابت کرد که:

$$\{\bar{w}(\alpha_h)\}_{h=1}^{\infty}$$

محدود می‌باشد.

۱۵-۲ تفسیر اقتصادی منظمی

۳۲-۱۵-۲ شرایطی بر تحلیل فعالیت مدل. تجارت خانه‌ای را در نظر بگیرید که n

نوع فعالیت دارد و m نوع محصول تولید می‌کند.

فرض کنید:

$c_j =$ هزینه‌ی انجام یک واحد از فعالیت j باشد ($j = 1, \dots, n$)

$a_{ij} =$ اگر i امین کالا نه به عنوان خروجی تولید گردد و نه به عنوان ورودی در فعالیت j مورد نیاز باشد.

$a_{ij} > 0$ تعداد i امین کالا تولید شده به عنوان خروجی وقتی فعالیت j یک واحد صورت گرفته است

$a_{ij} < 0$ تعداد i امین کالای مورد نیاز به عنوان ورودی وقتی فعالیت j یک واحد صورت می‌گیرد.

$b_i =$ می‌نیم مقدار از کالای i ام که توسط این کمپانی بایستی تولید گردد.

$$A = [a_{ij}]^{m \times n}$$

$$b = (b_1, \dots, b_m)^t$$

$$c = (c_1, \dots, c_n)$$

فرض کنید x_j سطح فعالیت j باشد که صورت گرفته است و $x = (x_1, \dots, x_n)^t$.
 x را می‌توان به عنوان نقشه تولید ملحوظ داشت، تحلیل فعالیت مدل برای تجارت خانه، عبارت است از برآورد محصول خواسته شده و با حداقل هزینه‌ی کلی که به صورت مسأله‌ی

زیر فرموله می‌گردد:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad cx \\ P : & \quad \text{s. t.} \quad Ax \geq b \\ & \quad \quad \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

(با داده‌های داده شده در A و b و c .)

و مسأله فوق عبارت است از انتخاب سطوح نامنفی از متغیرهای x_1, \dots, x_n که محصولات خواسته شده با حداقل هزینه‌ی کلی برآورد نماید. شرایط منظم بودن مسأله‌ی P عبارت است از نبودن μ ی که در شرایط ذیل صدق نماید:

$$\mu A \leq 0 \quad \mu b \geq 0 \quad \mu \geq 0 \quad \mu \neq 0$$

با توجه به قضیه تا کر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & (-A^t)\mu^t \geq 0 \quad b^t \mu^t \geq 0 \quad I\mu \geq 0 \quad \mu \neq 0 \\ I) & \begin{cases} I\mu^t \geq 0 \quad \mu \neq 0 \\ \begin{pmatrix} -A^t \\ b^t \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases} \quad \text{جواب ندارد} \\ II) & \begin{cases} (x^t, y) \begin{pmatrix} -A^t \\ b^t \end{pmatrix} + wI^t = 0 \\ x^t \geq 0, \quad w > 0 \end{cases} \quad \text{دارای جواب است} \\ & Ax - by + wI = 0 \\ & w > 0 \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که $Ax > b$ (چگونه؟ دقیقاً مطلب را توضیح دهید) این شرط فقط و فقط وقتی برقرار است که تجارت خانه قادر به تولید صورت کالا، اکیداً بزرگتر از b باشد،

به عبارت دیگر، درخواست تولید بردار b از کالاهای موردنظر، تمام توان تولید کمپانی را به تحلیل نمی برد.
شرط منظم بودن:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & wb \\ \text{s. t.} \quad & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

آن است که دستگاہ زیر دارای جواب نباشد.

$$Ad \geq 0 \quad d \geq 0 \quad d \neq 0 \quad cd < 0$$

یعنی برای هر بردار نیمه مثبت d که $Ad \geq 0$ بایستی از نظر اقتصادی $cd > 0$ این بدان معنی است که برای هر نقشه تولید، که صورت وضعیت از کالاها را تولید می کند (یعنی نتیجه مقدار خالص نامنفی به عنوان خروجی از کالاها می باشد)، مقدار کالا یا صفر است و یا متناظر هزینه مثبتی می باشد.

۱۶-۲ پایداری در مدل کلی برنامه ریزی خطی

در این جا صورت کلی مدل برنامه ریزی خطی را در نظر می گیریم، که در آن ممکن است بعضی از قیود صورت تساوی و بعضی صورت نامساوی داشته باشد و بعضی از متغیرهای ساختاری آزاد و برخی نامنفی انتخاب شوند. با توجه به آن چه گفته شد به جای هر قید به صورت:

$$a_{i_1}x_1 + \dots + a_{i_n}x_n = b_i$$

می توان دو نامساوی:

$$a_{i_1}x_1 + \dots + a_{i_n}x_n \geq b_i$$

$$a_{i_1}x_1 + \dots + a_{i_n}x_n \leq b_i \quad (51-2)$$

را قرار داد. اگر متغیر x_i آزاد باشد می‌توان نوشت:

$$x_i = x_i^+ - x_i^-$$

$$x_i^+, x_i^- \geq 0$$

با به‌کار بردن این تبدیلات مدل برنامه‌ریزی خطی کلی به صورت مدل برنامه‌ریزی خطی متقارن تبدیل می‌گردد. به هر حال هر یک از تبدیلات فوق که صورت پذیرد، LP متقارن حاصل همواره ناپایدار خواهد بود حتی اگر مدل اولی پایدار باشد. برای مثال و توضیح فرض کنید که LP حاصل از تغییرات و تبدیلات صورت متقارن P را دارد که، یک زوج قیود از نوع ۲-۵۱ را دارا می‌باشد. فرض کنید $\bar{\mu}$ بردار ضرایب متناظر قیدهای این LP باشد که در آن $\bar{\mu}_i$ ‌های متناظر این زوج قید هر دو عدد ۱ و بقیه‌ی μ_i ‌ها صفر باشند، داریم:

$$\bar{\mu}A = (0, \dots, 1, 1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} \vdots \\ -a^i \\ a^i \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{\mu}b = (0, \dots, 1, 1) \begin{pmatrix} \vdots \\ -b_i \\ b_i \\ \vdots \end{pmatrix} = 0, \quad \bar{\mu} \neq 0, \quad \bar{\mu} \geq 0$$

یعنی دستگاه:

$$\mu A \leq 0 \quad \mu b \geq 0 \quad \mu \geq 0 \quad \mu \neq 0$$

دارای جواب می‌باشد. یعنی شرط منظم بودن برقرار نمی‌باشد.

حال نشان می‌دهیم در حالتی که به‌جای:

$$x_i = x_i^+ - x_i^-$$

$$x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0$$

در این حالت نیز شرط منظم بودن برقرار نخواهد بود.

کافی است در این حالت دوآل مسئله را در نظر بگیریم و استدلالی مشابه استدلال فوق را بیان نمائیم (دقیقاً این مطلب را روی کاغذ بیاورید). البته در این حالت شرط منظم بودن دوآل مسئله برقرار نخواهد بود.

برای مطالعه عمیق‌تر در این زمینه به [۱] مراجعه شود.

۱۷-۲ مسئله‌ی مکمل خطی (LCP)^۱

فرض کنید $M = [m_{ij}]$ یک ماتریس مربع از مرتبه‌ی n بوده و $q \in R^n$ بردار ثابت و $z \in R^n$ و $w \in R^n$ دو بردار از متغیرها به صورت $Z = (z_1, \dots, z_n)$ و $W = (w_1, \dots, w_n)$ باشند؛ آنگاه مسئله‌ی مکمل خطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} w = q + Mz \\ z^t w = 0 \\ w, z \geq 0 \end{cases} \quad (۵۲-۲)$$

در این جا زوج (w_i, z_i) ($i = 1, \dots, n$) را زوج مکمل گویند. بحث در رابطه با مسئله‌ی L.C.P بسیار مفصل است و مقالات بسیار زیادی در رابطه با آن به چاپ رسیده است. ما در اینجا درصدد وارد شدن به مسئله نیستیم و فقط می‌خواهیم ثابت کنیم که هر LP و دوآل آن منجر به حل یک مسئله‌ی L.C.P می‌گردد. در جلد‌های آینده این سری از کتاب‌ها یک جلد مختص این مسئله نوشته خواهد شد. در حالتی که M دارای ساختارهای متفاوتی باشد، الگوریتم‌های خاصی جهت حل آن ارائه شده‌است. علاقه‌مندان می‌توانند به منابع [۷]،

1) The Linear Complomentary Problem

۸] مراجعه نمایند. یک مسأله برنامه‌ریزی خطی متقارن به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = cx \\ P : \quad & \text{s. t.} \quad Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

دوآل آن چنین است:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & W = wb \\ P : \quad & \text{s. t.} \quad wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

مسائل P و D را به صورت استاندارد برمی‌گردانیم؛ داریم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = cx + 0u \\ P' : \quad & Ax - Iu = b \\ & x, u \geq 0 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & W = wb + 0v \\ D' : \quad & wA + vI = c \\ & w, v \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید (x°, u°) بهینه‌ی P' و (w°, v°) بهینه‌ی D' باشند. طبق شرایط K.K.T داریم:

$$P.F \begin{cases} Ax^\circ - Iu^\circ = b \\ x^\circ, u^\circ \geq 0 \end{cases} \quad D.F \begin{cases} w^\circ A + v^\circ I = c \\ w^\circ, v^\circ \geq 0 \end{cases}$$

و

$$C.S \begin{cases} w^\circ (Ax^\circ - b) = \circ \\ (c - w^\circ A)x^\circ = \circ \end{cases}$$

دستگاه‌های فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u = -b + Ax$$

$$v = c - A^t w$$

$$wu = \circ, \quad vx = \circ$$

یا

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & -A^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$$

$$(w, v) \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} = \circ$$

$$M = \begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & -A^t \end{pmatrix} (w, v) \geq \circ \quad (u, v) \geq \circ$$

با قرار دادن $(w, v) = W$ و $(u, v) = Z$ و $q = (-b, c)^t$ مسأله‌ی زیر حاصل می‌گردد؛که یک مسأله L.C.P است و از حل آن جواب هر دو مسأله P' و D' به دست می‌آید:

$$w = q + Mz$$

$$z^t w = \circ$$

$$w, z \geq \circ$$

بازی‌های دو نفره با جمع صفر^۱ ۱۸-۲

دو بازیکن A و B را در نظر بگیرید که رقیب همدیگر می‌باشند و کاملاً به کار خود مسلط می‌باشند.

ماتریسی مانند $A = [a_{ij}]^{m \times n}$ را در نظر بگیرید که ماتریسی بده-بستان (pay-off) نامیده

1) Two-Person Zero-Sum Games

می شود به صورت زیر:

		بازیکن B					
		۱	۲	...	j	...	n
بازیکن A	۱						⋮
	۲						⋮
	⋮						⋮
	i	a_{ij}
	⋮						⋮
	m						⋮

اگر بازیکن A استراتژی i و بازیکن B استراتژی j را انتخاب نماید مقدار a_{ij} مبلغ بازی خواهد بود. اگر $a_{ij} > 0$ بازیکن A برده و اگر $a_{ij} < 0$ بازیکن A باخته است. با توجه به این که هر دو بازیکن به کار خود آگاهی کامل دارند چه استراتژی A و چه استراتژی B انتخاب نماید که برد A ماکزیمم و باخت B می نیمم گردد (فرض آن است که اول A بازی می کند و بعد B). مطلب را با یک مثال عددی توضیح می دهیم.

مثال ۲-۱۸-۳۳. دو بازیکن A و B را در نظر بگیرید که جدول پرداختی آنها به صورت

زیر می باشد:

		بازیکن B			$\min_j a_{ij}$
		۱	۲	۳	
بازیکن A	۱	۱	۲	۳	۱
	۲	۴	۵	۶	۴
	۳	۷	۸	۹	۷
\max_i		۷	۸	۹	

بازیکن A به این صورت استدلال می کند. اگر استراتژی ۱ را انتخاب کنم حداقل یک واحد برنده می شوم و اگر ۲ را انتخاب نمایم حداقل ۴ واحد و اگر ۳ را انتخاب نمایم حداقل ۷ واحد برنده می گردم.

بازیکن B چنین استدلال می‌نماید. اگر استراتژی ۱ را انتخاب نماید حداکثر ۷ واحد می‌بازم و اگر ۲ را انتخاب نماید حداکثر ۸ واحد می‌بازم و اگر ۳ را انتخاب کنم حداکثر ۹ واحد می‌بازم.

پس A استراتژی را انتخاب می‌نماید که حداقل برد را ماکزیمم کند یعنی:

$$\text{Max}_i(\text{Min}_j a_{ij}) = 7$$

و B استراتژی را انتخاب می‌نماید که حداکثر باخت او را می‌نیمم کند:

$$\text{Min}_j(\text{Max}_i a_{ij}) = 7$$

در این جا ملاحظه می‌گردد:

$$\text{Max}_i(\text{Min}_j a_{ij}) = \text{Min}_j(\text{Max}_i a_{ij}) = 7$$

حال مثال دیگری را در نظر بگیرید:

جدول پرداختی بازیکن‌های A و B به صورت زیر می‌باشند:

	۱	۲	۳	۴	$\text{min}_j a_{ij}$	
A	۱	۵	-۱۰	۹	۰	-۱۰
	۲	۶	۷	۸	۱	۱
	۳	۸	۷	۱۵	۲	۲
	۴	۳	۴	-۱	۴	-۱
$\text{Max}_i a_{ij}$	۸	۷	۱۵	۴	۲	

در این:

$$\text{Min}_j \text{Max}_i a_{ij} = 4$$

و

$$\text{Max}_i \text{Min}_j a_{ij} = 2$$

که

$$\text{Min}_j \text{Max}_i(a_{ij}) \neq \text{Max}_i(\text{Min}_j a_{ij})$$

گویند در این بازی نقطه زینی ندارد و برای بازیکن‌ها استراتژی محض^۱ موجود نیست. از این رو به دنبال استراتژی مختلط^۲ می‌رویم. حال در حالت کلی بازیکن A را با m استراتژی و بازیکن B را با n استراتژی در نظر می‌گیریم که ماتریس پرداختی $n \times m = [a_{ij}]$ می‌باشد، به صورت زیر:

		بازیکن B					
		۱	۲	...	j	...	n
بازیکن A	۱						⋮
	۲						⋮
	⋮						⋮
	i	a_{ij}
	⋮						⋮
	m						⋮

فرض کنیم $x = (x_1, \dots, x_n)$ بردار احتمال انتخاب بازیکن B و $y = (y_1, \dots, y_m)$ بردار احتمال انتخاب بازیکن A باشد؛ بدین معنی که x_j احتمال انتخاب استراتژی j از طرف بازیکن B و y_i احتمال انتخاب استراتژی i از طرف بازیکن A باشد. واضح است که:

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1 \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

و

$$\sum_{i=1}^m y_i = 1 \quad y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

بازیکن A بدین صورت استدلال می‌کند. اگر بازیکن B استراتژی j را انتخاب کند با انتخاب برد از y امید بردی به صورت زیر دارم:

$$E_j^A = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \quad j = 1, \dots, n$$

پس بایستی من y_1, \dots, y_m را طوری انتخاب نمایم که:

$$\text{Min}_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \right) = \text{Min}_{1 \leq j \leq n} (E_j)$$

1) Pure Strategy 2) Mixed Strategy

را ماکزیمیم نمایم:

یعنی y ها بایستی طوری انتخاب شود که:

$$\text{Max}_{1 \leq j \leq n} \text{Min}_{i=1}^m \left(\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \right)$$

بازیکن B نیز به همان صورت استدلال می‌نماید. او می‌گوید که اگر بازیکن A استراتژی i را انتخاب نماید با انتخاب بردار x امید باختی به صورت:

$$e_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \quad i = 1, \dots, m$$

پس بایستی x را طوری انتخاب نمایم که ماکزیمیم e_i ($i = 1, \dots, m$) می‌نیمم گردد یعنی:

$$\text{Min}_{1 \leq i \leq m} \text{Max}_{j=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)$$

اگر قرار دهیم:

$$\text{Min}_{1 \leq j < n} \left(\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \right) = h$$

و

$$\text{Max}_{1 \leq i < m} \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j \right) = g$$

پس مسأله‌ی بازیکن A عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} & \text{Max} \quad h \\ & \text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq h \quad j = 1, \dots, n \\ & \quad \quad \sum_{i=1}^m y_i = 1 \\ & \quad \quad y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

و مسأله‌ی بازیکن B عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} \text{Min } & g \\ \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq g \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n x_j = 1 \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

می‌توان همواره فرض نمود که $g > 0$ و h (چرا؟ به دقت این مطلب را ثابت کنید. چون اساس کار در آینده است) پس با تقسیم نامساوی‌ها و مساوی‌های مربوط به g و h دو مسأله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \text{Max } h = \text{Min } \frac{1}{h} &= \text{Min } \sum_{i=1}^m \frac{y_i}{h} \\ \text{s. t. } & \sum a_{ij} \frac{y_i}{g} \geq 1 \\ \text{بازیکن } A & \quad \sum \frac{y_i}{g} = \frac{1}{h} \\ & y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min } g = \text{Max } \frac{1}{g} &= \text{Max } \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{g} \\ \text{s. t. } & \sum a_{ij} \frac{x_j}{g} \leq 1 \\ & \sum \frac{x_j}{g} = \frac{1}{g} \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

با قرار دادن:

$$(j = 1, \dots, n) \quad x_j/g = X_j$$

$$(i = 1, \dots, m) \quad y_i/h = Y_j$$

دو مسأله زیر به دست می‌آید که دوآل یکدیگر می‌باشند.

برای بازیکن A :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^m Y_i \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i=1}^m Y_i a_{ij} \geq 1 \quad j = 1, \dots, m \\ & Y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

برای بازیکن B داریم:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{j=1}^n X_j \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \\ & X_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

ملاحظه می‌گردد که با حل یک مسأله L.C.P استراتژی مختلط دو بازیکن A و B جهت رسیدن به نقطه زینی، یعنی نقطه‌ای که A حداکثر برد ممکن و B حداقل باخت ممکن را دارد و احتمال در اینجا به معنی تعداد تکرار نسبت به کل تکرار بازی می‌باشد.

مثال. ۳۴-۱۸-۲. یک بازی دو نفره با جمع صفر با ماتریس پرداختی زیر را در نظر

بگیرید:

		B			
		۱	۲	۳	می‌نیمم سطری
A	۱	۳	-۱	-۳	-۳
	۲	-۳	۳	-۱	-۳
	۳	-۴	-۳	۳	-۴
ماکزیمم سطری		۳	۳	۳	

$$\max_i (\min_j a_{ij}) = -3 \neq \min_j (\max_i a_{ij}) = 3$$

پس بازی نقطه زینی با استراتژی محض ندارد. از این رو از استراتژی مختلط جهت به دست آوردن آن استفاده می‌گردد. با توجه بدان چه گفته شد، مسأله عبارت است از حل LP زیر:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & X_1 + X_2 + X_3 \\ \text{s. t.} \quad & 8X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 1 \\ & 2X_1 + 8X_2 + 4X_3 \leq 1 \\ & X_1 + 2X_2 + 8X_3 \leq 1 \\ & X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

توجه. برای سهولت امر به اعضای جدول پرداختی عدد ۵ اضافه شده است (علت این امر قبل به عنوان تمرین داده است که از حل آن استراتژی بهینه به صورت زیر به دست می‌آید دقیقاً مسأله را حل نمائید) برای B :

$$x_1^* = \frac{14}{45}, x_2^* = \frac{11}{45}, x_3^* = \frac{20}{45}$$

و برای A :

$$y_1^* = \frac{20}{45}, y_2^* = \frac{11}{45}, y_3^* = \frac{14}{45}$$

و

$$z^* = w^* = \frac{45}{196}$$

۱۹-۲ خلاصه فصل دوم

در این فصل فرم استاندارد دوآلیتی برای مسأله‌ی

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z(x) = cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (53-2)$$

به صورت:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & W(w) = wb \\ \text{s. t.} \quad & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

تعریف شد و اثبات شد که دوآل یک LP، خود آن می باشد.

در این فصل صورت مختلط دوآلیتی بیان شد و بیان گردید که ضرورتی ندارد برای نوشتن دوآل یک مسأله آن را به صورت کانونی برگردانیم (یادآور می شویم که ۲-۵۲ صورت کانونی یک مسأله برنامه ریزی خطی می باشد)

تفسیر اقتصادی دوآل از بعد اقتصادی، از منظر مدیریتی و جبری بیان گردید که توصیه می گردد در این بخش در مطالعه ی مطالب تعمق بیشتری صورت گیرد.

در قضیه ضعیف دوآلیتی که بیان کننده رابطه ی بین پرایمال و دوآل می باشد مطالب زیر

ثابت کنید:

(۱) اگر x^0 جواب شدنی پرایمال و w^0 جواب شدنی دوآل باشد در این صورت:

$$cx^0 \geq w^0 b$$

(۲) اگر \bar{x} و \bar{w} به ترتیب جواب های شدنی برای دوآل و پرایمال باشند، به طوری که

$$c\bar{x} = \bar{w}b$$

در این صورت \bar{w} بهینه ی دوآل و \bar{x} بهینه ی پرایمال می باشد (این مطلب تحت عنوان

اصل راهنما بیان شد.) و از دو قضیه ی بالا نتایج زیر حاصل گردید.

الف. اگر دوآل نامحدود باشد، پرایمال نشدنی است ولی نشدنی بودن پرایمال، نامحدود بودن

دوآل را نتیجه نمی دهد. ثابت شد که اگر x^* بهینه ی پرایمال و w^* بهینه دوآل باشد داریم:

$$\begin{cases} w^*(Ax^* - b) = 0 \\ (c - w^*A)x^* = 0 \end{cases}$$

این مطلب تحت عنوان شرایط مکمل زاید بیان گردید (توجه کنید که اصل راهنما نتیجه همین مطلب است. چرا؟)

در تفسیر اقتصادی دوال گفتیم که اگر یکی از مؤلفه های بردار b ، مثلاً b_i تغییر کند در صورتی که $f^*(b)$ مقدار بهینه تابع باشد، f^* تابعی از b_i خواهد بود. اگر f^* در b_i مشتق پذیر باشد

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = \frac{\partial f^*}{\partial b_i} = w_i^* = c_B B_i^{-1}$$

که w_i^* میزان تغییرات مقدار بهینه ی تابع مقصود بازاء یک واحد از افزایش b_i می باشد (یعنی وقتی b_i تبدیل می شود به $b_i + 1$) که رابطه بین مقدار بهینه تابع مقصود قدیم و جدید برحسب این که b_i به $b_i + 1$ یا $b_i - 1$ تبدیل شود به صورت $Z^* = Z^*_{\text{قدیم}} \pm w_i^*$ می باشد. w_i^* را به عنوان بردار قیمت سایه برای منابع سمت راست یعنی b گویند.

در حالتی که $f^*(b_i)$ در نقطه b_i مشتق پذیر نباشد، در این صورت از مشتق چپ و راست استفاده می گردد و قیمت سایه به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\frac{\partial^+ z^*}{\partial b_i} = \text{Max}\{w_i^j \mid w_i^j \text{ یک نقطه ی رأسی بهینه دوال در } b_i \text{ است}\} = \text{قیمت سایه راست}$$

$$\frac{\partial^- z^*}{\partial b_i} = \text{Min}\{w_i^j \mid w_i^j \text{ یک نقطه ی رأسی بهینه دوال در } b_i \text{ است}\} = \text{قیمت سایه چپ}$$

در این فصل لم فارکاس بیان گردید.

لم فارکاس در حقیقت ستون فقرات بسیاری از مسائلی است که از این به بعد مورد مطالعه قرار می گیرد و آن عبارت است از این که فقط یکی از دو دستگاه ذیل دارای جواب است.

$$I) \begin{cases} Ax \geq 0 \\ cx < 0 \end{cases} \quad II) \begin{cases} wA = c \\ w \geq 0 \end{cases}$$

با استفاده از لم فارکاس شرایط K.K.T که یک شرط لازم و کافی برای بهینگی برای LP می باشد به صورت زیر به دست آمد:

نقطه‌ی x^* برای پرایمال و w^* برای دوآل بهینه است اگر و فقط اگر:

$$۱) Ax^* \geq b, \quad x^* \geq 0 \quad PF(\text{پرایمال شدنی})$$

$$۲) w^* A \leq c, \quad w^* \geq 0 \quad DF(\text{دوآل شدنی})$$

$$۳) (c - w^* A)x^* = 0, \quad w^* (Ax^* - b) = 0 \quad \text{شرایط مکمل زاید}$$

ثابت کنید که در اجرای سیمپلکس پرایمال شرایط ۱ و ۳ و در اجرای سیمپلکس دوآل شرایط

۲ و ۳ برقرار است. با استفاده از شرایط فوق قضیه‌ی موتزکینز به دست آمد، به صورت زیر:

فقط یکی از دو دستگاه زیر دارای جواب است

$$I) \begin{cases} Ax > 0 \\ cx \geq 0 \\ Dx = 0 \end{cases} \quad II) \begin{cases} wA + \mu c + \gamma D = 0 \\ w \geq 0, \quad w \neq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \gamma \text{ آزاد} \end{cases}$$

و قضیه‌ی ذیل که معروف به قضیه‌ی تاکر است به صورت زیر بیان و ثابت شد.

فقط یکی از دستگاه‌های زیر دارای جواب است

$$I) \begin{cases} Ax \geq 0, \quad x \neq 0 \\ cx \geq 0 \\ Dx = 0 \end{cases} \quad II) \begin{cases} wA + \mu c + \gamma D = 0 \\ w > 0 \\ \mu \geq 0 \end{cases}$$

در این فصل در رابطه با پایداری مدل‌ها صحبت شد. گفتیم که یک مدل بهینه‌سازی پایدار

است اگر تغییرات بسیار کوچک ولی دلخواه در مقادیر داده‌ها در مدل باعث تغییرات بسیار

کوچک در مقدار بهینه تابع گردد.

در رابطه با مطلب فوق چند مثال ارائه گردید که توصیه می‌شود در درک عمیق آن‌ها نهایت

سعی خود را بنمائید.

در مورد خاص پایداری؛ به مدل‌های برنامه‌ریزی خطی به صورت متقارن اشاره‌ای گردید.

دسته‌ی دیگری از مدل‌ها که پایداری آن‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد LP‌هایی است که بعضی از قیود به صورت تساوی یا نامساوی می‌باشد. در رابطه با مسأله‌ی LP و دوآل آن تابع لاگرانژ را به صورت زیر تعریف نمودیم:

$$L(x, w, v) = cx - w(Ax - b) - vx$$

و گفتیم که نقطه‌ی (x^*, w^*, v^*) یک نقطه‌ی زینی برای تابع $L(x^*, w, v)$ است اگر؛
 $w^* \geq 0$ و $v^* \geq 0$

$$L(x, w^*, v^*) \leq L(x^*, w^*, v^*) \leq L(x^*, w, v)$$

برای هر $w \geq 0$ و $v \geq 0$ و هر x .

در این فصل مسأله‌ی مکمل خطی (LCP) به صورت زیر بیان گردید:

$$\begin{cases} w = q + MZ \\ w, z \geq 0 \\ w^t z = 0 \end{cases}$$

ثابت شد که مسأله‌ی LP و دوآل آن، مسأله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم، و مسأله بازی دو نفره با جمع صفر را حل می‌نماید.

روش lemke و روش Principle Pivoting برای حل این مسأله بیان شده است.

۲-۲۰ تمرینات

(۱) دوآل هر یک از مسائل زیر را بنویسید. بررسی نمائید که دوآل دوآل این مسائل خود مسائل هستند. همچنین مسائل را به صورت استاندارد تبدیل نمائید و بررسی نمائید که دوآل مسائلی به صورت استاندارد، معادل دوآل مسأله‌ی اصلی است. در هر صورت

مراحل استدلال و استفاده از موارد مورد استفاده را دقیقاً توضیح دهید.

$$a) \text{Max } Z = ۴x_۱ - ۳x_۲ + ۸x_۳$$

$$-۲ \leq x_۱ \leq ۸$$

$$۴ \leq x_۲ \leq ۱۴$$

$$-۱۲ \leq x_۳ \leq -۸$$

$$b) \text{Max } Z(x) = \begin{array}{ccccccc} & -۱۷x_۲ & & +۸۳x_۳ & -۵x_۵ & & \\ -x_۱ & -۱۳x_۲ & +۴۵x_۳ & & +۱۶x_۵ & -۷x_۶ & \geq ۱۰۷ \\ & ۳x_۳ & -۱۸x_۴ & & & +۳x_۷ & \leq ۸۱ \\ ۴x_۱ & & -۵x_۳ & & & +x_۶ & = -۱ \end{array}$$

$$-۱۰ \leq x_۱ \leq -۲$$

$$-۳ \leq x_۲ \leq ۱۷$$

$$۱۶ \leq x_۳, x_۴ \leq ۰$$

$$x_۶, x_۷ \geq ۰$$

آزاد $x_۵$

$$c) \text{Min } Z = \begin{array}{cccccc} ۳x_۱ & -۷x_۲ & & +۶x_۳ & +۵x_۵ & -x_۶ \\ ۵x_۱ & +۸x_۲ & +۳x_۳ & +۳x_۴ & +۲x_۵ & +۱۱x_۶ \end{array} = ۲۰۰$$

$$۵ \leq x_j \leq ۲۰ \quad j = ۱, \dots, ۶$$

$$d) \text{Min } Z = \begin{array}{ccccccc} -۲x_۱ & +۱۳x_۲ & +۳x_۳ & -۲x_۴ & +۵x_۵ & +۵x_۶ & +۱۰x_۷ \\ \text{s. t.} & x_۱ & -x_۲ & & +۴x_۳ & -x_۵ & +x_۶ & -۴x_۷ & = ۵ \\ & x_۱ & -x_۲ & & +۷x_۳ & -۲x_۵ & +۳x_۶ & -۳x_۷ & \geq -۱ \\ & & ۵x_۲ & +x_۳ & -x_۴ & +۲x_۵ & -x_۶ & -۲x_۷ & \leq ۵ \\ & & ۳x_۲ & +x_۳ & +x_۴ & +x_۵ & +x_۶ & -x_۷ & = ۲ \\ & & & & & & & & x_j \geq 0 \quad (j = ۱, \dots, ۷) \end{array}$$

(۲) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z(x) = cx \\ & l_i \leq a^i x \leq k_i \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

که در آن

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

دوآل مسأله‌ی فوق را بنویسید. شرایط مکمل زاید را برای مسأله به دست آورید. چه شرطی بایستی روی ماتریس A گذاشته شود تا مسأله شدنی گردد. (به عبارت دیگر چه شرایطی بایستی روی A گذاشته شود تا مسأله شدنی گردد.)

(۳) LP زیر را در نظر بگیرید که در آن A ماتریسی است از مرتبه‌ی $m \times n$. دوآل مسأله را بنویسید. با به‌کار بردن قضیه‌ی دوآلیتی و دوآل این مسأله ثابت کنید که اگر مسأله شدنی باشد، آن‌گاه می‌نیمم مقدار $z(x)$ در این مسأله متناهی است اگر و فقط اگر c را بتوان به صورت ترکیب خطی از سطرها‌ی A نوشت. با به‌کار بردن این ثابت کنید که $z(x)$ یا در تمام نقاط ناحیه شدنی مقدار ثابت k را انتخاب می‌نماید، یا از پائین نامحدود می‌باشد.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z(x) = cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

(۴) مسأله زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z(x) = cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

دوآل فاز اول مسأله را با به‌کار بردن کامل متغیرهای تصنعی بنویسید. دوآل فاز اول و شرایط مکمل زاید را برای بهینگی جفت مسائل پرایمال - دوآل بنویسید.

(۵) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx - b^t y \\ \text{s. t.} \quad & Ax \geq b \\ & -A^t y \geq -c^t \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن $A = [a_{ij}]$ از مرتبه‌ی $m \times n$ و $b \in R^m$ و $c \in R^n$. ثابت کنید که LP فوق یا نشدنی است یا بهینه متناهی دارد و مقدار بهینه تابع مقصود برابر با صفر است.

(۶) مسأله زیر را در نظر بگیرید که مدل متناظر یک مسأله‌ی حمل و نقل است.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

دوآل مسأله را بنویسید. با به‌کار بردن داده‌های زیر و با استفاده از شرایط مکمل زاید جواب بهینه مسأله را به دست آورید.

$$c = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 & 8 \\ 19 & 5 & -2 & 12 \\ 5 & \frac{7}{3} & -9 & 3 \end{pmatrix} \quad b = (b_1, b_2, b_3, b_4) = (2, 3, 2, 3)$$

$$a = (a_1, a_2, a_3) = (3, 3, 4)$$

(۷) LP زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{rcccccccc} \text{Min } Z(x) = & -x_1 & -2x_2 & +4x_3 & & +5x_5 & & & \\ & x_1 & & +x_3 & -2x_4 & -x_5 & +2x_6 & & = 3 \\ & x_1 & +x_2 & & -x_4 & -3x_5 & +3x_6 & +x_7 & = 7 \\ & -x_1 & -2x_2 & -x_3 & -x_4 & +5x_5 & -2x_6 & & \leq -4 \\ & & & & & & & & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 7 \end{array}$$

بررسی نمائید که آیا نقطه‌ی $x^0 = (3, 4, 0, 0, 0, 0, 0)$ بهینه مسأله می‌باشد (با به‌کار بردن شرایط مکمل زاید). با به‌کار بردن شرط مسأله خواص مشخصه مجموعه جواب‌های بهینه را معین نمائید. با توجه به این‌که:

$$a_5 = -a_1 - 2a_2$$

این مطالب مستلزم چه شکلی از مجموعه‌ی جواب‌های مسأله می‌باشد.

(۸) LP زیر را در نظر بگیرید. دوآل مسأله را بنویسید. اگر \bar{x} جواب بهینه مسأله باشد، ثابت کنید عدد حقیقی مانند $\bar{\pi}$ وجود دارد، به طوری که بازا هر j $\bar{\pi}a_j \leq c_j$ مستلزم آن است که:

$$\bar{x}_j = l_j, \bar{\pi}a_j > c_j$$

و این مستلزم آن است که:

$$\bar{x}_j = k_j, l_j < \bar{x}_j < k_j$$

و این مستلزم $\bar{\pi}a_j = c_j$ است.

(۹) مسائل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} \text{Min } & Z = cx \\ P : & \text{s. t. } Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & W = wb \\ D: \quad & \text{s. t.} \quad wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

به سوالات زیر با توضیحات کامل جواب دهید.

الف. اگر P یک جواب اساسی نشدنی داشته باشد که مقدار تابع مقصود متناظر آن از مقدار بهینه کمتر باشد، آنگاه جواب اساسی مکمل دوآل آن شدنی است (مطلب راست یا دروغ است؟ چرا؟)

ب. اگر P بهینه چندگانه داشته باشد و اگر w^* یک جواب بهینه دوآل باشد، آنگاه بایستی w^* تبه‌گن باشد (راست یا دروغ است؟)

ج. فرض کنید z^* مقدار بهینه مشترک P و D باشد و فرض کنید \bar{x} یک جواب اساسی نشدنی برای P باشد که جواب اساسی مکمل متناظر دوآل آن شدنی باشد. ممکن است مقدار تابع مقصود این دو برابر با z^* باشد.

د. اگر P نامحدود باشد. آیا ممکن است با تغییر b ، بهینه آن را متناهی نماییم؟

۱۰. جدول زیر نشان‌دهنده‌ی جواب بهینه‌ی یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی است. در این جدول x_4 و x_5 در قیدهای اول و دوم به ترتیب متغیرهای کمکی می‌باشند (در مسأله‌ی اصلی). قیدها از نوع \leq می‌باشند.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	۱	۰	-۲	۰	-۳	-۴۰
x_3	۰	۰	$\frac{1}{4}$	۱	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
x_1	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{2}$

الف. مسأله‌ی اصلی را بنویسید.

ب. دوآل مسأله‌ی اصلی چیست؟

ج. جواب بهینه‌ی دوآل را از جدول فوق به دست آورید.

(۱۱) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

الف. دوآل مسأله را بنویسید.

ب. با روش سیمپلکس مسأله را حل کنید و نشان دهید که مقادیر متغیرهای دوآل به دست آمده از جدول در قیدهای دوآل صدق نمی‌کنند. (مگر در جدول بهینه)

(۱۲) مسأله برنامه ریزی خطی زیر را با روش ترسیمی حل کنید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 3x_1 + 3x_2 + 21x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 6x_1 + 9x_2 + 25x_3 \leq 25 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 25x_3 \leq 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(۱۳) LP زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & -2 \leq x_1 \leq 0 \\ & -1 \leq x_2 \leq 2 \end{aligned}$$

الف. مسأله را با روش ترسیمی در فضای (x_1, x_2) حل نمایید.

ب. تمامی BFSهای بهینه را به دست آورید.

۱۴) کمپانی سازنده صندوق‌های گردان، دو نوع صندوق تولید می‌کند. دو نوع متخصص در ساختن این صندوق‌ها دخیل هستند که آن‌ها را متخصص I و II می‌نامیم. صندوق‌های نوع اول $\frac{3}{4}$ ساعت از متخصص نوع I و یک ساعت از متخصص نوع II لازم دارد، و سود حاصله \$۲۰ می‌باشد. صندوق‌های نوع دوم $\frac{1}{4}$ ساعت از متخصصین نوع اول و $\frac{1}{4}$ ساعت از متخصصین نوع دوم کار می‌برد و سود حاصله \$۱۲ می‌باشد. کمپانی ۱۰۰ ساعت متخصص نوع اول و ۸۰ ساعت متخصص نوع دوم در اختیار دارد. کمپانی در رابطه با دستمزد ساعتی آن‌ها در حال مذاکره می‌باشد. چه دستمزدی برای این افراد پیشنهاد می‌نمائید؟

۱۵) نشان دهید اگر مسأله:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

جواب بهینه متناهی داشته باشد، آنگاه مسأله‌ی:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b' \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

نمی‌تواند نامحدود باشند. (مهم نیست که بردار b' چگونه باشد)

۱۶) مستقیماً نشان دهید که اگر مسأله‌ی:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

جواب شدنی نداشته باشد و اگر دوآل آن جواب شدنی داشته باشد، آن‌گاه دوآل نامحدود می‌باشد (لم فارکاس را به‌کار برید. اگر دستگاه $Ax \geq b$ و $x \geq 0$ جواب نداشته باشد، آن‌گاه دستگاه $wA \leq 0$ و $w \geq 0$ و $wb > 0$ دارای جواب است).

(۱۷) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } Z = cx$$

$$\text{s. t. } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

فرض کنیم $c_j - z_j$ و \bar{a}_{ij} و \bar{b}_i اعضای به‌روز شده جدول سیمپلکس باشد (در یک تکرار از روش سیمپلکس). نشان دهید که آیا عبارات زیر راست یا دروغ می‌باشند. در هر صورت استدلال کامل بیاورید.

$$\bar{a}_{ij} = -\frac{\partial x_{B_i}}{\partial x_j} \text{ الف.}$$

$$z_j - c_j = \frac{\partial z}{\partial x_j} \text{ ب.}$$

ج. شدنی بودن دوآل به معنی بهینگی پرایمال می‌باشد.

د. انجام دادن عملیات سطری در یک دستگاه نامعادلات (نامساوی‌ها) دستگاه معادل به دست می‌دهد.

ه. افزودن متغیر تصنعی به پرایمال باعث می‌گردد که متغیرهای آزاد دوآل محدود گردند.

و. حل مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با روش سیمپلکس، ضرورتاً یک روش جستجوی گرادیان می‌باشد.

ز. یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی که به وسیله فاز دوگانه روش سیمپلکس حل گردد با روش M -بزرگ سیمپلکس نیز قابل حل می‌باشد و بالعکس.

ح. وقتی هم پرایمال و هم دوآل نشدنی باشند، یک رخنه دوآلیتی موجود است

(رنخه دوآلیتی یعنی اختلاف بین دو تابع مقصود).

و. برگرداندن مسأله‌ی می‌نیمم به ماکزیمم نمودن باعث می‌گردد که علامت متغیرهای دوآل عوض شود.

ذ. یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای نامنفی را می‌توان به یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی تبدیل نمود، بدون افزودن هیچ قید به صورتی که تمامی متغیرهای مسأله‌ی حاصل شده آزاد باشند.

(۱۸) با به‌کار بردن قضیه‌ی اصلی دوآلیتی، لم فارکاس را ثابت کنید.

(راهنمایی: مسائل زیر را در نظر بگیرید.)

$$\text{Min } Z = c^T x$$

$$\text{s. t. } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\text{Min } W = w^T b$$

$$\text{s. t. } w^T A \leq c$$

$$w \text{ آزاد}$$

(۱۹) یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به صورت استاندارد و دوآل آن را در نظر بگیرید:

الف. چه اتفاقی برای جواب دوآل می‌افتد؛ اگر قید k ام، λ برابر گردد.

ب. چه اتفاقی برای جواب دوآل پیش می‌آید اگر مضربی از یک قید پرایمال به قید دیگری از پرایمال افزوده گردد.

ج. چه اتفاقی برای جواب‌های دوآل و پرایمال پیش می‌آید اگر مضربی از یک ستون پرایمال به ستون دیگر پرایمال افزوده گردد.

(۲۰) مسائل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } Z = cx$$

$$\text{s. t. } Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

$$\text{Min } W = wb$$

$$\text{s. t. } wA \leq c$$

$$w \geq 0$$

فرض کنید، مجموعه‌ی جواب‌های حداقل یکی از دو مسائل فوق غیرخالی است. ثابت کنید که مجموعه‌ی جواب‌های حداقل یکی از مسائل یا هر دو غیرخالی می‌باشند یا نامحدود هستند.

(۲۱) فرض کنید $S \subseteq R^n$ یک چندوجهی و S_p مجموعه‌ی نقاط راسی آن باشد. ثابت کنید دو نقطه $x^1, x^2 \in S$ و x^1, x^2 راسی هستند) دو نقطه مجاور راسی S می‌باشند، اگر و فقط اگر یک ابرصفحه‌ی جداکننده دو مجموعه $\{x^1, x^2\}$ و $S - \{x^1, x^2\}$ از هم جدا کند. با یک مثال نقض نشان دهید که این نتیجه ممکن است در حالتی که S نامحدود باشد صادق نباشد.

(۲۲) پس از معرفی متغیرهای کمکی مسأله P و D مسائل به صورت زیر درمی‌آید:

پرایمال

$$\text{Min } Z(x) = cx$$

$$Ax - v = b$$

$$x \geq 0, v \geq 0 \quad (*)$$

دوآل به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & W = wb \\ & wA + u = c \\ & w \geq 0 \quad u \geq 0 \end{aligned} \quad (**)$$

فرض کنیم:

$$S_P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \text{ شدنی برای } * \text{ هستند} \right\}$$

و

$$S_D = \{(w, u) \mid (w, u) \text{ شدنی برای } ** \text{ باشند}\}$$

در این مسأله زوج‌های مکمل عبارتند از (x_j, u_j) ($j = 1, \dots, n$) و (w_i, v_i) ($i = 1, \dots, m$). فرض می‌کنیم $S_D \neq \emptyset$ و $\emptyset \neq S_P$ نتایج زیر را به دقت اثبات نمایید:

- ۱- در جواب بهینه اگر یکی از متغیرهای زوج‌های فوق‌الذکر اکیداً مثبت باشد دیگری صفر می‌باشد و بالعکس.
- ۲- یک متغیر از این زوج‌ها در مجموعه‌ی جواب‌ها از بالا نامحدود است اگر و فقط اگر متغیر متناظر آن در مجموعه جواب‌ها از پایین محدود باشد.
- ۳- یک متغیر از این زوج‌ها در مجموعه جواب‌ها از بالا نامحدود است اگر و فقط اگر متغیر مکمل آن در تمامی جواب‌های شدنی صفر باشد.
- ۴- یک متغیر از این زوج‌ها در جوابی شدنی اکیداً مثبت خواهد بود اگر و فقط اگر متغیر مکمل آن در مجموعه جواب‌ها از بالا محدود باشد.

(۲۳) ثابت کنید اگر k ماتریس متقارن اوریب (یعنی $k = -k^t$) آن‌گاه دستگاه:

$$kx \geq 0 \quad x \geq 0$$

دارای جوابی مانند \bar{x} می‌باشد که $k\bar{x} + \bar{x} > 0$.

(۲۴) با به‌کار بردن نتیجه‌ی دستگاه قبلی برای دستگاه:

$$Ax - rb \geq 0 \quad x \geq 0$$

$$-wA + rc \geq 0 \quad w \geq 0$$

$$wb - cx \geq 0 \quad r \geq 0$$

الف. نتیجه را برای اخذ قضیه‌ی اساسی دوآلیتی به‌کار گیرید.

ب. قضیه‌ی مکمل زاید قوی را از آن نتیجه بگیرید.

ج. تعبیر هندسی قضیه‌ی مکمل زاید قوی چیست؟

د. چه موقع جواب مکمل زاید قوی در نقاط رأسی اتفاق نمی‌افتد؟

(این مسأله بسیار مهم است. به دقت هر چهار قسمت آن را حل و روی کاغذ بیاورید.)

(۲۵) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min} \quad cx$$

$$\text{s. t.} \quad Ax \geq b$$

$$x \in X$$

که در آن X یک چندوجهی می‌باشد (معمولاً قیود سازای X قیدهایی هستند که به راحتی قابل دستکاری می‌باشند) متناظر مسأله‌ی پرایمال فوق مسأله‌ی دوآل لاگرانژ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Min} \quad f(w)$$

$$\text{s. t.} \quad w \geq 0$$

که در آن:

$$f(w) = wb + \text{Min}_{x \in X} \{(c - wA)x\}$$

الف. ثابت کنید اگر x_0 جواب شدنی پرایمال باشد یعنی $Ax_0 \geq b$ و $x_0 \in X$ و w_0 یک جواب برای دوآل لاگرانژ باشد، یعنی $w_0 \geq 0$ ؛ داریم:

$$cx_0 \geq f(w_0)$$

ب. فرض کنید $x \neq \phi$ و محدود باشد و مسأله پرایمال جواب بهینه‌ی متناهی دارد، نشان دهید که:

$$\begin{aligned} \text{Min } cx &= \text{Max } f(w) \\ Ax &\geq b \quad w \geq 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

(۲۶) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min } & x_1 + x_2 \\ \text{s. t. } & 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید:

$$X = \{x \mid -x_1 + x_2 \leq 2, x_1 + x_2 \leq 8, x_1, x_2 \geq 0\}$$

۱- دوآل لاگرانژ مسأله‌ی فوق را به دست آورید.

۲- نشان دهید:

$$f(w) = 6w + \text{Min}\{0, 4 - 2w, 13 - 14w, 8 - 24w\}$$

۳- $f(w)$ را رسم کنید و جواب بهینه هر دو مسأله را به دست آورید.

(۲۷) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -x_2 + x_3 \geq -1 \\ & x_1 - x_3 \geq -1 \\ & -x_1 + x_2 \geq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

نشان دهید که دوآل مسأله‌ی فوق، خود مسأله می‌گردد.^۱ فرض کنید A ماتریس مربع باشد، شرایطی را روی A و b و c به دست آورید که دوآل مسأله فوق، خود مسأله باشد.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(۲۸) فرض کنید A ماتریسی از مرتبه‌ی $m \times n$ است. ثابت کنید که (I) یک جواب غیرصفر دارد یا (II) دارای جواب غیرصفر است ولی هر دو نمی‌توانند جواب داشته باشند.

$$I) \begin{cases} Ax = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad II) \begin{cases} wA < 0 \end{cases}$$

(۲۹) A و b و c به ترتیب از مرتبه‌ی $m \times n$ و $m \times 1$ و $1 \times n$ می‌باشند. ثابت کنید که LP زیر یا نشدنی است یا جواب بهینه‌ای دارد که مقدار بهینه تابع مقصود صفر می‌باشد.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx - wb \\ \text{s. t.} \quad & Ax \geq b \\ & -wA \geq -c \\ & x \geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

1) Self-Dual

(۳۰) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید که در آن $b_i < 0$ بازاء هر i و $c_j \geq 0$ $j = m+1, \dots, n$.
 دوآل مسأله را بنویسید و ثابت کنید دوآل جواب بهینه‌ی منحصر به فرد دارد و این جواب را به دست آورید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j=m+1}^n c_j x_j \\ \text{s. t.} \quad & x_i + \sum_{j=m+1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

(۳۱) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن $\text{rank}(A) = m < n$ و A از مرتبه‌ی $m \times n$ می‌باشد. فرض کنید که این مسأله دارای جواب بهینه‌ی غیرته‌گن می‌باشد. با به‌کار بردن نتایج مسأله‌ی قبل ثابت کنید که دوآل این مسأله بهینه‌ی منحصر به فرد دارد. (توجه: استفاده از نتایج مسأله‌ی قبل ضروری است.)

(۳۲) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن $m = n$ و $c = b^t$ و $A = A^t$. نشان دهید اگر x_0 موجود باشد، به طوری که $Ax_0 = b$ و $x_0 \geq 0$ در این صورت x_0 بهینه مسأله است.
 (راهنمایی: از دوآلیتی استفاده نمایید.)

(۳۳) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z \\ \text{s. t.} \quad & z - cx = 0 \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

الف. دوآل مسأله را بنویسید.

ب. در بهینگی مقدار متغیر z چقدر خواهد بود. (توضیح دهید)

(۳۴) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید B پایه‌ای است که نه پرایمال شدنی است و نه دوآل شدنی است. نشان دهید که چگونه می‌توان با شروع از B مسأله را حل نمود.

(۳۵) ثابت کنید اگر مسأله‌ی

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

دارای جواب شدنی نباشد و دوآل مسأله جواب شدنی داشته باشد، در این صورت، دوآل نامحدود است.

(۳۶) ثابت کنید اگر یک جواب اساسی شدنی مانند x که متناظر پایه‌ی B می‌باشد، بهینه باشد، B پایه بهینه هر LP است که b سمت راست قیود آن‌ها در $\text{pos}(B)$ باشد.

(۳۷) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & l \leq x \leq u \end{aligned}$$

که در آن l و u بردارهای متناهی باشند.

الف. دوآل مسأله را بنویسید.

ب. نشان دهید که دوآل همواره شدنی است.

ج. اگر مسأله‌ی پرایمال دارای جواب شدنی باشد چه نتیجه‌ای از این مطلب می‌گیرید؟

(۳۸) مسائل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \\ \text{Max} \quad & wb \\ \text{s. t.} \quad & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

اگر

$$S_P = \{x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$$

$$S_D = \{w \mid wA \leq c, w \geq 0\}$$

آنگاه اگر S_P یا S_D غیرخالی باشد؛ ثابت کنید که مجموعه‌ی جواب‌های شدنی حداقل

یکی از دو مسأله هم غیرخالی است و هم نامحدود است.

(۳۹) فرض کنیم $S, K \subseteq R^n$ مجموعه‌ی نقاط رأسی K باشد. ثابت کنید که $x^1, x^2 \in S$ دو نقطه‌ی رأسی مجاور K هستند؛ اگر و فقط اگر یک ابرصفحه‌ی جداکننده‌ی دو مجموعه‌ی $\{x^1, x^2\}$ و $S - \{x^1, x^2\}$ را از هم جدا کند. در حالتی که K نامحدود باشد، مثال نقض ارائه دهید که این مطلب صادق نباشد.

(۴۰) فرض کنید $w = (w_1, \dots, w_n) > 0$ بردار داده شده‌ای باشد (برداری با n مؤلفه از وزن‌های مثبت). برای هر بردار $y \in R^n$ یعنی $y = (y_1, \dots, y_n)$ $L(y)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L(y) = \text{Max}\{w_i |y_i| \mid i = 1, \dots, n\}$$

(یعنی ماکزیمم حاصلضرب w_i در قدرمطلق y_i). بردار

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in R^n$$

برداری مانند $x = (x_1, \dots, x_n)$ را طوری بیابید که می‌نیمم کند $L(a - x)$ را مشروط بر این که $x_i - x_{i-1} \leq 0 \quad i = 1, \dots, n-1$ مسأله را به صورت LP فرموله نمائید.

(۴۱) با به‌کار بردن تئوری دوآلیتی مسأله برنامه‌ریزی خطی ثابت کنید که نتایج ذیل عاید می‌گردد:

$$\bar{x}_i = \text{Max}\{a_j - (\alpha/w_j) \mid j \leq i\}$$

$$\hat{x}_i = \text{Min}\{a_j + (\alpha/w_j) \mid j \geq i\}$$

فرض کنید:

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$$

ثابت کنید \bar{x} و \hat{x} هر دو جواب‌های بهینه این مسأله می‌باشند. به علاوه ثابت کنید که اگر
 $x = (x_1, \dots, x_n)$ در شرایط $x_i \leq x_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-1$ صدق کند،
 آن‌گاه x جواب بهینه مسأله است اگر و فقط اگر $\bar{x}_i \leq x_i \leq \hat{x}_i \quad (i = 1, \dots, n)$.

(۴۲) فرض کنید دستگاه زیر دارای جواب نیست. دستگاهی بسازید که دارای جواب باشد.

$$Ax = 0, \quad x \geq 0, \quad cx > 0$$

(۴۳) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ و $c = (1, 4)$. کدامیک از دو دستگاه زیر دارای جواب
 است.

$$I) \begin{cases} Ax \leq 0 \\ cx < 0 \end{cases} \quad II) \begin{cases} wA = c \\ w \geq 0 \end{cases}$$

مسأله را به طریق ترسیمی توضیح دهید.

(۴۴) برای هر یک از مسائل زیر شرایط K.K.T را بنویسید.

$$\begin{array}{ll} a) \quad \text{Max} & cx \\ \text{s. t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} d) \quad \text{Min} & cx \\ \text{s. t.} & A_1 x = b_1 \\ & A_2 x \geq b_2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} b) \quad \text{Max} & cx \\ \text{s. t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} e) \quad \text{Min} & cx \\ \text{s. t.} & Ax = b \\ & l \leq x \leq u \end{array}$$

$$c) \quad \text{Min} \quad cx \\ \text{s. t.} \quad Ax \leq b \\ x \geq 0$$

(۴۵) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید x جواب بهینه است. بعلاوه فرض کنید:

$$\begin{aligned} x_j &> 0 \quad j = 1, \dots, p \\ x_j &= 0 \quad j = p+1, \dots, n \end{aligned}$$

نشان دهید دستگاہ $Ad = 0$ و $d_{p+1}, \dots, d_n \geq 0$ و $cd < 0$ در R^n دارای جواب نیست. با به‌کار بردن لم فارکاس شرایط K.K.T برای این مسأله بهینه می‌باشد. هم‌چنین که هر جوابی در این شرایط K.K.T برای این مسأله بهینه می‌باشد.

(۴۶) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

با معرفی متغیر کمکی داریم:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & cx \\ & Ax + Ix_s = b \\ & x, x_s \geq 0 \end{aligned}$$

شرایط بهینگی K.K.T را برای هر دو مسأله بنویسید. معادل بودن آن‌ها را نشان دهید و نشان دهید که ضرایب لاگرانژ متناظر قیود $x_s \geq 0$ مساوی ضرایب لاگرانژ قید $Ax + x_s = b$ و $Ax \leq b$ می‌باشد.

(۴۷) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

با شروع از مبداء، مسأله را با روش سیمپلکس حل نمائید و نشان دهید که جواب در شرایط K.K.T صدق می‌نماید. در هر مرحله منابعی که از شرط بهینگی عدول می‌نمایند را مشخص کنید. هر مرحله را از نظر هندسی تفسیر نمائید.

(۴۸) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

می‌دانیم x جواب بهینه‌ی مسأله است، اگر و فقط اگر بردارهایی مانند w و v موجود باشد، به طوری که:

$$\begin{aligned} c - wA - v &= 0 \\ v &\geq 0 \\ vx &= 0 \end{aligned}$$

آیا امکان دارد x بهینه باشد، اگر $v_i \geq 0$ بازاء هر $j \neq i$ و $v_j < 0$ و $x_j = 0$ ؟
به عبارت دیگر، آیا امکان دارد، جواب بهینه‌ای موجود باشد که یکی از ضرایب لاگرانژ متناظر یک قید نامنفی، منفی باشد؟ توضیح دهید چرا می‌تواند این طور باشد یا چرا نمی‌تواند چنین باشد. مطلب را با یک مثال عددی توضیح دهید.

(۴۹) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید x^* جواب بهینه‌ی مسأله باشد و A به صورت: $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ افراز شده باشد و b را نیز به صورت $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ افراز نموده باشیم، به طوری که $A_1 x^* = b_1$ و $A_2 x^* > b_2$. نشان دهید که x^* جواب بهینه‌ی مسائل زیر نیز می‌باشد.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & A_1 x \geq b_1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & A_1 x = b_1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(۵۰) یک کاغذ دو نوع محصول تولید می‌نماید که سود آن‌ها به ترتیب $\$10$ و $\$15$ می‌باشد. هر واحد از محصول اول ۴ ساعت وقت کارگر و ۳ ساعت وقت ماشین را می‌گیرد. هر واحد از محصول دوم ۷ ساعت وقت کارگر و ۶ ساعت وقت ماشین را صرف می‌کند. تعداد ساعات کاری در کارخانه کلاً 300 ساعت و ماشین 500 ساعت می‌باشد. جواب بهینه را به دست آورید و شرایط K.K.T را بررسی کنید. جواب بهینه را از نظر هندسی تفسیر نمایید؛ هم‌چنین تفسیر اقتصادی آن را توضیح دهید.

(۵۱) شرایط K.K.T برای مسأله برنامه‌ریزی خطی:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

را به یک دستگاه از نامعادلات خطی تبدیل نمائید. آیا هیچ امتیازی این تبدیل دارد؟

(۵۲) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

یک جواب شدنی x داده شده است. مسأله را فرموله نمائید که یک جهت شدنی که بهترین بهبود را در تابع مقصود در یک قدم به دست بدهد (اگر وجود داشته باشد) ارتباط این مسأله و مسأله‌ی اصلی چیست؟

(۵۳) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنیم x^* جواب بهینه‌ی منحصر به فرد مسأله باشد (که در این صورت x^* نقطه رأسی است. چرا؟) نشان دهید که دومین نقطه‌ی رأسی بهترین بایستی، نقطه‌ی رأسی مجاور x^* باشد. چه اتفاق می‌افتد اگر منحصر به فرد بودن حذف گردد؟

(۵۴) ناحیه‌ی S را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$S = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$$

$$\text{rank}(A) = m < n \quad A = [a_{ij}]^{m \times n} \quad (S \text{ محدود است})$$

فرض کنید x_0 یک نقطه‌ی رأسی S و x_1, \dots, x_k نقاط رأسی مجاور x_0 باشد. فرض کنید x نقطه‌ای از S باشد. نشان دهید که x را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^k \mu_j (x_j - x_0) \quad \mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, k$$

نتیجه را از نظر هندسی تفسیر نمایید.

(۵۵) در مسأله‌ی فوق فرض کنید S نامحدود است. ثابت کنید با همان مفروضات اگر $x \in S$ در این صورت:

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^k (x_j - x_0) \mu_j + \sum_{j=1}^l \lambda_j d_j$$

$$\mu_j, \lambda_j \geq 0 \quad \text{بازاء هر } j$$

که در آن $\{d_1, \dots, d_l\}$ مجموعه جهت‌های رأسی مجاور دورشونده می‌باشند.

فرق این مطلب با قضیه‌ی نمایش چیست؟

(۵۶) نشان دهید در یک چندوجهی محدود در یک نقطه‌ی رأسی تابع مقصود کمترین مقدار خود را دارد اگر و فقط اگر مقدار تابع مقصود در آن نقطه کمتر یا مساوی در هر نقطه از نقاط رأسی مجاور آن باشد. آیا می‌توان مطلب را برای حالتی که چندوجهی نامحدود است تعمیم داد.

مراجع

- [1] E. M. L. Beale, "An Alternative Method for Linear Programming," 523 -Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 50, 4 (1954), 513 .
- [2] Dual -G. B. Dantzig, L. R. Ford, jr. and D. R. Fulkerson, "A Primal 181 in reference [1. 83]-Algorithm for Linear Programs, "pp. 171
- [3] H. w. Kuhn, "The Hungarian Method for the Assignment Problem," Naval Research Logistics Quarterly, 2, 1 and 2 (1955), 83-97.
- [4] C. E. Lemke, "The Dual Method of Solving the Linear Programming Problem, " Naval Re-search Logistics Quarterly, 1(1954), 36-47.
- [5] C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz, Combinatorial Optimization, Algorithms and Complexity, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [6] H. w. Kuhn, "Nonlinear Programming: A Historical View, "in Nonlinear Programming: Proceedings of the Joint SIAM-AMS Symposium on Applied Mathematics, R. w. Cottle and C. E. Lemke (Eds.), (New York City, March 1975), American Mathematical Society, Providence, R. I., 1976.
- [7] C. E. Lemke, "Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming, " Management Science 11 (1965), 681-689.

-
- [8] C. E. Lemke and J. T. Howson, "Equilibrium Points of Bimatrix Games, "SIAM Journal of Applied Mathematics 12 (1964), 413-423.
- [9] O. L. Mangasarian, "Uniqueness of Solutions in Linear Programming, 'Linear Algebra and Its Linear Programming, "Linear Algebra and Its Applications 25 (1979), 151-162.
- [10] J. May and R. L. Smith, "Random Polytopos: Their Definition, Generation, and Aggregate Properties, "Mathematical Programming 24, 1(September 1982), 39-54.
- [11] R. R. Meyer, "Continuity Properties of Linear Programs, "Computer Science Technical Report 373, University of Wisconsin, Madison, November 1979.
- [12] H. D. "Marginal Values in Matrix Games and Linear Programs, "in Linear Equalities and Related Systems, H. W. Kuhn and A. W. Tucker (Eds), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1959, pp. 183-194.
- [13] M. Morishima, The Economic Theory of Modern Society, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1976.
- [14] G. Owen, Game Theory, Saunders, Philadelphia, 1968.
- [15] M. S. Ramanujan and E. S. Thomas, Intermediate Analysis, Macmillan, New York, 1970.
- [16] S. M. Robinson, "Bounds for Error in the Solution Set of a Perturbed Linear Program, "Linear Algebra and Its Applications 6

- (1963). 69-81.
- [17] S. M. Robinson, "Stability Theory for Systems of Inequalities, Part I: Linear Systems, "SIAM Journal Numerical Analysis 12 (1975), 754-769.
- [18] S. M. Robinson, "A Characterization of Stability in Linear Programming, "Operations Research 25, 3 (May-June 1977), 435-447.
- [19] H. L. Royden, Real Analysis, 2nd ed., Macmillan, New York, 1968.
- [20] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1976.
- [21] P. Sengupta and D. Solow, "A Finite Descent Theory for Linear Programming, Piecewise Linear Convex Minimization, and the Linear Complementarity Problem, "Technical Report, Department of Operations Research, Case Western Reserve University, Cleveland, Ohio, June 1981.
- [22] R. L. Smith, "An Elementary Proof of the Duality Theory of Linear Programming, "Journal of Optimization Theory and Applications 12, 2(August 1973), 129-135.
- [23] J. Von Neumann and O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1944.

-
- [24] J. Von Neumann, "Discussion of a maximization problem, "manuscript from the Institute for Advanced Study, 1947.
- [25] H. M. Wagner, "Linear Programming Techniques for Regression Analysis, "Journal of the American Statistical Association 54 (1959), 206.
- [26] A. c. Williams, "Marginal Values in linear Programming, "Journal of SIAM 11, 1 (March 1963), 82-94.
- [27] A. C. Williams, "Complementarity Theorems for Linear Programming, "SIAM Review 12, 1 (January 1970), 135-137.
- [28] P. Wolfe, "Errors in the Solution of Linear Programming Problems, "in Error in Digital Computation, vol. II, L. B. Rau (Ed.), Wiley, New York, 1965, pp. 271-284.
- [29] E. Beale, P. Huges, and R. Small, "Experiences in Using a Decomposition Program, "Computer Journal 8 (1965), 13-18.
- [30] G. B. Dantzig and P. Wolfe, "The Decomposition Principle for Linear Programd, "Operations Research 8 (1960), 101-111.
- [31] J. K. Ho and E. Loute, "An Advanced Implementation of the Dantzig-Wolfe Decomposition Algorithm for Linear Programming, "Mathematical Programming 20 (May 1981), 303-326.
- [32] D. M. Himmelblau (Ed.), "Decomposition of Large-Scale Problems, "in Proceedings of a NATO Advanced Study Indtitute, North-Holland, Amesterdam, The Netherland, 1973.

-
- [33] M. R. Rao and S. Zionts, "Allocation of Transportation Units to Alternative Trips-A Column Generation Scheme with Out-of-Kilter Sub-problems," *Operations Research* 16 (1968), 52-63.
- [34] M. Akgul, "A Note on Shadow in Linear Programming," Technical Report, Department of Math Sciences, University of Delaware, Newark, Del. 1982.
- [35] D. C. Aucamp and D. I. Steinberg, "The Computation of Shadow Prices in Linear Programming," *Journal of the Operational Research Society* 33 (1982), 557-565.
- [36] F. E. Clark, "Remark on the Constraint Sets in Linear Programming," *American Mathematical Monthly* 68 (1961), 351-352.
- [37] R. W. Cottle and G. B. Dantzig. "Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming," *Linear Algebra and Its Applications* 1 (1968), 103-125.
- [38] G. B. Dantzig and A. Orden, "Notes on Linear Programming: Part II. Duality Theorems," *Rand Research Memorandum RM-1265*, The Rand Corporation, Santa Monica, Calif., October 30, 1953.
- [39] B. C. Eaves and R. M. Freund, "Optimal Scaling of Balls and Polyhedra," *Mathematical Programming* 23 (1982), 138-147.
- [40] D. Gale, H. W. Kuhn, and A. W. Tucker, "Linear Programming and the Theory of Games," in T. C. Koopmans (Ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Wiley, New York, 1951.

-
- [41] A. J. Goldman and A. W. Tucker, "Theory of Linear Programming", in *Linear Inequalities and Related Systems*, H. W. Kuhn and A. W. Tucker (Eds.), Princeton University Press, Princeton, N. J., 1959.
- [42] N. B. Haaser and J. A. Sullivan, *Real Analysis*, Van Nostrand-Reinhold, New York, 1971.
- [43] D. Hausmann, *Adjacency on Polytopes in combinatorial Optimization*, Oelgeschlager, Gunn & Hain, Cambridge, Mass., 1980.
- [44] A. J. Hoffman, "On Approximate Solutions of System of Linear Inequalities," *Journal Research National Bureau of Standards* 49 (1952). 263-265.
- [45] W. Karush, "Minima of Functions of Several variables with Inequalities as Side Conditions," M. S. dissertation, Department of Mathematics, University of Chicago, December 1939.
- [46] H. W. Kuhn and A. W. Tucker, "Nonlinear Programming," in *Proceedings of Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, J. Neyman (Ed.), University of California Press, Berkeley, (1951), 481-492.
- [47] A. Shefi, "Reduction of Linear Inequality Constraints and Determination of all Feasible Extreme Points," Ph. D. dissertation, Department of Engineering -Economic Systems, Stanford University, Stanford, Calif., October 1969.
- [48] D. W. Walkup and R. J. -B. Wets, "Lifting Projections of Con-

-
- vex Polyhedra, "Pacific Journal of Mathematics 28, 2, 1969, pp. 465-475.
- [49] R. J. -B. Wats and C. Witzgall, "Towards an Algebraic Characterization of Convex Polyhedral Cones, Numerische Mathematik 12, 1968, pp. 134-138.

فصل سوم

انواع روش‌های سیمپلکس

پس از ابداع روش سیمپلکس توسط پروفیسور جرج - دانتزیگ، در سال ۱۹۴۷ و به موازات آن پیشرفت تکنولوژی در زمینه کامپیوترهای ارقامی؛ در جهت رسیدن به هدف‌های استراتژیک در به‌کار بردن و ابداع الگوریتم‌های بهینه‌سازی بالابخ در زمینه برنامه‌ریزی خطی قدم‌های بسیار بلندی برداشته شد. هدف‌های استراتژیک در طراحی یک الگوریتم عبارت بودند از:

الف. حداقل خطای ناشی از گرد نمودن را داشته باشد.

ب. حداقل زمان ^۱C.P.U را به‌کارگیرد.

ج. کمترین حافظه^۲ را اشغال نماید.

از این رو اصلاحات اساسی در روش سیمپلکس اولیه صورت گرفت و به موازات آن انواع دیگر روش‌های سیمپلکس ابداع شد. بعضی از این روش‌ها دست‌کاری در روش محاسبات است و بعضی از آن‌ها اصلاح الگوریتم بر مبنای ساختار خاص مسأله صورت گرفته و در برخی با توجه به در دست بودن جواب دوآل طراحی جدیدی انجام شده است. یکی از این روش‌ها که در حقیقت دست‌کاری در روش محاسبات می‌باشد، روش سیمپلکس اصلاح شده می‌باشد که در جزئیات آن را توضیح می‌دهیم.

1) Central Processing Unit 2) Cash Memory

۱-۳ سیمپلکس اصلاح شده^۱

در روش سیمپلکس معمولی در هر جدول که عملیات محوری صورت می‌گرفت تمامی اعضای جدول، تمامی اعضای بردار سمت راست، مقدار تابع مقصود و ضرایب نسبی هزینه‌ها به روز می‌گردید. یعنی محاسبات ذیل انجام می‌شد:

$$\begin{aligned} a) \quad & \bar{b} = B^{-1}b \quad \text{یا} \quad B\bar{b} = b \\ b) \quad & \bar{c}_j = wa_j - c_j \quad w = c_B B^{-1} \quad \text{یا} \quad wB = c_B \\ c) \quad & \bar{a}_j = B^{-1}a_j \quad B\bar{a}_j = a_j \quad j \in N_B \quad (\text{مجموعه‌ی اندیس متغیرهای غیراساسی}) \\ d) \quad & \bar{z} = c_B B^{-1}b \end{aligned}$$

در این چهار دسته از محاسبات: (a) اجتناب‌ناپذیر است زیرا \bar{b} مقادیر به روز شده متغیرهای اساسی را به ما می‌دهد. محاسبات (b) نیز ضروری است زیرا با داشتن \bar{c}_j ‌ها می‌توان بهینه بودن یا بهینه نبودن جواب متناظر جدول را مشخص نمود. محاسبه‌ی (d) لازم است زیرا در جواب بهینه مقدار بهینه‌ی تابع مقصود را به ما می‌دهد. پس باقی می‌ماند محاسبات دسته‌ی (c) در محاسبات این دسته، محاسبه‌ی \bar{a}_j ‌ها ضرورت ندارد، از این رو تنها به روز شدن آن ستونی ضروری است که وارد پایه می‌گردد. یعنی اگر (در مسأله می‌نموم):

$$z_k - c_k = \text{Max}_{j \in N_B} \{z_j - c_j > 0\}$$

در این صورت جهت مشخص نمودن متغیر وارد شونده مجبوریم تست می‌نموم انجام دهیم که به صورت زیر می‌باشد:

$$\theta_r = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\}$$

یعنی داشتن $\bar{a}_k = B^{-1}a_k$ لازم است و به روز نمودن بقیه‌ی ستون‌های غیراساسی ضرورتی ندارد. این موضوع اساس کار سیمپلکس اصلاح شده می‌باشد. مجدداً مسأله‌ی:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z(x) = cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (1-3)$$

1) Revised Simplex

را در نظر می‌گیریم که در آن $b \geq 0$ و A ماتریسی است از مرتبه‌ی $m \times n$ و $\text{rank}(A) = m < n$.

دو صورت از روش سیمپلکس اصلاح شده موجود می‌باشد. یکی از این صورت از فرم حاصلضربی عکس ماتریس پایه استفاده می‌نماید و دیگری صورت صریح عکس ماتریس را به کار می‌برد.

۲-۳ سیمپلکس اصلاح شده با به کار بردن صریح عکس

ماتریس

با توجه به آن چه گفته شد، روشن می‌گردد که روش سیمپلکس را می‌توان با به کار بردن جدولی با آرایه‌های بسیار کمتر اجرا نمود. فرض کنید یک جواب اساسی شدنی متناظر پایه B در دست است و عکس آن یعنی B^{-1} مشخص می‌باشد. جدول زیر را با قرار دادن $w = c_B B^{-1}$ می‌توان تشکیل داد.

RHS عکس ماتریس پایه

w	$c_B \bar{b}$
B^{-1}	\bar{b}

این جدول را جدول سیمپلکس اصلاح شده می‌نامند، که این جدول در جدول سیمپلکس معمولی نیز ظاهر می‌گردد، مشروط بر این که در شروع کار ماتریس عکس پایه، ضرایب صفر در تابع مقصود داشته باشند. در نظر بگیرید که اگر در شروع $b \geq 0$ و قیدها به صورت \leq باشند، مطلب فوق صادق خواهد بود.

حال فرض کنید که الگوریتم سیمپلکس را روی تمامی جدول انجام می‌دهیم، ولی تمامی محاسبات جز جدول فوق را پنهان نگه داریم. بنابراین همان طوری که گفته شد اولین چیزی که در هر مرحله از الگوریتم نیازمندیم، داشتن $z_j - c_j$ برای تمامی متغیرهای غیر اساسی می‌باشد. چون w در دست می‌باشد به سادگی $z_j - c_j$ از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$z_j - c_j = w a_j - c_j$$

اگر $k \in N_B$ موجود باشد که $z_k - c_k > 0$ ، با به‌کار بردن رابطه‌ی:

$$\bar{a}_k = B^{-1}a_k$$

محاسبه می‌گردد و با استفاده از تست می‌نیمم، متغیر خارج‌شونده مشخص می‌گردد. (البته اگر $\bar{a}_k \leq 0$ در این صورت مسأله بهینه‌ی نامتناهی دارد و الگوریتم متوقف می‌شود) به صورت

زیر:

عکس پایه		RHS	x_k
w		$c_B \bar{b}$	$z_k - c_k$
B^{-1}		\bar{b}_λ	$\bar{a}_{\lambda k}$
		\vdots	\vdots
		\bar{b}_r	\bar{a}_{rk}
		\vdots	\vdots
		\bar{b}_m	\bar{a}_{mk}

که در آن:

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\}$$

به علاوه عمل محوری در جدول فوق، به‌روزشده w و B^{-1} و \bar{b} را به ما می‌دهد (چرا؟ دقیقاً مطلب را بیان و تمام جزئیات را روی کاغذ بیاورید).

روش سیمپلکس اصلاح شده در تعداد متناهی از مراحل متقارب می‌باشد به شرط آن‌که جهت جلوگیری از به‌دور افتادن از روش‌های ذکر شده در فصل اول استفاده گردد. ذیلاً خلاصه روش اصلاح شده سیمپلکس را در این حالت ذکر می‌کنیم:

خلاصه روش سیمپلکس اصلاح شده وقتی عکس ماتریس پایه صریحاً داده شده است. قدم اولیه. یک جواب اساسی شدنی اولیه به‌دست آورید و فرض کنید B متناظر آن و B^{-1} در دست باشد. w را از رابطه‌ی:

$$w = c_B B^{-1}$$

محاسبه نمایند و قرار دهید $\bar{b} = B^{-1}b$ و جدول سیمپلکس اصلاح شده زیر را تشکیل دهید.

عکس پایه	RHS
w	$c_B \bar{b}$
B^{-1}	\bar{b}

قدم اصلی. برای تمامی متغیرهای غیراساسی محاسبه کنید:

$$z_j - c_j = wa_j - c_j \quad (j \in N_B)$$

$$z_k - c_k = \text{Max}\{z_j - c_j\}$$

اگر $z_k - c_k \leq 0$ متوقف شوید، جواب متناظر جدول، جواب بهینه می‌باشد و در غیراین صورت قرار دهید:

$$\bar{a}_k = B^{-1} a_k$$

اگر $\bar{a}_k \leq 0$ در این صورت مسأله بهینه نامتناهی دارد. اگر $\bar{a}_k \not\leq 0$ ستون $\begin{pmatrix} z_k - c_k \\ \bar{a}_k \end{pmatrix}$ را در سمت راست جدول مذکور قرار دهید که منجر به وجود آمدن جداول ذیل می‌گردد:

عکس پایه	RHS	
w	$c_B \bar{b}$	x_k
B^{-1}	\bar{b}	$z_k - c_k$
		\bar{a}_k

از رابطه ذیل اندیس متغیر و در نتیجه متغیر خارج شونده را مشخص نمایید:

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\}$$

با انجام عملیات محوری این جدول را به روز نمایید. و ستون اضافه شده x_k را کاملاً حذف نمایید و عملیات را تکرار کنید.

با یک مثال عددی روش سیمپلکس اصلاح شده را توضیح می‌دهیم، اضافه می‌نمائیم که تمامی کدهای کامپیوتری جهت حل LP از روش سیمپلکس اصلاح شده با صورت حاصل ضربی عکس ماتریس که بعداً خواهیم آورد استفاده می‌کنند.

۱-۲-۳ مثال. مسأله زیر را با روش سیمپلکس اصلاح شده حل نمائید.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 + 2x_6 \\ \text{s. t. } \quad &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 6 \\ &2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 4 \\ &x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \leq 4 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

با معرفی متغیرهای کمکی x_7 و x_8 و x_9 پایه اولیه عبارت خواهد بود از:

$$\bar{b} = b \text{ و } w = c_B B^{-1} = (0, 0, 0) \text{ و } B = [a_7, a_8, a_9] = I_3$$

تکرار اول.

	عکس پایه			RHS
Z	0	0	0	0
x_7	1	0	0	6
x_8	0	1	0	4
x_9	0	0	1	4

در این جا $w = (0, 0, 0)$ با توجه به $z_j - c_j = wa_j - c_j$ داریم:

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= 1 & z_2 - c_2 &= 2 & z_3 - c_3 &= -1 \\ z_4 - c_4 &= 1 & z_5 - c_5 &= 4 \\ z_6 - c_6 &= -2 \end{aligned}$$

بنابر $z_k - c_k = 4$ و $k = 5$ پس x_5 وارد پایه می‌گردد.

$$\bar{a}_5 = B^{-1}a_5 = I a_5 = (1, 0, 2)^t$$

لهذا:

$$\begin{pmatrix} z_k - c_k \\ \bar{a}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

و

$$\theta = \text{Min} \left\{ \frac{6}{1}, \frac{4}{2} \right\} = 2 = \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{37}} > 0$$

در نتیجه $\bar{a}_{35} = 2$ عضو محوری خواهد بود و جداول ذیل را خواهیم داشت:

					x_5
Z	۰	۰	۰		۴
x_7	۱	۰	۰	۶	۱
x_8	۰	۱	۰	۴	۰
x_9	۰	۰	۱	۴	۲

پس از انجام عملیات محوری و حذف ستون x_5 داریم:

Z	۰	۰	-۲	-۸
x_7	۱	۰	$-\frac{1}{3}$	۴
x_8	۰	۱	۰	۴
x_9	۰	۰	$\frac{1}{3}$	۲

تکرار دوم. در این جا $w = (0, 0, -2)$ با توجه مجدد $z_j - c_j = w a_j - c_j$ داریم:

$$z_1 - c_1 = 1, \quad z_2 - c_2 = 2, \quad z_3 - c_3 = -3$$

$$z_4 - c_4 = -1, \quad z_6 - c_6 = -4$$

$$z_9 - c_9 = -2$$

پس $k = 2$ و x_2 متغیر واردشونده خواهد بود و داریم:

$$\bar{a}_2 = B^{-1} a_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با قرار دادن بردار $\begin{pmatrix} z_k - c_k \\ \bar{a}_k \end{pmatrix}$ در سمت راست جدول داریم:

					x_2
z	۰	۰	-۲	۸	۲
x_7	۱	۰	$-\frac{1}{4}$	۴	۱
x_8	۰	۱	۰	۴	-۱
x_5	۰	۰	$\frac{1}{2}$	۲	۰

پس از انجام عملیات محوری و حذف ستون x_2 جدول زیر را داریم:

z	-۲	۰	-۱	-۱۶
x_2	۱	۰	$-\frac{1}{4}$	۴
x_8	۰	۱	$-\frac{1}{4}$	۸
x_5	۰	۰	$\frac{1}{4}$	۲

تکرار سوم. در این جا $w = (-۲, ۰, -۱)$ می باشد. مجدداً با توجه به فرمول محاسبه‌ی $z_j - c_j$ داریم:

$$z_1 - c_1 = -۱, \quad z_2 - c_2 = -۴$$

$$z_4 - c_4 = -۲, \quad z_6 - c_6 = -۵$$

$$z_9 - c_9 = -۱$$

چون بازاء هر $j \in N_B$ داریم $z_j - c_j \leq ۰$ پس جواب متناظر جدول، جواب بهینه مسأله می باشد، یعنی:

$$x^* = (۰, ۴, ۰, ۰, ۲, ۰, ۰, ۸), \quad z^* = -۱۶$$

و بدین صورت به پایان عملیات می رسیم.

۳-۳ سیمپلکس اصلاح شده با به کار بردن عکس ماتریس پایه

به صورت فرم حاصلضرب^۱

در این قسمت نوع دیگری از کاربرد روش سیمپلکس اصلاح شده را ذکر می کنیم که در آن عکس ماتریس پایه به صورت حاصلضرب ماتریس های مقدماتی داده می شود. قبلاً یادآور

1) Product Form of Inverse

شدیم که اگر ماتریس نامنفرد $B = [a_1, \dots, a_m]$ در دست باشد و ستون j ام آن یعنی a_j با برداری مانند a جایگزین گردد رابطه زیر بین عکس ماتریس‌های فوق برقرار است:

$$B_{New}^{-1} = E_j B^{-1}$$

که در آن B_{New} ماتریس حاصل از B است که به جای ستون j ام بردار a قرار داده شده است و فرض بر این است که جایگزینی به صورتی بوده که B_{New} ماتریس نامنفرد می‌باشد و در آن:

$$E_j = [e_1, \dots, e_{j-1}, \eta, e_{j+1}, \dots, e_m]$$

و

$$\eta = \left(-\frac{\lambda}{\lambda_j}, \dots, -\frac{\lambda}{\lambda_{j-1}}, \frac{1}{\lambda_j}, -\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}, \dots, -\frac{\lambda_m}{\lambda_j} \right)$$

و

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = B^{-1}a$$

با استفاده از مطلب فوق می‌توان عکس ماتریس نامنفرد B را به صورت زیر نوشت:

$$B = E_m E_{m-1} \dots E_1 \quad (2-3)$$

که در آن E_k ماتریس یکانی است که به جای ستون k ام آن بردار η متناظر قرار داده شده است.

معادله‌ی ۲-۳ که عکس ماتریس پایه را به صورت حاصل ضرب ماتریس‌های مقدماتی بیان می‌کند فرم حاصل ضربی عکس ماتریس گویند. با به کار بردن این صورت، تمامی قدم‌های سیمپلکس را می‌توان بدون انجام عمل محوری، صورت داد. قبل از بیان کامل مطلب، آموزنده است که ضرب یک بردار در یک ماتریس مقدماتی را مورد مطالعه قرار دهیم.

الف. ضرب یک بردار مانند c از سمت چپ در E . فرض کنید E ماتریس مقدماتی با بردار ستونی غیرواحد g در وضعیت r و c برداری به صورت $c = (c_1, \dots, c_m)$ داریم:

$$cE = (c_1, \dots, c_m)[e_1, e_2, \dots, e_{r-1}, g, e_r, \dots, e_m] \quad (*)$$

که در آن: $g = (g_1, \dots, g_m)^t$

حاصل، عبارت خواهد بود از:

$$cE = (c_1, \dots, c_{r-1}, \sum_{i=1}^m c_i g_i, c_{r+1}, \dots, c_m)^t = (c_1, \dots, c_g, \dots, c_m) \quad (3-3)$$

ب. ضرب برداری مانند a از سمت راست در E . یعنی:

$$Ea = [e_1, \dots, e_{r-1}, g, e_{r+1}, \dots, e_m]a$$

که در آن:

$$\begin{aligned} a &= (a_1, \dots, a_m)^t \\ &= (a_1 + g_1 a_r, a_2 + g_2 a_r, \dots, g_r a_r, \dots, a_m + g_m a_r)^t \\ &= (a_1, \dots, a_{r-1}, 0, a_{r+1}, \dots, a_m)^t + \\ &\quad a_r (g_1, g_2, \dots, g_m)^t \end{aligned}$$

به عبارت دیگر:

$$Ea = \hat{a} + a_r g \quad (4-3)$$

که در آن \hat{a} بردار حاصل از بردار a است که به جای مؤلفه‌ی r ام آن عدد صفر قرار داده شده است.

با این مقدمات روش سیمپلکس اصلاح شده را ذکر می‌کنیم. محاسبه‌ی بردار ضرایب

سیمپلکس یعنی $w = c_B B^{-1}$ در تکرار t ام، w به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$w = c_B B_t^{-1} = c_B \cdot E_{t-1} \cdot E_{t-2} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1$$

محاسبه w به صورت تکراری چنین محاسبه می‌گردد. ابتدا $(c_B E_{t-1})$ را طبق فرمول ۳-۳ محاسبه می‌کنند و سپس با به کار بردن بردار $(c_B E_{t-1}) E_{t-2}$ را به دست می‌آورند

و همین روش را ادامه می‌دهند. این روش $BTRAN^{-1}$ نامیده می‌شود. پس از محاسبه w ، از فرمول:

$$wa_j - c_j = z_j - c_j$$

برای تمامی متغیرهای غیراساسی محاسبه می‌گردد. پس از محاسبه $z_j - c_j$ ها اگر:

$$z_k - c_k = \text{Max}\{z_j - c_j\}$$

منفی یا صفر باشد متوقف می‌گردیم در غیراین صورت اگر $z_k - c_k > 0$ را وارد پایه می‌کنیم با استفاده از روش ذیل متغیر خارج شونده را مشخص می‌نمائیم.

محاسبه \bar{a}_k ستون \bar{a}_k و \bar{b} . با توجه به این که متغیر x_k متغیر وارد شونده می‌باشد، ستون \bar{a}_k از رابطه ذیل محاسبه می‌گردد:

$$\bar{a}_k = B_t^{-1} a_k = E_{t-1} E_{t-2} \dots E_2 E_1 a_k$$

در این جا نیز با استفاده از معادله ۳-۴ ابتدا $(E_1 a_k)$ و سپس $E_2(E_1 a_k)$ محاسبه می‌گردد و همین روش ادامه پیدا می‌کند. این روش به $FTRAN^2$ معروف می‌باشد. اگر $\bar{a}_k \leq 0$ متوقف می‌گردیم، زیرا در این حالت مسأله جواب بهینه نامتناهی دارد. در غیراین صورت با انجام تست می‌نیم متغیر وارد شونده را مشخص می‌نمائیم. فرض کنید که متغیر خارج شونده x_{Br} باشد، ماتریس مقدماتی E_t با بردار ستونی غیرواحد g به صورت زیر به دست می‌آید:

$$g = \left(-\frac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{rk}}, \dots, \frac{1}{\bar{a}_{rk}}, \dots, -\frac{\bar{a}_{mk}}{\bar{a}_{rk}} \right)^t$$

و

$$E_t = [e_1, \dots, g, \dots, e_m]$$

و بردار سمت راست چنین خواهد بود:

$$B_{t+1}^{-1} b = E_t B_t^{-1} b = E_t (B_t^{-1} b)$$

1) Backward Transform process (BTRAN) 2) Forward Transformation Process (FTRAN)

۴-۳ به روز نمودن عکس پایه^۱

عکس ماتریس پایه با تولید E_t به روز می‌گردد. در این جا لازم به یادآوری می‌دانیم که عکس ماتریس پایه که به صورت حاصل ضرب ماتریس‌های مقدماتی داده می‌شود. در هر تکرار یک عامل ضرب به آن افزوده می‌گردد. وقتی این مقدار زیاد شود لازم می‌آید که عکس ماتریس پایه را مجدداً به صورت حاصل ضرب m ماتریس مقدماتی به دست آورد. یک ماتریس مقدماتی را می‌توان به صورت $(g, r)^t$ در کامپیوتر حفظ نمود که در آن g بردار غیرواحد و r موقعیت آن در I_m می‌باشد.

۲-۴-۳ مثال. مسأله‌ی زیر را با به‌کار بردن روش سیمپلکس اصلاح شده و با استفاده

از صورت حاصل ضربی عکس ماتریس پایه حل نمائید:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s. t. } & \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & \quad -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 6 \\ & \quad 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

با معرفی متغیرهای کمکی x_4 و x_5 و x_6 پایه اصلی شامل x_4 و x_5 و x_6 خواهد بود.

تکرار اول.

$$\bar{b} = (4, 6, 5)^t$$

$$x_B = (x_{B_1}, x_{B_2}, x_{B_3})^t = (x_4, x_5, x_6)^t = (4, 6, 5)^t$$

$$x_N = (x_1, x_2, x_3)^t = (0, 0, 0)^t$$

$$z = 0 \quad w = 0 = c_B I = (0, 0, 0)$$

1) Updating the Basic Inverse

با توجه به $z_j - c_j = wa_j - c_j$ داریم:

$$z_1 - c_1 = 1$$

$$z_2 - c_2 = 2$$

$$z_3 - c_3 = -1$$

بنابراین $k = 2$ و x_2 متغیر واردشونده خواهد بود:

$$\bar{a} = B^{-1}a_2 = Ia_2 = (1, 2, 1)^t$$

متغیر خارج‌شونده با استفاده از تست می‌نیم به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$\text{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{12}}, \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}}, \frac{\bar{b}_3}{\bar{a}_{32}} \right\} = \text{Min} \left\{ \frac{4}{1}, \frac{6}{2}, \frac{5}{1} \right\} = 3$$

پس x_5 متغیر خارج‌شونده می‌باشد. و ماتریس مقدماتی E_1 با بردار غیریکانی g چنین خواهد

بود.

$$g = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{a}_{12}}{a_{22}} \\ \frac{1}{\bar{a}_{22}} \\ -\frac{\bar{a}_{32}}{\bar{a}_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

بنابراین E_1 به صورت $\begin{bmatrix} g \\ 2 \end{bmatrix}$ نشان داده می‌شود.

تکرار دوم، \bar{b} را به روز می‌کنیم:

$$\bar{b} = E_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ x_{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z = 0 - \bar{b}_2(z_2 - c_2) = -6$$

$$w = c_B E_1 = (0, -2, 0) E_1 = (0, -1, 0)$$

$$z_1 - c_1 = 2$$

$$z_3 - c_3 = 1$$

بنابراین $k = 1$ و x_1 متغیر واردشونده خواهد بود.

$$\bar{a}_1 = E_1 a_1 = E_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

اندیس متغیر خارج شونده از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\text{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{11}}, \frac{\bar{b}_3}{\bar{a}_{31}} \right\} = \text{Min} \left\{ \frac{1}{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\frac{5}{3}} \right\} = \frac{2}{3}$$

پس $r = 1$ یعنی $x_B = x_4$ پس x_1 وارد می‌گردد و x_4 خارج می‌شود.

ستون غیریکانی E_2 به صورت زیر داده شده است:

$$g = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{a}_{11}} \\ -\frac{\bar{a}_{21}}{\bar{a}_{11}} \\ -\frac{\bar{a}_{31}}{\bar{a}_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

و E_2 به صورت $\begin{bmatrix} g \\ 1 \end{bmatrix}$ ضبط می‌گردد.

(توجه شود که صرفه‌جویی در حفظ داده‌ها تا چه اندازه است).

تکرار سوم. به روز نمودن \bar{b} با توجه به آنچه گذشت:

$$\bar{b} = E_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{10}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ x_{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z = -6 - \bar{b}_1(z_1 - c_1) = -\frac{22}{3}$$

$$w = c_B E_2 E_1 = (c_B E_2) E_1 = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$z_3 - c_3 = -\frac{5}{3}$$

$$z_5 - c_5 = -\frac{1}{3}$$

بنابراین بازا هر j ، $z_j - c_j \leq 0$ پس جواب بهینه است.

$$x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, \frac{1}{3}\right)$$

$$z^* = -\frac{22}{3}$$

۳-۵ مقایسه بین روش سیمپلکس اصلاح شده و سیمپلکس

در این جا به نظر می‌رسد که مقایسه‌ای بین این دو صورت گیرد. در سیمپلکس اصلاح شده با جدولی کار می‌کنیم که اندازه آن $(m+1) \times (m+1)$ می‌باشد، در صورتی‌که در سیمپلکس با جدولی در اندازه $(m+1) \times (n+1)$ کار صورت می‌گیرد. اگر نسبت به m بزرگ باشد (که در مسائل عملی همین‌طور است) در ضبط اطلاعات در حافظه کامپیوتر صرفه‌جویی بسیار زیاد صورت می‌گیرد. تعداد ضرب‌ها (تقسیم به عنوان ضرب در نظر گرفته شده زیرا a/b یعنی $a \cdot \frac{1}{b}$ و تفریق به عنوان جمع زیرا $a - b$ یعنی $a + (-b)$) و جمع‌ها در جدول زیر آمده است. خوانندگان به عنوان تمرین صحت این ادعا را اثبات نمایند.

مقایسه‌ی روش‌های سیمپلکس و سیمپلکس اصلاح شده

		عمل محوری	$z_j - c_j$ ها	کل
سیمپلکس	ضرب‌ها	$(m+1)(n-m+1)$		$m(n-m) + n + 1$
	جمع‌ها	$m(n-m+1)$		$m(n-m+1)$
سیمپلکس اصلاح شده	ضرب‌ها	$(m+1)^2$	$m(n-m)$	$m(n-m) + (m+1)^2$
	جمع‌ها	$(m)(m+1)$	$m(n-m)$	$m(n+1)$

جدول (۱-۳)

از جدول (۱-۳) ملاحظه می‌گردد که تعداد عملیات مورد نیاز در خلال تکرار روش سیمپلکس تا حدی کمتر از روش سیمپلکس اصلاح شده می‌باشد. توجه نمائید که بهر حال در بیشتر مسائل عملی ماتریس تکنولوژی پراکنده^۱ می‌باشد، یعنی چگالی آن d ($d =$ تعداد اعضای غیر صفر تقسیم بر تعداد کل اعضا) کمتر از $\frac{5}{100}$ می‌باشد در روش سیمپلکس اصلاح شده از این موقعیت می‌توان استفاده نمود. بالاخص در محاسبه‌ی $z_j - c_j$. توجه کنید $z_j = wa_j$ و

$$wa_j = \sum_{i=1}^m w_i a_{ij}$$

و می‌توان از اعضای صفر چشم‌پوشی نمود که صرفه‌جویی قابل ملاحظه‌ای را دربرخواهد داشت. برای اطلاع بیشتر در این مورد به [۱] مراجعه شود.

۶-۳ روش سیمپلکس دوآل^۲

روش سیمپلکس دوآل، مسأله‌ی دوآل را مستقیماً در جدول سیمپلکس پرایمال حل می‌نماید. در هر تکرار از یک جواب اساسی شدنی دوآل به جواب اساسی شدنی دیگری از دوآل می‌رویم تا بهینگی حاصل گردد یا نتیجه شود که دوآل نامحدود می‌باشد و پرایمال نشدنی می‌باشد. توجه شود که طبق شرایط K.K.T شرط بهینگی عبارت است از پرایمال شدنی بودن، دوآل شدنی بودن و برقرار بودن شرایط مکمل زاید. اینک به بررسی این مطلب می‌پردازیم که تفسیر

1) Sparse 2) Dual Simplex Method

دوآل شدنی بودن در جدول سیمپلکس چیست؟ مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } Z(x) = cx$$

$$\text{s. t. } Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

فرض کنید B پایه‌ای برای مسأله‌ی فوق باشد که ضرورتاً شدنی نیست

متغیرهای کمکی

	z	x_1	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+m}	RHS
z	۱	$z_1 - c_1$...	$z_n - c_n$	$z_{n+1} - c_{n+1}$...	$z_{n+m} - c_{n+m}$	$c_B \bar{b}$
x_{B_1}	۰	\bar{a}_{11}	...	\bar{a}_{1n}	\bar{a}_{1n+1}	...	\bar{a}_{1n+m}	\bar{b}_1
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
x_{B_m}	۰	\bar{a}_{m1}	...	\bar{a}_{mn}	\bar{a}_{mn+1}	...	\bar{a}_{mn+m}	\bar{b}_m

جدول فوق پرایمال شدنی است اگر $\bar{b}_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$)؛ یعنی اگر $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$.

به علاوه جدول بهینه است اگر:

$$z_j - c_j \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m+n$$

تعریف می‌کنیم $w = c_B B^{-1}$ برای $j = 1, \dots, n$ داریم:

$$z_j - c_j = wa_j - c_j$$

از این رو $z_j - c_j \leq 0$ برای $j = 1, \dots, n$ مستلزم آن است که $wa_j - c_j \leq 0$

و $a_{n+i} = e_i$ به علاوه $wa \leq c$ مستلزم برقراری $wa \leq c$ است؛ به علاوه $a_{n+i} = e_i$ و

$$c_{n+i} = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \text{ بنابراین داریم:}$$

$$z_{n+i} - c_{n+i} = wa_{n+i} - c_{n+i}$$

$$= w(-e_i) - 0$$

$$= -w_i$$

به علاوه اگر $z_{n+1} - c_{n+1} \leq 0$ ($i = 1, \dots, m$) در این صورت خواهیم داشت $w_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$)، بنابراین $w \geq 0$ حاصل می‌گردد. آن چه در بالا ثابت شد به طور خلاصه چنین بیان می‌گردد. اگر $z_j - c_j \leq 0$ ($j = 1, 2, \dots, m+n$) این مطلب مستلزم آن است که $wA \leq c$ و $w \geq 0$ که در آن $w = c_B B^{-1}$. به عبارت دیگر، شدنی بودن دوآل همان میزان بهینگی است یعنی $z_j - c_j$ (بازاء هر j) در بهینگی داریم:

$$w^* = c_B B^{-1}$$

$$N^* = \text{مقدار بهینه تابع مقصود دوآل} = (c_B B^{-1})b = c_B (B^{-1}b) = c_B \bar{b} = z^*$$

یعنی مقدار بهینه تابع مقصود پرایمال و دوآل مساوی می‌باشند. بنابراین جمع‌بندی مطالب بالا را به صورت قضیه‌ی ذیل بیان می‌کنیم:

۳-۶-۳ قضیه. در بهینگی می‌نیم نمودن مسأله‌ی پرایمال به صورت کانونی (یعنی $z_j - c_j \leq 0$ بازاء هر j)، $w^* = c_B B^{-1}$ جواب بهینه‌ی دوآل می‌باشد. به علاوه $w_i^* = -(z_{n+i} - c_{n+i}) = -z_{n+i}$ برای $(i = 1, \dots, m)$. توجه کنید که تحلیل متقارن برای حالت قیدهای تساوی نیز برقرار می‌باشد. برای جدول بهینه که متناظر پایه B می‌باشد با قرار دادن $w^* = c_B B^{-1}$ ، مجدداً شرایط بهینگی $z_j - c_j \leq 0$ مستلزم $w^* a_j - c_j \leq 0$ برای $j = 1, \dots, n$ می‌باشد؛ یعنی دوآل شدنی است و داریم:

$$z^* = c_B (B^{-1}b) = (c_B B^{-1})b = w^*$$

یعنی بهینه تابع مقصود پرایمال مساوی مقدار بهینه تابع مقصود دوآل می‌باشد. با این مقدمات به تشریح روش سیمپلکس دوآل می‌پردازیم.

۳-۶-۴ روش سیمپلکس دوآل. مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } Z = cx$$

$$\text{s. t. } Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

در بعضی موارد، پیدا نمودن یک جواب اساسی شدنی برای مسأله بسیار مشکل می‌باشد، مگر این‌که به‌طور کامل از متغیرهای تصنعی استفاده نمائیم. در بعضی از حالات پیدا نمودن یک پایه که ضرورتاً پرایمال شدنی نمی‌باشد ولی دوآل شدنی است؛ ممکن می‌باشد (یعنی بازاء هر j $z_j - c_j \leq 0$ برای مسأله‌ی می‌نیم نمودن). در چنین حالتی بسیار مفید خواهد بود که صورت دیگری از روش سیمپلکس ابداع نمود؛ که با حفظ شدنی بودن دوآل و برقرار بودن شرایط مکمل زاید، مسأله را به سمت پرایمال شدنی ببرد.

برای این منظور جدول زیر را در نظر بگیرید:

z	x_1	...	x_j	...	x_k	...	x_n	RHS	
z	\backslash	$z_1 - c_1$...	$z_j - c_j$...	$z_k - c_k$...	$z_n - c_n$	$c_B \bar{b}$
x_{B_1}	\circ	\bar{a}_{11}	...	\bar{a}_{1j}	...	\bar{a}_{1k}	...	\bar{a}_{1n}	\bar{b}_1
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
x_{B_r}	\circ	\bar{a}_{r1}	...	\bar{a}_{rj}	...	\bar{a}_{rk}	...	\bar{a}_{rn}	\bar{b}_r
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
x_{B_m}	\circ	\bar{a}_{m1}	...	\bar{a}_{mj}	...	\bar{a}_{mk}	...	\bar{a}_{mn}	\bar{b}_m

فرض کنید در جدول فوق $z_j - c_j \leq 0$ ($j = 1, \dots, n$) (مسأله از نوع می‌نیم نمودن می‌باشد) اگر در جدول فوق $\bar{b}_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) آن‌گاه جدول متناظر یک جواب بهینه می‌باشد (یادآور می‌شویم که در جدول سیمپلکس همواره شرایط مکمل زاید برقرار می‌باشد). اگر چنین نباشد، پس r است که $\bar{b}_r < 0$. با انتخاب سطر r ام به عنوان سطر محوری و ستونی مانند k با $\bar{a}_{rk} < 0$ به عنوان ستون محوری، می‌توان یک مقدار سمت راستی مانند $\bar{b}_r > 0$ به دست آورد. در خلال یک دنباله از عملیات محوری این چنین امیدوار هستیم که به جواب بهینه پرایمال برسیم. سوالی که باقی می‌ماند این است که چگونه ستون محوری را انتخاب نمائیم، به طوری که پس از انجام عمل محوری شدنی بودن دوآل حفظ شود. ثابت می‌کنیم که ستون k با قاعده‌ی می‌نیم زیر انتخاب گردد، شدنی بودن دوآل پس از انجام عمل محوری حفظ خواهد شد.

$$\frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min} \left\{ \frac{z_j - c_j}{\bar{a}_{rk}} \mid \bar{a}_{rk} < 0 \right\} \quad (5-3)$$

توجه کنید که:

$$(z_j - c_j)_{New} = (z_j - c_j) - \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}}(z_k - c_k) \quad (*)$$

در (*) $\bar{a}_{rk} < 0$ و $z_k - c_k \leq 0$ پس اگر:

الف. $\bar{a}_{rj} \geq 0$ خواهیم داشت:

$$(z_j - c_j)_{New} \leq (z_j - c_j)_{Old} \leq 0$$

ب. $\bar{a}_{rj} < 0$ در این حالت بایستی:

$$(z_j - c_j) - \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}}(z_k - c_k) \leq 0$$

به عبارت دیگر:

$$(z_j - c_j) \leq \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}}(z_k - c_k)$$

یا:

$$\frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{rk}} \leq \frac{z_j - c_j}{\bar{a}_{rj}}$$

یعنی:

$$\frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min} \left\{ \frac{z_j - c_j}{\bar{a}_{rj}} \mid \bar{a}_{rj} < 0 \right\}$$

و این همان چیزی بود که می‌خواستیم ثابت کنیم. یعنی:

$$(z_j - c_j)_{New} \leq 0 \quad \text{بازاء هر } j$$

به‌طور خلاصه اگر ستون واردشونده طبق ۳-۴ صورت پذیرد آنگاه پایه جدید به‌دست آمده دوآل شدنی خواهد بود، به عبارت دیگر مسأله دوآل شدنی باقی می‌ماند. به‌علاوه مقدار تابع مقصود، برابر با:

$$c_B B^{-1} b - \frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{rk}} \cdot \bar{b}_r \geq c_B B^{-1} b \quad (\text{چرا؟})$$

یعنی مقدار تابع مقصود یا افزایش پیدا می‌کند یا ثابت می‌ماند. یعنی مقدار تابع مقصود بدتر نمی‌گردد.

آنچه تا به حال گفته شد آن است که روش فوق‌الذکر از یک جواب اساسی شدنی دوآل به یک جواب اساسی شدنی دیگر دوآل می‌رود به صورتی که مقدار تابع مقصود دوآل بدتر نمی‌گردد. برای تکمیل موضوع مطلبی را در نظر بگیرید که بسیار مهم است. فرض کنید $\bar{b}_r < 0$ به عنوان سطر محوری انتخاب گردیده است و تمامی اعضای آن جز $\bar{b}_r > 0$ نامنفی می‌باشند یعنی در معادله:

$$x_{Br} + \sum_{j \in N_B} \bar{a}_{rj} x_j = \bar{b}_r < 0 \quad (6-3)$$

در این معادله $x_{Br} \geq 0$ و تمامی $a_{rj} \geq 0$ و $x_j \geq 0$ یعنی سمت چپ معادله ≥ 0 می‌باشد ولی سمت راست آن منفی است به عبارتی هیچ $x_j \leq 0$ یافت نمی‌شود که در این معادله صدق نماید. یعنی قیود ناسازگارند یعنی پرایمال نشدنی است. چون فرض بر این بود که دوآل شدنی است، نتیجه می‌شود که دوآل نامحدود می‌باشد. (به عنوان تمرین دوآل را یک مسأله مستقل در نظر بگیرید و جهت شدنی دورشونده‌ای برای آن به دست آورید که $bd > 0$).

۳-۶-۵ خلاصه روش سیمپلکس دوآل (برای مسأله از نوع می‌نیمم نمودن).

قدم اولیه. یک پایه مانند B برای پرایمال پیدا نمائید که بازاء هر j ، $c_j - z_j \leq 0$ (روش پیدا نمودن چنین پایه‌ای در همین فصل گفته خواهد شد).

قدم اصلی.

(۱) اگر $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$ متوقف شوید، جواب متناظر جدول، جواب بهینه است. در

غیراین صورت سطری مانند r انتخاب نمائید که $\bar{b}_r < 0$ روش انتخاب معمولاً به صورت

زیر می‌باشد:

$$\bar{b}_r = \text{Min} \{ \bar{b}_i \mid \bar{b}_i < 0 \}$$

(۲) اگر $\bar{a}_{rj} \geq 0$ (بازاء هر j) متوقف شوید، دوآل نامحدود است و پرایمال نشدنی است.

درغیراین صورت ستون k ام به عنوان ستون محوری طبق فرمول زیر انتخاب نمائید:

$$\frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min} \left\{ \frac{z_j - c_j}{\bar{a}_{rj}} \mid a_{rj} < 0 \right\}$$

(۳) با ملحوظ داشتن عضو محوری \bar{a}_{rk} ، عملیات محوری انجام دهید و به (۱) در قدم اصلی برگردید.

روش فوق‌الذکر را با مثالی روشن می‌نمائیم.

۶-۶-۳ مثال. مسأله‌ی زیر را با روش سیمپلکس دوآل حل نمائید:

$$\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

با معرفی متغیر x_4 و x_5 مسأله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 4$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$$

قیدهای تساوی در عدد (۱-) ضرب می‌کنیم تا در ماتریس تکنولوژی ماتریس I ظاهر گردد.

$$\text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$-x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3$$

$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$$

جدول سیمپلکس اولیه چنین خواهد بود:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	۱	-۲	-۳	-۴	۰	۰	۰
x_4	۰	-۱	-۲	-۱	۱	۰	-۳
x_5	۰	-۲	۱	-۳	۰	۱	-۴

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	۱	۰	-۴	-۱	۰	-۱	۴
x_4	۰	۰	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	۱	$-\frac{1}{4}$	-۱
x_1	۰	۱	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	۰	$-\frac{1}{4}$	۲

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	۱	۰	۰	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{28}{5}$
x_2	۰	۰	۱	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_1	۰	۱	۰	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$

چون $\bar{b} \geq 0$ و بازاء هر j ، $z_j - c_j \leq 0$ ، جواب‌های پربال و دوآل در دست می‌باشد که عبارتند از:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = \left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0, 0\right)$$

$$w^* = (w_1^*, w_2^*) = \left(\frac{8}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

توجه کنید که w_1^* و w_2^* به ترتیب قرینه‌ی $z_j - c_j$ متناظر در ستون‌های ۴ و ۵ که متناظر متغیرهای x_5 و x_4 می‌باشند. همین‌طور توجه نمایید که در جدول‌های متوالی، مقدار تابع مقصود مرتب افزایش نموده است. (برای مسأله‌ی دوآل از نوع ماکزیم نمودن).

روش سیمپلکس دوآل روش متقارب است.

ابتدا ثابت می‌کنیم که روش سیمپلکس دوآل در غیاب تبه‌گنی متقارب می‌باشد (یعنی مسأله را در تعداد متناهی از مراحل حل می‌کند). توجه نمایید که روش سیمپلکس دوآل از یک جواب اساسی شدنی دوآل به یک جواب اساسی شدنی دیگر می‌رود و همین‌طور توجه نمایید که اختلاف بین دو مقدار تابع مقصود از تکراری به تکرار بعدی برابر با $-\frac{(z_k - c_k)}{\bar{a}_{rk}}$ می‌باشد، که چون $\bar{b}_r < 0$ و $-(z_k - c_k) > 0$ و $\bar{a}_{rk} < 0$ پس مقدار α مثبت می‌باشد

یعنی تابع مقصود در این حالت اکیداً صعود می‌نماید و هیچ پایه‌ای تکرار نمی‌گردد در نتیجه الگوریتم در تعداد متناهی از مراحل مسأله را حل می‌نماید. (توجه داشته باشید که حل مسأله به این معنی است که به جواب بهینه می‌رسد یا نتیجه می‌گردد که پرایمال نشدنی و دوآل نامحدود می‌باشد). در این مرحله از مطلبی استفاده شد که $-(z_k - c_k) > 0$. چرا $-(z_k - c_k) > 0$ ؟

برای جواب دادن به این سوال توجه داشته باشید که فرض کردیم مسأله غیرتبه‌گن می‌باشد. چون x_k یک متغیر غیراساسی می‌باشد پس مقدار آن صفر می‌باشد با توجه به مطلب زیر یعنی:

$$\begin{aligned} (c_j - wa_j)x_j &= 0 & j = 1, \dots, n \\ w_i(a^i x - bi) &= 0 & i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

در حالت غیرتبه‌گنی از عوامل ضرب فوق یکی صفر و دیگری مخالف صفر می‌باشد. حال رابطه‌ی $(z_k - c_k)x_k = (c_k - wa_k)x_k = 0$ را در نظر بگیرید. پس بایستی $c_k - z_k > 0$ یعنی $-(z_k - c_k) > 0$ و این همان چیزی بود که مورد استفاده قرار گرفت و تقارب متناهی الگوریتم را تضمین نمود. اثبات متقارب بودن الگوریتم در حالت تبه‌گنی نیاز به مقدماتی دارد که ذیلاً بیان می‌کنیم و سپس در این حالت متقارب بودن آن را اثبات می‌نمائیم.

چگونه می‌توان یک جواب شدنی دوآل برای مسأله پیدا نمود؟ نشان می‌دهیم که با به‌کار بردن تکنیک قید تصنعی همواره می‌توان یک جواب دوآل شدنی برای مسأله به‌دست آورد (در صورتی‌که دوآل شدنی باشد) در به‌کار بردن روش سیمپلکس دوآل فرض بر این است که یک جواب اساسی شدنی دوآل در دست می‌باشد. برای به‌دست آوردن چنین جوابی به‌صورت ذیل عمل می‌کنیم:

فرض کنیم که m ستون اول تشکیل پایه اولیه را می‌دهند. قید $\sum_{j=m+1}^n x_j \leq M$ را به مسأله اضافه می‌کنیم. در این جا $M > 0$ یک عدد بسیار بزرگی است جدول اولیه ذیلاً نشان داده شده است؛ که در آن x_{n+1} ، متغیر کمکی متناظر قید تصنعی می‌باشد.

	z	x_1	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n	x_{n+1}	RHS
z	1	0	...	0	$z_{m+1} - c_{m+1}$...	$z_n - c_n$	0	$c_B \bar{b}$
x_{n+1}	0	0	...	0	1	...	1	1	M
x_1	0	1	...	0	\bar{a}_{1m+1}	...	\bar{a}_{1n}	0	\bar{b}_1
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
x_m	0	0	...	1	\bar{a}_{mm+1}	...	\bar{a}_{mn}	0	\bar{b}_m

این قید اضافی تمامی متغیرهای غیراساسی را محدود می‌نماید بنابراین تمامی متغیرهای اساسی و در نتیجه تمامی مسأله‌ی پرایمال محدود خواهد شد. برای به دست آوردن یک جواب اساسی شدنی دوآل در جدول جدید فرض کنیم:

$$z_k - c_k = \text{Max}\{z_j - c_j\}$$

ستون k ام را به عنوان ستون واردشونده محوری انتخاب می‌کنیم و متغیر x_{n+1} را به عنوان متغیر خارج‌شونده به کار می‌گیریم. پس از انجام عملیات محوری داریم:

$$(z_j - c_j)_{New} = (z_j - c_j) - \frac{a_{rj}}{\bar{a}_{rk}}(z_k - c_k)$$

الف. $z_j - c_j$ در این صورت $a_j = 0$ ($j = 1, \dots, m$) پس $(z_j - c_j)_{New} = 0$

ب. $z_j - c_j \neq 0$ با توجه به این که $\bar{a}_{rk} = 1$ و $\bar{a}_{rj} = 1$ پس:

$$z_j - c_j - (z_k - c_k) \leq 0$$

زیرا:

$$z_k - c_k = \text{Max}\{z_j - c_j\}$$

پس:

$$(z_j - c_j)_{New} \leq 0 \quad \text{بازاء هر } j$$

یعنی جواب متناظر جدول دوآل شدنی می‌باشد.

با به کار بردن روش سیمپلکس دوآل یکی از سه حالت زیر رخ خواهد داد:

(۱) که دوآل جواب نامتناهی دارد. در این حالت پرایمال نشدنی خواهد بود.

(۲) جواب بهینه‌ای برای پرایمال و دوآل به دست آمده و $x_{n+1}^* > 0$ در این حالت قید

$$\sum x_j^* < M$$

زائد است و جواب بهینه پرایمال در دست می‌باشد.

(۳) $x_{n+1}^* = 0$ و جواب بهینه برای پرایمال و دوآل به دست آمده است.

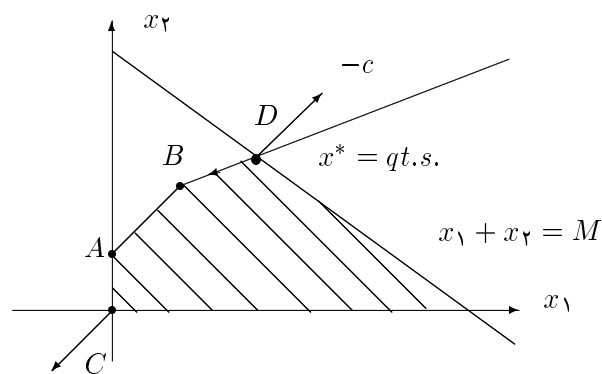
در این حالت قید جدید (تصنعی) اضافه شده فعال می‌باشد دو حالت تشخیص می‌دهیم به

شرح ذیل:

الف. $z_{n+1} - c_{n+1} < 0$. در این حالت:

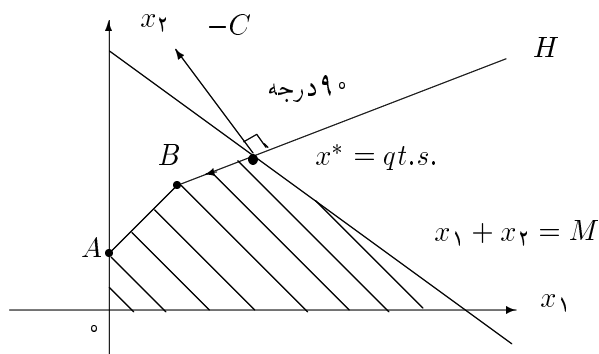
$$(-c)d_0 = z_{n+1} - c_{n+1} < 0$$

متغیر x_{n+1} یک متغیر غیراساسی است. و این قید تصنعی معرفی شده که مار بر نقطه بهینه است جواب پرایمال را محدود می‌نماید (حد می‌گذارد). هم‌چنان‌که M افزایش یابد تابع مقصود در راستای d_0 کاهش می‌یابد (در حقیقت افزایش M باعث افزایش x_{n+1} می‌گردد) بنابراین پرایمال نامحدود خواهد بود. مطلب به طریق ترسیمی در شکل (۲-۳) نشان داده شده است.



شکل (۱-۳)

ب. در این حالت $z_{n+1} - c_{n+1} = 0$ در این حالت $z_{n+1} - c_{n+1} = (-c)d_0 = 0$.



شکل (۲-۳)

در این جا نقطه رأسی B و تمامی نیم خط BH جواب بهینه است نقطه k یک نقطه‌ی غیراساسی است و بهینه است.

مثال ۷-۶-۳. جدول زیر را در نظر بگیرید. فرض کنیم روش سیمپلکس دوآل را می‌خواهیم در رابطه با جدول زیر به‌کاربریم:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	۱	۰	۱	۵	-۱	۰	۰
x_1	۰	۱	۲	-۱	۱	۰	۴
x_5	۰	۰	۳	۴	-۱	۱	۳

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	۱	۰	۵	۱	۰	۰	۰	۰
x_6	۰	۰	۱	۱	۰	۱	M	
x_1	۰	۱	۲	-۱	۱	۰	۰	۴
x_5	۰	۰	۳	۴	-۱	۱	۰	۳

با افزودن قید تصنعی $x_2 + x_3 + x_4 \leq M$ که متغیر کمکی آن x_6 می‌باشد. جدول فوق را خواهیم داشت.

از این جدول واضح است که:

$$\text{Max}(z_j - c_j) = z_3 - c_3 = 5 = -\bar{c}_3$$

پس متغیر x_3 واردشونده و متغیر x_6 خارج شونده خواهد بود. پس از انجام عمل محوری داریم:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	۱	۰	-۴	۰	-۶	۰	-۵	$-۵M$
x_3	۰	۰	۱	۱	۱	۰	۱	M
x_1	۰	۱	۳	۰	۲	۰	۱	$M+۴$
x_5	۰	۰	-۱	۰	-۵	۱	-۴	$-۴M+۳$

در جدول فوق تمامی $z_j - c_j \leq 0$ پس دوآل شدنی است با به کار بردن روش سیمپلکس دوآل می توان مسأله را حل نمود. ادامه عملیات به عنوان تمرین به عهده خواننده می باشد. توجه شود که در جدول فوق متناظر هر ستون غیراساسی $(\bar{c}_j, \bar{a}_j)^t > 0$ می باشد. یادآور می شویم که متغیرهای x_1, \dots, x_n مکمل متغیرهای دوآل w_{m+1}, \dots, w_{m+n} و متغیرهای w_1, \dots, w_m مکمل متغیرهای x_{n+1}, \dots, x_{n+m} می باشند، که به صورت زیر نیز می توان نشان داد:

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{x_1, \dots, x_m}_{\text{متغیرهای اساسی پرایمال}} \quad \underbrace{x_{m+1}, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}}_{\text{متغیرهای غیراساسی پرایمال}} \\
 \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 \underbrace{w_{m+1}, \dots, w_{m+m}}_{\text{متغیرهای غیراساسی دوآل}} \quad \underbrace{w_{m+1}, \dots, w_{n+m}, w_1, \dots, w_m}_{\text{متغیرهای اساسی دوآل}}
 \end{array}$$

در نمودار فوق فرض شده که x_1, \dots, x_m متغیرهای اساسی هستند و در نتیجه x_{m+1}, \dots, x_{m+n} متغیرهای غیراساسی می باشند.

عیناً w_{m+1}, \dots, w_{m+n} متغیرهای اساسی و $w_1, \dots, w_m, w_{n+m}, \dots, w_{m+m}$ متغیرهای غیراساسی دوآل می باشند.

	z	x_1	\dots	x_m	x_{m+1}	\dots	x_n	x_{n+1}	\dots	x_{n+m}	RHS	
z	۱	$-c_1$	\dots	$-c_m$	$-c_{m+1}$	\dots	$-c_n$	۰	\dots	۰	۰	
x_1	۰	a_{11}	\dots	a_{1m}	a	\dots	a_{1n}	-۱	۰	\dots	۰	b_1
x_2	۰	a_{21}	\dots	a_{2m}	a_{2m+1}	\dots	a_{2n}	۰	-۱	\dots	۰	b_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_m	۰	a_{m1}	\dots	a_{mm}	a_{mm+1}	\dots	a_{mn}	۰	\dots	-۱	b_m	

۷-۳ الگاریتم پرایمال-دوآل

تا به حال دو نوع از الگاریتم‌های سیمپلکس را که اولی پرایمال سیمپلکس و دومی دوآل سیمپلکس بود ذکر کردیم. گفتیم که در پرایمال سیمپلکس مسأله را با یک جواب اساسی شدنی (در صورتی که موجود باشد) شروع می‌کنیم و با حفظ شرایط مکمل زاید، با انجام یک رشته از عملیات محوری یک جواب اساسی شدنی برای دوآل به دست می‌آوریم (تا به این نتیجه می‌رسیم که مسأله جواب بهینه نامتناهی دارد). در روش دوآل سیمپلکس از یک جواب اساسی شدنی برای دوآل شروع می‌کنیم و با حفظ شرایط مکمل زاید، در صورت وجود به یک جواب اساسی شدنی پرایمال می‌رسیم.

در این قسمت روشی را توضیح می‌دهیم که الگاریتم پرایمال - دوآل نامیده می‌شود که بیشتر شبیه الگاریتم دوآل سیمپلکس می‌باشد، با این تفاوت که الگاریتم به جای جواب اساسی شدنی دوآل از یک جواب شدنی دوآل شروع می‌نماید و با حفظ شرایط مکمل زاید در صورت وجود به یک جواب اساسی شدنی دوآل می‌رسد. مسائل پرایمال - دوآل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z(x) = cx \\ P) \quad & \text{s. t.} \quad Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & W(w) = wb \\ D) \quad & \text{s. t.} \quad wA \leq b \\ & w \text{ آزاد} \end{aligned}$$

فرض کنید w یک جواب شدنی اولیه برای دوآل باشد؛ یعنی $wa_j \leq c_j$ (بازاء هر j). با توجه به شرایط مکمل زاید؛ اگر $wa_j = c_j$ آن‌گاه x_j می‌تواند مقدار مثبت اختیار نماید. سعی می‌کنیم از بین این متغیرها یک جواب شدنی برای پرایمال انتخاب نماییم. فرض کنید:

$$Q = \{j \mid wa_j = c_j\}$$

در حقیقت Q مجموعه‌ی اندیس تمامی متغیرهای پرایمال می‌باشد که می‌توانند مقادیر مثبت اختیار نمایند. فاز اول سعی می‌نماید که یک جواب شدنی پرایمال برای متغیرهای پرایمال از بین این اندیس‌ها به دست آید. یعنی مسأله‌ی زیر را حل می‌نماید:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \sum_{j \in Q} c_j x_j + I x_a \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j \in Q} a_j x_j + I x_a = b \\ & x_j \geq 0 \quad j \in Q \\ & x_a \geq 0 \end{aligned}$$

متغیرهای تصنعی را به کار می‌بریم تا در فاز اول یک جواب شدنی برای مسأله به دست آوریم. مسأله‌ی فوق را مسأله پرایمال محدود شده^۱ می‌نامند. علت نام‌گذاری آن است که بعضی از متغیرهای پرایمال می‌توانند مقادیر مثبت اختیار نمایند.

پس از حل مسأله فوق، یک جواب بهینه برای مسأله به دست می‌آید. فرض کنیم مقدار بهینه‌ی تابع مقصود x_0 باشد. $x_0 = 0$ یا $x_0 > 0$. وقتی $x_0 = 0$ ، در این صورت یک جواب اساسی شدنی برای مسأله‌ی پرایمال حاصل گردیده است، زیرا تمامی متغیرهای تصنعی برابر با صفر می‌باشند، به علاوه جواب به دست آمده در شرایط مکمل زاید نیز صدق می‌نماید، یعنی $(w a_j - c_j) x_j = 0$. زیرا یا $j \in Q$ یا $j \in \bar{Q} = \{1, 2, \dots, n\} - Q$. اگر $j \in Q$ در این صورت $w a_j - c_j = 0$ و اگر $j \in \bar{Q}$ در این صورت $x_j = 0$. بنابراین جواب به دست آمده در شرایط K.K.T صدق می‌کند، یعنی یک جواب بهینه برای مسأله می‌باشد. اگر $x_0 > 0$ در این صورت جواب حاصل پرایمال شدنی نمی‌باشد. در این حال بایستی یک جواب شدنی برای دوآل چنان بسازیم که اجازه ورود بعضی از متغیرها را به مسأله‌ی محدود شده در جهت تحلیل احتمالی تابع مقصود (یا حداقل بدتر نشدن آن) به ما بدهد. این کار، چنین صورت می‌گیرد که بردار w به صورتی اصلاح می‌گردد که متغیرهای پرایمال در مسأله‌ی محدود شده پرایمال در آن باقی بمانند و به علاوه حداقل یک متغیر که اندیس آن در Q نبود وارد مسأله

1) Restricted Primal Problem (RPP)

گردد. به علاوه وارد شدن این متغیر به صورتی است که باعث تقلیل در مقدار x می‌گردد. در جهت ساختن چنین بردار دوآل، مسأله‌ی فاز اول زیر را در نظر بگیرید (مسأله‌ی دوآل، مسأله محدود شده فوق‌الذکر)

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & wb \\ & va_j \leq 0 \quad j \in Q \\ & v \leq 1 \\ & v \text{ آزاد} \end{aligned}$$

فرض کنید v^* جواب بهینه‌ی، مسأله‌ی فوق‌الذکر باشد. در این صورت اگر یک متغیر اصلی مانند x_j عضوی از پایه مسأله‌ی محدود شده باشد، آنگاه بایستی $va_j = 0$. شرایط ورود به پایه در مسأله‌ی محدود شده آن است که قید متناظر آن در رابطه $va_j > 0$ صدق نماید. به هر حال هیچ متغیری در مسأله محدود شده پرایمال این خاصیت را ندارد، زیرا مسأله حل شده و شرایط بهینگی احراز گردیده است. برای تمامی $j \notin Q$ ، va_j^* را محاسبه می‌نمائیم. اگر $va_j^* > 0$ ، در این صورت، x_j را می‌توان وارد مسأله‌ی پرایمال محدود شده نمود، با این مقصود که x را کاهش دهد. بنابراین به دنبال پیدا نمودن راهی هستیم که x_j را در این حالت وارد مسأله‌ی محدود شده نمائیم.

بردار دوآل w' را با $\theta > 0$ به صورت زیر می‌سازیم:

$$w' = w + \theta v^*$$

پس:

$$\begin{aligned} w'a_j - c_j &= (w + \theta v^*)a_j - c_j \\ &= (wa_j - c_j) + \theta v^*a_j \end{aligned} \quad (7-3)$$

توجه داشته باشید که برای هر $j \in Q$ داریم:

$$wa_j - c_j = 0, \quad v^*a_j \leq 0$$

بنابراین معادله‌ی ۷-۳ مستلزم آن است که:

$$w'a_j - c_j = 0 \quad j \in Q \text{ بازاء هر } j$$

بالاخص اگر $j \in Q$ ، متغیر پایه مسأله محدود شده باشد:

$$w'a_j - c_j = 0, \quad v^*a_j = 0$$

پس x_j به این صورت می‌تواند در مسأله باقی بماند؛ زیرا $w'a_j - c_j \leq 0$ اگر $j \notin Q$ و $v^*a_j \leq 0$ در این صورت:

$$w'a_j - c_j = (wa_j - c_j) + \theta v^*a_j \leq 0$$

اگر $j \notin Q$ و $v^*a_j > 0$ در این صورت بایستی θ به صورتی انتخاب گردد که $w'a_j - c_j \leq 0$. توجه داشته باشید که بازاء هر $j \in Q$ ، $wa_j - c_j \leq 0$ و برای $j \notin Q$ ، $wa_j - c_j < 0$ زیرا اگر $wa_j - c_j < 0$ این اندیس در Q بود. پس برای هر $j \notin Q$ و $v^*a_j > 0$ بایستی:

$$w'a_j - c_j \leq 0$$

یا

$$(wa_j - c_j) + \theta v^*a_j \leq 0$$

یا

$$\theta v^*a_j \leq -(wa_j - c_j)$$

یا

$$\theta^* = \text{Min}\left\{\frac{-(wa_j - c_j)}{v^*a_j} \mid v^*a_j > 0\right\} \quad (۸-۳)$$

با این $\theta^* = \theta$ از رابطه‌ی ۶-۳ حداقل برای یک $j \notin Q$ داریم:

$$w'a_j - c_j = 0$$

اگر این اندیس را k بنامیم، داریم:

$$w'a_k - c_k = 0$$

به علاوه $v^*a_k > 0$. پس بازاء هر $j = 1, \dots, n$ داریم $w'a_j - c_j \leq 0$ یعنی w' جواب شدنی دوآل می‌باشد. پس x_k وارد مسأله‌ی محدود شده پرایمال می‌گردد.

توجه. در این جا سوالی که پیش می‌آید آن است که در مسأله‌ی جدید چه متغیرهایی اندیس آن‌ها مجموعه‌ی Q جدید را می‌سازند؟

$$\begin{aligned} Q_{New} &= \{j \mid j = k \text{ یا } w'a_j - c_j = 0\} \\ &= \{k\} \cup \{j \mid v^*a_j = 0 \text{ \& } \text{در مسأله‌ی قبلی اساسی بود}\} \end{aligned}$$

پس Q جدید زیرمجموعه‌ای از $\{1, 2, \dots, n\}$ می‌باشد که،

$$k \notin Q_{Old}, \quad k \in Q_{New}$$

زیرا مساوی نیست؛ زیرا

به علاوه برای $j \in Q_{New}$ در حالت داریم:

الف. $j = k$ در این صورت طبق ۳-۶

$$w'a_k - c_k = 0$$

ب. $j \in Q_{New}$ و $j \neq k$ داریم:

$$\begin{aligned} w'a_j - c_j &= (wa_j - c_j) + \theta^* v^*a_j \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

پس برای هر $j \in Q_{New}$ داریم:

$$w'a_j - c_j = 0$$

به علاوه چون بعد ناحیه مسأله‌ی محدود شده افزایش می‌یابد، پس تابع مقصود بدتر نمی‌گردد (در این رابطه قدری تعمق کنید و مثال عددی بزنید) خلاصه آن‌که با اصلاح بردار شدنی دوآل، بردار جدیدی مانند w' که دوآل شدنی است به دست می‌آوریم که اجازه وارد شدن یک متغیر جدید را به مسأله‌ی پرایمال محدود شده به ما می‌دهد که توانایی تقلیل تابع مقصود را دارد.

۸-۷-۳ حالتی که دوآل نامحدود می‌گردد. در مطلب بالا روش تا زمانی ادامه می‌یابد که $x^\circ = 0$ ، که در این حالت یک جواب اساسی شدنی پرایمال حاصل می‌گردد یا به این نتیجه می‌رسیم که $x^\circ > 0$ و بازاء هر $j \notin Q$ ، داریم $v^* a_j \leq 0$. در این حالت در نظر بگیرد:

$$w' = w + \theta v^*$$

چون بازاء هر j ، $w' a_j - c_j \leq 0$ و $v^* a_j \leq 0$ داریم بازاء هر $\theta > 0$

$$w' a_j - c_j = (w a_j - c_j) + \theta v^* a_j \leq 0 \quad \text{بازاء هر } j$$

یعنی w' بازاء هر $\theta < 0$ برای دوآل شدنی است و به علاوه:

$$w' b = (w + \theta v^*) b = w b + \theta v^* b$$

طبق قضیه‌ی قوی دوآلیتی $x^\circ = v^* b < 0$ پس $w' b$ با افزایش θ افزایش می‌یابد و

$$w' b \rightarrow +\infty$$

$$\theta \rightarrow \infty$$

یعنی مسأله دوآل بهینه‌ی نامتناهی خواهد داشت که با توجه به فضایای دوآلیتی پرایمال نشدنی می‌گردد.

توجه. چرا معرفی x_k باعث کاهش x° می‌گردد (یا آن را بدتر نمی‌کند)؟

برای اثبات مطلب مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j \in Q} x_j + x_a \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j \in Q} a_j x_j + I x_a = b \\ & x_j \geq 0 \quad j \in Q \\ & x_a \geq 0 \end{aligned}$$

و فرض کنید B پایه بهینه‌ی متناظر مسأله‌ی فوق‌الذکر باشد پس داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in Q^*} x_j^* a_j + \sum_{j \in L} e_j x_{a_j}^* &= b \\ x_j^* &\geq 0 \quad j \in Q^* \subseteq Q \\ x_a^* &\geq 0 \quad j \in L \subseteq \{1, 2, \dots, m\} \end{aligned}$$

مسأله‌ی جدید محدود شده پرایمال چنین است:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j \in Q^*} x_j + \sum_{j \in L} x_{a_j} + x_k \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j \in Q^*} a_j x_j + \sum_{j \in L} x_{a_j} + a_k x_k = b \\ & x_j \geq 0 \quad j \in Q^* \cup \{k\} \\ & x_{a_j} \geq 0 \quad j \in L \end{aligned}$$

به علاوه $w a_k - c_k = z_k - c_k < 0$ یعنی:

$$x_{New}^* = x_{Old}^* - (z_k - c_k) x_k$$

$$x_{New} = x_{Old} + \alpha$$

که در آن $\alpha = -(z_k - c_k)x_k \leq 0$.

پس اگر x_k در بهینه جدید در پایه با مقدار مثبت باشد؛ x° به اندازه $\alpha > 0$ کاهش پیدا می‌کند. در غیراین صورت $x_{New}^\circ = x_{Old}^\circ$ خواهد بود در هر حالت مقدار تابع مقصود بدتر نمی‌گردد. یعنی اگر مسائل محدود شده پرایمال غیرتبه‌گن باشند، x° اکیداً کاهش می‌یابد.

۹-۷-۳ خلاصه الگاریتم پرایمال - دوآل (برای مسأله می‌نیم نمودن).

قدم اولیه. بردار w را چنان انتخاب کنید که بازاء هر j ,

$$wa_j - c_j \leq 0$$

قدم اصلی.

(۱) فرض کنید

$$Q = \{j \mid wa_j - c_j = 0\}$$

مسأله‌ی پرایمال محدود شده زیر را حل نمائید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j \in Q} x_j + x_a \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j \in Q} a_j x_j + I x_a = b \\ & x_j \geq 0 \quad j \in Q \\ & x_a \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید x° مقدار بهینه‌ی تابع مقصود باشد.

اگر $x^\circ = 0$ ، در این صورت جواب حاصل از حل مسأله فوق در شرایط **K.K.T**

صدق می‌کند و بهینه می‌باشد.

اگر $x^\circ > 0$ ، فرض کنیم v^* جواب بهینه دوآل مسأله محدود شده پرایمال فوق‌الذکر

باشد.

(۲) اگر بازاء هر j ، $v^*a_j \leq 0$ ، متوقف می‌گردیم. مسأله‌ی دوآل بهینه‌ی نامتناهی دارد، در نتیجه پرایمال نشدنی است. در غیراین صورت:

$$\theta^* = \text{Min}_j \left\{ \frac{-(wa_j - c_j)}{v^*a_j} \mid v^*a_j > 0 \right\} > 0$$

و قرار دهید به جای w ، $w + \theta^*v$ که یک جواب شدنی دوآل می‌باشد و به قدم اول برگرد.

اکنون با حل یک مثال مطلب فوق را بیشتر توضیح می‌دهیم.

مثال ۳-۷-۱۰. مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 \\ \text{s. t.} & 2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 - x_6 = 6 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 - x_7 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{array}$$

دوآل مسأله فوق چنین است. توجه کنید که به خاطر صورت تساوی قید دوم و اول w_1 و w_2 در مسأله‌ی زیر محدودیت علامتی ندارد.

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 6w_1 + 3w_2 \\ \text{s. t.} & 2w_1 + w_2 \leq 3 \\ & -w_1 + w_2 \leq 4 \\ & w_1 + 2w_2 \leq 6 \\ & 6w_1 + w_2 \leq 7 \\ & -5w_1 + 2w_2 \leq 1 \\ & -w_1 \leq 0 \\ & -w_2 \leq 0 \\ & w_1, w_2 \text{ آزاد} \end{array}$$

یک جواب شدنی اولیه‌ی دوآل $w = (0, 0)$ می‌باشد با قرار دادن این مقادیر در قیدهای دوآل، ملاحظه می‌گردد که فقط دو قید آخری فعال می‌باشند (تنگ هستند) بنابراین:

$$Q = \{6, 7\}$$

اگر x_8 و x_9 به عنوان متغیرهای تصنعی در نظر گرفته شوند، مسأله‌ی محدود شده پرایمال چنین خواهد بود.

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_8 + x_9 \\ \text{s. t.} & -x_6 + x_8 = 6 \\ & -x_7 + x_9 = 7 \\ & x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0 \end{array}$$

جواب بهینه‌ی مسأله فوق عبارت است از:

$$(x_6, x_7, x_8, x_9) = (0, 0, 6, 3)$$

و $x_9 = 3 > 0$. بنابراین دوآل مسأله پرایمال محدود شده فوق چنین خواهد بود:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 6v_1 + 3v_2 \\ & -v_1 \leq 0 \\ & -v_2 \leq 0 \\ & v_1 \leq 1 \\ & v_2 \leq 1 \end{array}$$

v_1, v_2 آزاد هستند

با به‌کاربردن شرایط مکمل زاید، ملاحظه می‌گردد که چون x_8 و x_9 اساسی می‌باشند، بایستی دو قید آخر تنگ باشند. و

$$v^* = (v_1^*, v_2^*) = (1, 1)$$

با محاسبه‌ی $v^* a_j$ (برای هر j) داریم:

$$\begin{array}{lll} v^* a_1 = 3 & v^* a_3 = 3 & v^* a_5 = -3 \\ v^* a_2 = 0 & v^* a_4 = 7 & \end{array}$$

و

$$\theta^* = \text{Min} \left\{ \frac{-(-3)}{3}, \frac{-(-6)}{3}, \frac{-(-7)}{7} \right\} = 1 > 0$$

و

$$\begin{aligned} w' &= w + \theta v^* \\ &= (0, 0) + 1(1, 1) = (1, 1) \end{aligned}$$

با داشتن جواب شدنی $w' = (1, 1)$ ، مجدداً Q را محاسبه می‌نمائیم ملاحظه می‌گردد که قید اول و چهارم تنگ می‌باشند. پس:

$$Q = \{1, 4\}$$

که مسأله‌ی محدود شده پرایمال را به صورت زیر به ما می‌دهد:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_8 + x_9 \\ \text{s. t.} & 2x_1 + 6x_4 + x_8 = 6 \\ & x_1 + x_4 + x_9 = 3 \\ & x_1, x_4, x_8, x_9 \geq 0 \end{array}$$

جواب بهینه‌ی مسأله‌ی فوق عبارت است از:

$$(x_1, x_4, x_8, x_9) = (3, 0, 0, 0)$$

و مقدار بهینه‌ی تابع مقصود $x_0 = 0$. بنابراین یک جواب بهینه برای مسأله‌ی اصلی داریم که به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*) &= (3, 0, 0, 0, 0, 0) \\ w^* &= (w_1^*, w_2^*) = (1, 1) \end{aligned}$$

حال قبل از اینکه همگرایی الگوریتم فوق را بررسی نمائیم صورت جدولی الگوریتم پرایمال-دوآل را ارائه می‌کنیم.

۸-۳ صورت جدولی روش پرایمال-دوآل^۱

فرض کنید $z_j - c_j$ ضرایب سطر صفر برای مسأله‌ی اصلی و $\hat{z}_j - \hat{c}_j$ ضرایب سطر صفر برای مسأله‌ی پرایمال محدود شده باشد در این صورت برای هر متغیری مانند x_j داریم:

$$z_j - c_j = wa_j - c_j \quad \hat{z}_j - \hat{c}_j = va_j - 0 = va_j$$

همچنین داریم:

$$\frac{wa_j - c_j}{va_j} = \frac{z_j - c_j}{\hat{z}_j - \hat{c}_j}$$

و

$$(wa_j - c_j) + \theta va_j = (z_j - c_j) + \theta(\hat{z}_j - \hat{c}_j)$$

ما می‌توانیم تمام عملیات ضروری را مستقیماً در جدول انجام دهیم. در جدول روش پرایمال - دوآل دو سطر تابع مقصود موجود است. اولین سطر مقادیر $z_j - c_j$ را می‌دهد و دومین سطر مقادیر $\hat{z}_j - \hat{c}_j$ برای روشن شدن مطلب، روش جدول را برای مثال قبلی به‌کار می‌بریم جدول اولیه مثال فوق‌الذکر به‌صورت زیر خواهد بود. در این جدول:

$$z_j - c_j = wa_j - c_j = -c_j \quad w = (0, 0)$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS
-۳	-۴	-۶	-۷	-۱	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	-۱	-۱	۰
۲	-۱	۱	۶	-۵	-۱	۰	۱	۰	۶
۱	۱	۲	۱	۲	۰	-۱	۰	۱	۳

و عضو سمت راست در سطر z برابر صفر می‌باشد. وقتی $w \neq 0$ مقدار سمت راست برابر wb خواهد بود (با توجه به این‌که $w = (1, 0)$ یک جواب شدنی دوآل می‌باشد، سعی کنید مقادیر موردنظر جدول برای این w را محاسبه نمایید).

چون متغیرهای x_8 و x_9 برای پرایمال محدود شده، متغیرهای اساسی می‌باشند بایستی ضرایب آن‌ها را در تابع مقصود این مسأله صفر نماییم. برای این مقصود سطر اول و سطر دوم

1) Tableau Form of the Primal-Dual Method

را به این سطر اضافه می‌نمائیم و جدول به صورت زیر خواهد بود. در این جدول متغیرهای مسأله‌ی پرایمال محدود شده با علامت □ نشان داده شده‌اند.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS
z	-۳	-۴	-۶	-۷	-۱	۰	۰	۰	۰	۰
x_6	۳	۰	۳	۷	۳	-۱	-۱	۰	۰	۹
x_8	۲	-۱	۱	۶	-۵	-۱	۰	۱	۰	۶
x_9	۱	۱	۲	۱	۲	۰	-۱	۰	۱	۳

چون در مسأله‌ی محدود شده برای تمامی متغیرها با علامت □، $z_j - c_j \leq 0$ یک جواب بهینه برای فاز اول داریم که $x_6 = 9 > 0$ و θ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\theta = \text{Min} \left\{ \frac{-(z_j - c_j)}{\hat{z}_j - \hat{c}_j}, \hat{z}_j - \hat{c}_j > 0 \right\}$$

$$= \text{Min} \left\{ -\left(-\frac{3}{3}\right), -\left(-\frac{6}{3}\right), -\left(-\frac{7}{1}\right) = 1 > 0 \right\}$$

بنابراین برای به دست آوردن $wa'_j - c_j = z_j - c_j$ جدید:

$$wa'_j - c_j = (wa_j - c_j) + \theta va_j = (z_j - c_j) + \theta(\hat{z}_j - \hat{c}_j)$$

یک برابر سطر x_6 را به سطر z می‌افزائیم خواهیم داشت:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS
z	۰	-۴	-۳	۰	-۴	-۱	-۱	۰	۰	۹
x_6	۳	۰	۳	۷	-۳	-۱	-۱	۰	۰	۹
x_8	۲	-۱	۱	□ ۶	-۵	-۱	۰	۱	۰	۶
x_9	۱	۱	۲	۱	۲	۰	-۱	۰	۱	۳

پس از انجام عملیات محوری با ملحوظ داشتن این‌که در این جداول آن متغیرها در مسأله پرایمال محدود شده ظاهر می‌گردد که برای آن‌ها $z_j - c_j = 0$ ، جداول بعدی به صورت زیر ظاهر می‌گردند.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS
z	۰	-۴	-۳	۰	-۴	-۱	-۱	۰	۰	۹
x_5	$\frac{۴}{۶}$	$\frac{۷}{۶}$	$\frac{۱۱}{۶}$	۰	$-\frac{۱۷}{۶}$	$-\frac{۱}{۶}$	-۱	$-\frac{۷}{۶}$	۰	۲
x_2	$\frac{۲}{۶}$	$-\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	۱	$-\frac{۵}{۶}$	$-\frac{۱}{۶}$	۰	$\frac{۱}{۶}$	۰	۱
x_9	$\frac{۴}{۶}$	$\frac{۷}{۶}$	$\frac{۱۱}{۶}$	۰	$\frac{۱۷}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	-۱	$-\frac{۱}{۶}$	۱	۲

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS
z	۰	-۴	-۳	۰	-۴	-۱	-۱	۰	۰	۹
x_5	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	-۱	-۱	۰
x_2	۰	$-\frac{۲}{۴}$	$-\frac{۲}{۴}$	۱	$-\frac{۹}{۴}$	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۲}{۴}$	۰
x_1	۱	$\frac{۷}{۴}$	$\frac{۱۱}{۴}$	۰	$\frac{۱۷}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۶}{۴}$	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۶}{۴}$	۳

چون در جدول نهایی $x_5 = 0$ بنابراین جواب بهینه به صورت زیر خواهد بود:

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*, x_7^*) = (3, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

و مقدار تابع مقصود (مقدار بهینه‌ی تابع مقصود) برابر با ۹ خواهد بود. روش پرایمال-دوآل، روش همگراست.

در حالتی که مسأله پرایمال محدود شده غیرتبه‌گن باشد در هر تکرار از مقدار x_5 کاسته می‌شود (اکیداً نزولی است) و این بدین معنی است که هر Q متناظر در یک مرحله، تکرار نمی‌گردد و $Q \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. چون تعداد این Q ها حداکثر 2^n می‌باشد (چرا؟) پس الگوریتم در تعداد متناهی از مراحل، مسأله را حل می‌نماید (توجه کنید که Q ها متناظر مراحل متمایز می‌باشند. ثابت کنید و به دقت روی کاغذ بیاورید).

برای اثبات همگرایی روش پرایمال - دوآل در حالت تبه‌گنی، توجه داشته باشید که الگوریتم صرفاً مسأله‌ی زیر را حل می‌نماید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & a \\ \text{s. t.} \quad & Ax + Ix_a = b \\ & x, x_a \geq 0 \end{aligned}$$

یعنی کاملاً و تماماً فاز اول روش سیمپلکس می‌باشد، با این تفاوت، متغیرهای غیراساسی که وارد پایه می‌گردند دارای محدودیتی هستند که از طریق بردار w انتخاب می‌گردند. در هر جدول اگر $0 \leq v a_j - \hat{c}_j = v a_j$ (بازاء هر j) در این صورت مسأله حل‌گرفته یا زی یافت می‌شود که $0 < v a_j - c_j = v a_j$. در حالت قبل اگر $0 > x_0$ ، مسأله دوآل نامحدود و مسأله پرایمال نشدنی خواهد بود. از طرف دیگر اگر $0 = x_0$ ، در این صورت زوج (x, w) در شرایط K.K.T صدق می‌کنند و در نتیجه جواب بهینه مسأله می‌باشند. در غیرصورت‌های فوق مسأله به‌طور کامل حل‌نگرفته، با دست‌کاری بردار w ، تضمین‌کننده آن است که متغیری مانند x_j با $0 < v a_j - \hat{c}_j = v a_j$ در Q می‌باشد بنابراین می‌تواند وارد گردد. با توجه بدان چه گفته شد، در حقیقت روش پرایمال سیمپلکس را جهت حل فاز اول به‌کار می‌بریم با محدودیتی که برای متغیرها جهت وارد شدن به مسأله پرایمال محدود شده دارند. در نتیجه با به‌کار بردن روش لکزیکو که قبلاً گفته شد که این روش مستقل از آن است که متغیر واردشونده چگونه انتخاب گردد، بدون به دور افتادن، روش در تعداد متناهی از مراحل مسأله را حل می‌نماید. (جزئیات توضیح روش به عنوان تمرین به عهده‌ی خواننده واگذار می‌شود).

۳-۹ الگوریتم سیمپلکس برای متغیرهای کران‌دار^۱

در بیشتر مسائل عملی، معمولاً متغیرها کران‌دار می‌باشند، به‌صورت:

$$l_j \leq x_j \leq u_j \quad j = 1, \dots, n$$

که در آن l_j کران پائین و u_j کران بالا نامیده می‌شود و فرض بر این است که $l_j < u_j$ چه در غیراین صورت $l_j = u_j = x_j$ و می‌توان آن را از مسأله حذف نمود. مسأله LP برای این نوع متغیرها به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & l \leq x \leq u \end{aligned}$$

1) The Simplex Method For Bounded Variables

که در آن $l = (l_1, \dots, l_n)^t$ و $u = (u_1, \dots, u_n)^t$ با تبدیلاتی که در فصول گذشته گفته شد می‌توان مسأله فوق را به صورت استاندارد تبدیل نمود (البته فرض ما بر این است که l_j متناهی است چرا؟ به دقت توضیح دهید) به صورت زیر:

$$x_1 = x - l \quad x + x_2 = u$$

با قرار دادن این عبارت، مسأله به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x - x_1 = l \\ & x + x_2 = u \end{aligned}$$

که مسأله فوق به راحتی به صورت استاندارد قابل تبدیل می‌باشد. این روش ساده‌ترین ولی کم‌راندمان‌ترین روش خواهد بود. زیرا تعداد متغیرها از n به $3n$ و تعداد قیدها از m به $2n + m$ افزایش می‌یابد.

روش دیگر آن است که قیدهای $l \leq x \leq u$ را به صورت زیر بنویسیم $0 \leq x - l \leq u - l$ با قرار دادن $x_1 = x - l$ و افزودن متغیر کمکی، مسأله چنین خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x_1 + x_2 = u \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

یا

$$\text{Min } k + cx_1$$

$$\text{s. t. } Ax_1 = b_1$$

$$x_1 + x_2 = u$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

k مقدار ثابتی است

ملاحظه می‌گردد که در هر حال این تبدیلات باعث بزرگ شدن مسأله می‌گردد که نمی‌توان آن را با راندمان خوبی حل نمود.

برای رفع مشکل فوق روش سیمپلکس متغیرهای کران‌دار، که اصلاح شده روش سیمپلکس می‌باشد، به صورتی طراحی شده که قیدهای $x \leq l$ و $x \leq l_u$ را مانند $0 \leq x$ تلقی می‌نماید؛ بدون این‌که اندازه پایه کاری^۱ (یعنی B) را افزایش دهد (اندازه B همان $m \times m$ خواهد بود) از این رو، چنین روشی، روش پایه فشرده^۲ می‌نامند. مانند روش سیمپلکس این روش نیز از یک نقطه رأسی شدن به نقطه مجاور می‌رود تا در نهایت یا به جواب بهینه برسد و یا مشخص نماید که مسأله بهینه نامتناهی دارد. توجه شود که ناحیه شدن مسأله‌ی:

$$\text{Min } cx$$

$$\text{s. t. } Ax = b$$

$$l \leq x \leq u$$

به وسیله قیود زیر تعریف می‌شود:

$$Ax = b$$

$$x \leq u$$

$$-x \leq -l$$

1) Working Basis 2) Compact Basis

مانند آن چه در فصول قبلی گذشت، نقطه رأسی ناحیه‌ی شدنی یک نقطه از آن است که حداقل یک دسته n تایی از ابرصفحه‌های مستقل خطی از آن می‌گذرند. اگر ناحیه شدنی این مسأله را S بنامیم از تمامی نقاط S ، m ابرصفحه $Ax = b$ می‌گذرند (با فرض این که $\text{rank}(A) = m$) پس در نقاط رأسی S ، حداقل $n - m$ از قیدهای $x_j \leq u_j$ ($j = 1, \dots, n$) یا $x_j \geq l_j$ ($j = 1, \dots, n$) فعال می‌باشند (فرض بر این شده که تمامی کران‌های بالا و پائین متناهی هستند. در غیر این صورت از آن‌ها صرف نظر می‌گردد چرا؟)

از آن چه گذشت نتیجه می‌گردد که $S \subseteq R^p$ که در آن $p = n - m$ بنابراین x نقطه رأسی S است اگر p (متغیر مستقل در کران بالا یا پائین خود قرار گیرند که از حل قیدهای تساوی یک جواب منحصر به فرد که همان نقطه رأسی حاصل خواهد شد. اگر بیش از p مثلاً $q > p$ از قیدهای $l \leq x \leq u$ در x تنگ باشند (فعال باشند یا از آن بگذرند)، در این صورت x یک نقطه‌ی رأسی تبه‌گن برای S خواهد بود و $q - p$ درجه تبه‌گنی آن می‌باشد. جزئیات مطلب را با توجه به تعریف اولیه‌ی نقطه‌ی رأسی روی کاغذ بیابارید و تفاوت آن را با استدلال قبلی در رابطه با نقاط رأسی متغیرهای $x \geq 0$ بنویسید. اینک با این مقدمات تعریف BFS را برای مسأله بیان می‌کنیم.

۳-۹-۱۱ تعریف جواب اساسی شدنی (BFS). دستگاه $Ax = b$ و $l \leq x \leq u$

را در نظر بگیرید؛ که در آن A ماتریسی از مرتبه‌ی $m \times n$ و رتبه‌ی m است. جواب \bar{x} از دستگاه $Ax = b$ را، یک جواب اساسی برای این دستگاه می‌گوئیم، اگر A را بتوان به صورت $[B, N_1, N_2]$ افراز نمود به صورتی که B یک ماتریس مربع غیرمنفرد بوده و $\text{rank}(B) = m$ و $x_{N_1} = l_{N_1}$ و $x_{N_2} = u_{N_2}$ و $x = (x_B, x_{N_1}, x_{N_2})$

$$\bar{x}_B = B^{-1} - B^{-1}N_1l_{N_1} - B^{-1}N_2u_{N_2}$$

به علاوه اگر $l_B \leq \bar{x}_B \leq u_B$ ، در این صورت \bar{x} ، یک جواب اساسی شدنی نامیده می‌شود. ماتریس B را پایه کاری می‌نامند. x_B را متغیر اساسی و x_{N_1} و x_{N_2} را متغیرهای غیر اساسی می‌نامند، که x_{N_1} متغیرهایی در کران پائین خود و x_{N_2} متغیرهایی در کران بالای خود می‌باشند.

به علاوه اگر $l_B < \bar{x}_B < u_B$ را نقطه‌ی رأسی غیرتبه‌گن گویند، در غیر این صورت آن را تبه‌گن می‌نامند.

افراز $[B, N_1, N_2]$ از A را که متناظر یک جواب اساسی شدنی می‌باشد یک افراز اساسی شدنی می‌گویند. دو افراز اساسی شدنی مجاور هستند اگر فقط اگر تمامی متغیرها جز یک متغیر غیراساسی مثل هم هستند (در هر دو افراز) و در کران متناظر تثبیت شده‌اند. توجه کنید که برای نقاط رأسی تبه‌گن \bar{x} هر انتخاب از $n - m$ ابرصفحه‌ی تعریف‌کننده از $l \leq x \leq u$ به همراه m قید $Ax = b$ یک دسته مستقل n تایی مشخص می‌نمایند که مار \bar{x} می‌باشند، و متناظر یک افراز اساسی شدنی مرتبط با \bar{x} می‌باشد.

مثال ۳-۹-۱۲. فرض کنید S به وسیله‌ی نامساوی‌های زیر تعریف شده باشد:

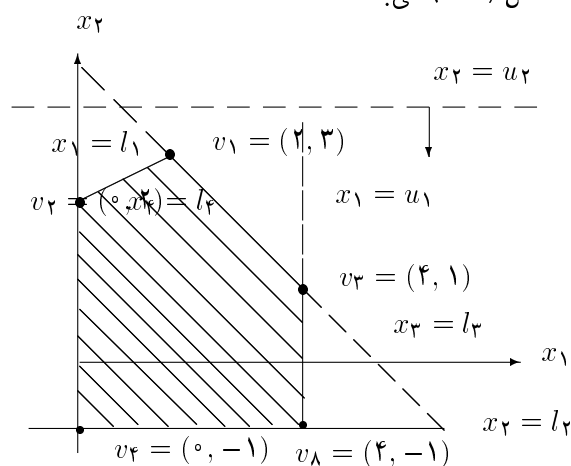
$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$0 \leq x_1 \leq 4$$

$$-1 \leq x_2 \leq 4$$

ناحیه به صورت شکل (۳-۳) می‌باشد.



شکل (۳-۳)

با معرفی متغیرهای کمکی x_3 و x_4 دستگاه زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$0 \leq x_1 \leq 4$$

$$-1 \leq x_2 \leq 4$$

$$0 \leq x_3 < \infty$$

$$0 \leq x_4 < \infty$$

با یک بررسی سطحی می توان دریافت که u_3 و u_4 به ترتیب از ۶ و ۱۰ بیشتر نیستند که می توان به جای ∞ کران بالایی آن ها و به جای $<$ ؛ \leq جایگزین نمود.

می خواهیم تمام جواب های اساسی شدنی دستگاه فوق را به دست آوریم. این کار، بدین صورت انجام می شود که از دو قید اولی یک پایه استخراج نمائیم و دستگاه را نسبت به این پایه حل کنیم؛ یعنی متغیرهای اساسی را برحسب متغیرهای غیراساسی به دست آوریم و سپس متغیرهای غیراساسی را در کران پائین و بالای آن قرار دهیم. پایه اولی را به صورت زیر انتخاب می کنیم:

$$B = [a_2, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

با ضرب دو قید اول در B^{-1} و با انتقال x_1 و x_3 به سمت راست داریم:

$$x_2 = 5 - x_1 - x_3$$

$$x_4 = -6 + 3x_1 + 2x_3$$

حال به جای x_1 ، کران پائین آن و به جای x_3 نیز کران پائین قرار می دهیم. خواهیم داشت:

$$1) \quad x_1 = 0, \quad x_3 = 0 \implies x_2 = 5, \quad x_4 = -6$$

چون $x_4 < 0$ ، این جواب اساسی، شدنی نمی‌باشد:

$$2) x_1 = 4, x_3 = 0 \implies x_2 = 1, x_4 = 6$$

بنابراین:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 1, 0, 6)$$

یک جواب اساسی شدنی می‌باشد. جواب‌های اساسی شدنی دیگر دستگاہ به‌همین صورت به‌دست می‌آید. اگر این‌کار را انجام دهیم، جواب‌های اساسی شدنی عبارت خواهند بود:

$$(2, 3, 0, 0), (0, 2, 3, 0), (4, 1, 0, 6)$$

$$(0, -1, 6, 6), (4, -1, 2, 10)$$

با تصویر نمودن این نقاط به صفحه (x_1, x_2) نقاط v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 که در شکل نشان داده شده است به‌دست می‌آید.

در این مثال $n = 4$ و $m = 2$ بنابراین $p = 4 - 2 = 2$ در حقیقت نمایش شکل $(3-3)$ در فضای $p = 2$ بعدی x_1 و x_2 یعنی در فضای متغیرهای مستقل می‌باشد. توجه کنید که در هر نقطه‌ی رأسی در ابرصفحه تنگ می‌باشند. مثلاً

$$\text{در } v_1, x_2 = l_2 \text{ و } x_4 = l_4.$$

$$\text{در } v_2, x_1 = l_1 \text{ و } x_4 = l_4 \text{ در } v_3, x_1 = u_1 \text{ و } x_3 = l_3$$

$$\text{در } v_4, x_1 = u_1 \text{ و } x_2 = l_2 \text{ در } v_5, x_1 = u_1 \text{ و } x_2 = l_2$$

نافذ می‌باشند. از این رو همان‌طوری که قبلاً گفته شد، جواب‌های اساسی شدنی و نقاط رأسی منطبق برهم می‌باشند. ملاحظه نمائید که نقاط رأسی v_4 و v_5 یک پایه کاری دارند یعنی $B = [a_3, a_4]$ به‌رحال اختلاف آن‌ها در کران‌هائی که متغیرهای غیراساسی x_1 و x_2 تثبیت شده‌اند؛ که در نتیجه دو نقطه‌ی رأسی متمایز به‌وجود آورده‌اند. توجه شود که تمامی نقاط رأسی در این‌جا غیرتبه‌گن می‌باشند و هر یک از آن‌ها متناظر یک افزاز اساسی شدنی است.

۱۰-۳ بهتر نمودن جواب اساسی شدنی^۱

با مقدماتی که گذشت می‌دانیم که چگونه می‌توان جواب اساسی شدنی را مشخص نمود. هم‌چنین می‌دانیم که جواب بهینه اساسی وجود دارد، به شرط آن‌که ناحیه شدنی خالی نباشد و بهینه متناهی باشد. (چرا؟ دقیقاً مطلب را توضیح دهید.) در هر صورت باید توجه داشت که تعداد جواب‌های اساسی شدنی عدد بزرگی است (تعداد BFSها مسأله‌ی فوق‌الذکر از بالا به عدد $2^{n-m} c_n^m$ محدود می‌گردد. برای این‌که تعداد پایه‌های مستخرج از A به C_n^m و برای هر پایه 2^{n-m} صورت جهت تثبیت متغیرهای غیراساسی موجود است) بنابراین بایستی یک روش سیستماتیک برای حرکت از یک BFS به BFS دیگر به دست آورد.

فرض کنید یک پایه‌ای مانند B در دست است و فرض کنید که متغیرهای غیراساسی به صورت N_1 و N_2 افزاز شده‌اند. یعنی $A = [B, N_1, N_2]$ و برطبق این افزاز x نیز به صورت $[x_B, x_{N_1}, x_{N_2}]$ افزاز گردیده است و $c = [c_B, c_{N_1}, c_{N_2}]$ هم تابع مقصود و هم قیدها را می‌توان برحسب متغیرهای غیراساسی (یعنی متغیرهای مستقل) به صورت زیر نوشت:

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}N_1X_{N_1} - B^{-1}N_2X_{N_2} \quad (۹-۳)$$

$$\begin{aligned} z &= c_B X_B + c_{N_1} X_{N_1} + c_{N_2} X_{N_2} \\ &= c_B (B^{-1}b - B^{-1}N_1X_{N_1} - B^{-1}N_2X_{N_2}) + c_{N_1} X_{N_1} + c_{N_2} X_{N_2} \\ &= c_B B^{-1}b + (c_{N_1} - c_B B^{-1}N_1)X_{N_1} + (c_{N_2} - c_B B^{-1}N_2)X_{N_2} \end{aligned} \quad (۱۰-۳)$$

$$= \bar{z} - \sum_{j \in J_1} x_j (z_j - c_j) - \sum_{j \in J_2} (z_j - c_j) x_j \quad (۱۱-۳)$$

فرض کنید، جواب فوق‌الذکر شدنی باشد که در آن $x_{N_1} = l_{N_1}$ و $x_{N_2} = u_{N_2}$ و $l_B \leq x_B \leq u_B$. این جواب به وسیله‌ی جدول زیر نشان داده می‌شود. ستون سمت راست مقدار واقعی z و x_B که به ترتیب این مقدار این بردار را به \hat{z} و \hat{b} نشان می‌دهیم و عبارت است از مقدار و بردار حاصل از جایگذاری $x_{N_1} = l_{N_1}$ و $x_{N_2} = u_{N_2}$ در معادلات ۳-۷

و ۳-۸. تاکید می‌کنیم که \hat{z} برابر با $c_B B^{-1}b$ و \hat{b} برابر با $B^{-1}b$ نمی‌باشد (چرا؟)

1) Improving a Basic Feasible Solution

	z	x_B	x_{N_1}	x_{N_2}	RHS
z	۱	۰	$-c_{N_1} + c_B B^{-1} N_1$	$c_B B^{-1} N_2 - c_{N_2}$	\hat{z}
x_B	۰	I	$B^{-1} N_1$	$B^{-1} N_2$	\hat{b}

حال سعی می‌کنیم که با اصلاح متغیرهای غیراساسی مقدار تابع مقصود را بهتر نماییم. برای این منظور مجدداً فرمول ۱۱-۳ را ذکر می‌کنیم

$$z = \bar{z} - \sum_{j \in J_1} (z_j - c_j)x_j - \sum_{j \in J_2} (z_j - c_j)x_j$$

که در آن J_1 مجموعه‌ی اندیس متغیرهایی است که در کران پائین خود هستند و J_2 مجموعه‌ی اندیس متغیرهایی می‌باشد که در کران بالای خود قرار دارند و $z_j - c_j = c_j - c_B B^{-1} a_j$ برای $j \in J_1$ ، اگر $z_j - c_j > 0$ باعث کاهش تابع مقصود می‌گردد (بهتر شدن تابع مقصود) یعنی افزایش دادن x_j از کران پائین خود از l_j . عیناً اگر $z_j - c_j < 0$ برای $j \in J_2$ ، کاهش x_j از کران بالای خود باعث بهتر شدن تابع مقصود می‌گردد. مانند روش سیمپلکس معمولی فقط یکی از متغیرهای غیراساسی را تغییر می‌دهیم و بقیه متغیرهای غیراساسی را که در سطح خودشان هستند، ثابت نگه می‌داریم. بنابراین اندیس متغیری که آن را k می‌نامیم از رابطه‌ی زیر مشخص می‌گردد:

$$\text{Max}\{\text{Max}_{j \in J_1} (z_j - c_j), \text{Max}_{j \in J_2} (c_j - z_j)\} \quad (12-3)$$

اگر مقدار ماکزیمم فوق مثبت باشد، آنگاه k اندیس متغیر که بایستی تغییر کند مشخص می‌گردد. اگر $k \in J_1$ در این صورت x_k از کران پائین خود افزایش می‌یابد و اگر $k \in J_2$ در این حالت x_k را از کران بالای خود یعنی u_k کاهش می‌دهیم. اگر مقدار ماکزیمم فوق صفر یا کوچکتر از صفر شود، بدین معنی خواهد بود که جواب موردنظر جدول جواب بهینه است (چرا؟ دقیقاً مطلب را توضیح دهید).

به‌طور خلاصه، برای یک جواب اساسی شدنی داده شده اگر $z_j - c_j \leq 0$ برای تمامی متغیرهای غیراساسی که در کران بالای خود قرار دارند، در این صورت جواب بهینه است. در غیر این صورت متغیر x_k را طبق قاعده‌ای که گفته شد انتخاب می‌کنیم اگر x_k در کران پائین خود باشد آن را افزایش می‌دهیم و اگر در کران بالای خود باشد آن را کاهش می‌دهیم. این

تغییر بایستی به گونه‌ای باشد که شدنی بودن جواب را از بین نبرد. از این رو افزایش یا کاهش متغیر طبق قاعده‌ی زیر صورت می‌گیرد:

۱۱-۳ افزایش x_k از سطح فعلی خود یعنی l_k

فرض کنید $x_k = l_k + \Delta_k$ که در آن Δ_k افزایش x_k از سطح کنونی خود می‌باشد. توجه داشته باشید که هیچ‌یک از متغیرهای غیراساسی تغییر نمی‌کنند و مقدار z در جدول برابر \hat{z} و بردار b برابر با \hat{b} می‌باشد. با قرار دادن $x_k = l_k + \Delta_k$ در معادلات ۳-۹ و ۳-۱۰ داریم:

$$\begin{pmatrix} x_B \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b} \\ l_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\bar{a}_k \\ 1 \end{pmatrix} \Delta_k \quad (۱۳-۳)$$

$$z = \hat{z} + \Delta_k(-z_k - c_k) \quad (۳ - ۱۳a)$$

چون $z_k - c_k > 0$ (چرا؟) پس تابع مقصود کاهش پیدا می‌کند (بهتر می‌شود) و هر چه x_k بیشتر افزایش یابد، تابع مقصود بیشتر کاهش می‌یابد. اما افزایش x_k را چند عامل قفل می‌کند که عبارتند از:

۱- متغیر اساسی به کران پائین خود می‌رسند^۲

فرض کنیم بازاء $\Delta_k = \gamma_1$ ، یک متغیر اساسی به کران پائین خود می‌رسد در این صورت:

$$l_B \leq x_B = \hat{b} - \Delta_k \bar{a}_k$$

بنابراین:

$$\Delta_k \bar{a}_k \leq \hat{b} - l_B$$

اگر $\bar{a}_k \leq 0$ ؛ در این صورت Δ_k را می‌توان به اندازه دلخواه بدون به هم خوردن شدنی بودن افزایش داد؛ که در این حالت $\gamma_1 = \infty$. (و این بدین معنی است که با افزایش x_k ، هیچ‌یک از متغیرهای اساسی به کران پائین خود نمی‌رسند). در غیراین صورت γ_1 از رابطه زیر به دست

1) Increasing x_k from its current level l_k 2) A Basic Variable Drops to its Lower Bound

می‌آید:

$$\gamma_1 = \begin{cases} \text{Min}_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\hat{b}_i - l_{Bi}}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\} = \frac{\hat{b}_r - l_{Br}}{\bar{a}_{rk}} & \bar{a}_k \not\leq 0 \\ \infty & \bar{a}_k \leq 0 \end{cases} \quad (14-3)$$

در این حالت متغیر اساسی x_{Br} کاندید برای رسیدن به کران پائین خود می‌باشد.

۲- یک متغیر اساسی به کران بالای خود می‌رسد^۱ فرض کنید γ_2 مقداری از افزایش x_k باشد که بازه آن یکی از متغیرهای اساسی به کران بالای خود می‌رسد. پس بایستی داشته باشیم:

$$\hat{b} - \bar{a}_k \Delta_k \leq u_k$$

از این رو:

$$-\bar{a}_k \Delta_k \leq u_k - \hat{b}$$

اگر $\bar{a}_k \geq 0$ در این صورت $\gamma_2 = \infty$ در غیر این صورت γ_2 از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\gamma_2 = \begin{cases} \text{Min}_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{u_{Bi} - \hat{b}}{-\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} < 0 \right\} = \frac{u_{Br} - \hat{b}}{-\bar{a}_{rk}} & \bar{a}_k \not\leq 0 \\ \infty & \bar{a}_k \geq 0 \end{cases} \quad (15-3)$$

در این حالت متغیر اساسی x_{Br} کاندید رسیدن به کران بالای خود می‌باشد.

۳-۱۱-۱۳ خود به کران بالای خودش می‌رسد.^۲ با افزایش x_k از l_k ، این

متغیر به کران بالای خودش می‌رسد. و این مقدار برابر $u_k - l_k$ می‌باشد.

این سه حالت ماکزیمم مقدار افزایش x_k را به دست می‌دهد و مقدار افزایش مجاز از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\Delta_k = \text{Min}\{\gamma_1, \gamma_2, u_k - l_k\} \quad (16-3)$$

1) A Basic Variable Reaches its upper Bound 2) x_k Itself Reaches its Upper Bound

اگر $\Delta_k = \infty$ ، در این صورت x_k را می‌توان تا بی‌نهایت افزایش داد و تابع مقصود به سمت $-\infty$ خواهد رفت. از طرف دیگر اگر $\Delta_k < \infty$ ، یک جواب اساسی شدنی جدید به دست می‌آید که در آن $x_k = l_k + \Delta_k$ و متغیرهای اساسی طبق فرمول ۱۳-۳ اصلاح می‌شود.

۱۴-۱۱-۳ به‌روز نمودن جدول وقتی متغیرهای غیراساسی افزایش

می‌یابند. جدول جاری بایستی به‌روز گردد که منعکس‌کننده جواب اساسی جدید می‌باشد. اگر $\Delta_k = u_k - l_k$ ، در این حالت پایه کاری عوض نمی‌شود و x_k باز هم به عنوان متغیر غیراساسی در جدول در کران بالای خود باقی می‌ماند. در جدول تنها مقدار \hat{z} و بردار \hat{b} ، با توجه به تغییرات x_k ، اصلاح می‌گردند. یعنی $\hat{z} = \hat{z} - (z_k - c_k)\Delta_k$ و $\hat{b} = \hat{b} - \bar{a}_k\Delta_k$ جدید. از طرف دیگر اگر Δ_k برابر با γ_1 یا γ_2 شود، در این صورت x_k وارد پایه می‌گردد و x_{Br} از پایه خارج می‌شود که در آن اندیس r طبق فرمول‌های گذشته مشخص می‌گردد. اگر $\Delta_k = \gamma_1$ در این صورت اندیس r طبق فرمول ۱۴-۳ به دست آمده و اگر $\Delta_k = \gamma_2$ ، در این صورت اندیس r از فرمول ۱۵-۳ مشخص گردیده است. صورت با انجام عمل محوری که در آن \bar{a}_{rk} (چه مثبت باشد چه منفی) به‌روز می‌گردد و RHS به‌طور جداگانه محاسبه می‌شود. RHS طبق فرمول 3-13a به‌روز می‌گردد، جز مؤلفه‌ی r ام \hat{b} که در \hat{b} جدید $l_k + \Delta_k$ قرار داده می‌شود.

۱۵-۱۱-۳ کاهش x_k از کران بالای خود یعنی u_k این حالت بسیار شبیه

حالتی که x_k را از کران پائین خود افزایش می‌دادیم. ذیلاً به‌طور بسیار خلاصه این مطلب را ذکر می‌کنیم. توجه داشته باشید که در این حالت $z_k - c_k < 0$ و $x_k = u_k - \Delta_k$ که در آن $\Delta_k > 0$ نشان‌دهنده‌ی مقدار کاهش x_k می‌باشد. با توجه به آن چه گذشت داریم:

$$\begin{pmatrix} x_B \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b} \\ u_k \end{pmatrix} + \Delta_k \begin{pmatrix} \hat{a}_k \\ -1 \end{pmatrix} \quad (۱۷-۳)$$

$$z = \hat{z} + \Delta_k(z_k - c_k) \quad (۱۸-۳)$$

1) Decreasing x_k From its Current Level u_k

ماکزیمم کاهش Δ_k با محاسبه‌ی γ_1 و γ_2 و $u_k - l_k$ به صورت زیر داده شده است:

$$\gamma_1 = \begin{cases} \text{Min} \left\{ \frac{\hat{b}_i - l_{B_i}}{-\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} < 0 \right\} = \frac{\hat{b}_r - l_{B_r}}{-\bar{a}_{rk}} & \bar{a}_k \not\leq 0 \\ \infty & \bar{a}_k \geq 0 \end{cases} \quad (19-3)$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} \text{Min} \left\{ \frac{u_{B_i} - \hat{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\} = \frac{u_B - \hat{b}_r}{\bar{a}_{rk}} & \bar{a}_k \not\leq 0 \\ \infty & \bar{a}_k \leq 0 \end{cases} \quad (20-3)$$

اگر $\Delta_k = \infty$ در این صورت مسأله نامحدود خواهد بود و بهینه نامتناهی دارد. اگر $\Delta_k < \infty$ آنگاه یک جواب اساسی شدنی جدید به دست می‌آید که $x_k = u_k - \Delta_k$ و متغیرهای اساسی طبق فرمول ۱۷-۳ اصلاح می‌گردد.

۱۶-۱۱-۳ به روز نمودن جدول وقتی متغیر غیراساسی کاهش می‌یابد.

اگر $\Delta_k = u_k - l_k$ ، در این صورت x_k باز هم غیراساسی می‌ماند اما به کران پائین خود سقوط می‌کند. جدول تغییر نمی‌یابد و RHS طبق ۱۷-۳ و ۱۸-۳ اصلاح می‌گردد. اگر Δ_k به وسیله‌ی γ_1 و γ_2 داده شده باشد، در این صورت x_k وارد می‌گردد و x_{B_r} خارج می‌شود که اندیس r برای متغیر واردشونده از ۱۹-۳ یا ۲۰-۳ مشخص می‌گردد. جدول به جز RHS با عمل محوری که عضو محوری آن \bar{a}_{rk} (در این جا \bar{a}_{rk} می‌تواند مثبت یا منفی باشد) به روز می‌شود. ستون RHS بر طبق فرمول‌های ۱۷-۳ و ۱۸-۳ به روز می‌گردد، جز مؤلفه‌ی r ام آن که برابر با $u_k - \Delta_k$ خواهد بود (در بردار \hat{b} جدید)

۱۷-۱۱-۳ به دست آوردن یک جواب اساسی شدنی اولیه.

اگر جواب اساسی شدنی مناسبی در دست نباشد، می‌توان با تثبیت نمودن تمامی متغیرها در کران بالا-پائین خودشان و با اضافه نمودن متغیر تصنعی و با اعمال فاز اول سیمپلکس یا M -بزرگ سیمپلکس یک جواب اساسی شدنی (در صورت وجود) به دست آورد. این کار در چهار مرحله به صورت زیر انجام می‌پذیرد:

- (۱) تمامی متغیرهای اصلی را در یکی از کران‌های خود تثبیت می‌نمائیم.
- (۲) با تنظیم نمودن (اصلاح نمودن) RHS بر طبق مقادیر داده شده بردار \hat{b} را محاسبه می‌نمائیم.
- (۳) در صورت ضرورت، سطر موردنظر را در (-1) ضرب می‌کنیم تا $\hat{b} \geq 0$.
- (۴) با افزودن ستون متغیرهای تصنعی و به‌کاربردن M -بزرگ سیمپلکس یا فاز اول مسأله را حل می‌نمائیم.

۱۲-۳ تقارب متناهی؛ تبه‌گنی و به‌دور افتادن^۱

در غیاب تبه‌گنی، در هر تکرار، روش فوق‌الذکر از یک جواب اساسی شدنی، به یک جواب اساسی شدنی می‌رود (در جهت بهبود بخشیدن به تابع مقصود). از این رو بایستی در تعداد متناهی از مراحل همگرا باشد، یعنی به یک جواب بهینه برسد یا مشخص نماید که مسأله نامحدود می‌باشد. به‌هرحال در حالت تبه‌گنی این امکان وجود دارد که یک عمل محوری تبه‌گن انجام دهیم که در آن γ_1 و γ_2 مساوی صفر هستند. از این رو پایه کاری عوض می‌شود، اما نقطه‌ی رأسی ثابت می‌ماند (یعنی روش در همان نقطه رأسی خواهد بود)، در نتیجه، امکان به‌دور افتادن وجود دارد، یعنی یک دنباله از پایه‌ها متناظر جواب اساسی شدنی تبه‌گن بارها تکرار شود بدون توقف. از این رو بایستی روشی ارائه نمائیم که از به‌دور افتادن جلوگیری نماید (مانند آنچه در رابطه با متغیرهای نامنفی گفته شد). مثلاً روش لکزیکوکه به‌صورت زیر بیان می‌گردد. (دقت در استدلال و روش ارائه مطلب بسیار ضروری است). فرض کنید برای تمامی جواب‌های اساسی شدنی تبه‌گن که در جدول اجرای الگوریتم پیش می‌آید، سطرهای B^{-1} که متناظر متغیرهای اساسی تبه‌گن در کران پائین خود هستند لکزیکو مثبت و برای متغیرهای اساسی تبه‌گن که در کران بالای خود هستند لکزیکو منفی باشد. یک افراز اساسی شدنی مانند $[B, N_1, N_2]$ که در این خاصیت صدق کند را، افراز اساسی شدنی قوی^۲ می‌نامیم.

همواره می‌توان چنین افزایشی به‌دست آورد. در صورت ضرورت از متغیرهای تصنعی استفاده

1) Finite Convergence: Degeneracy and Cycling 2) Strongly Feasible Basic Partition

می‌گردد. برای روشن شدن مطلب جدول زیر را در نظر بگیرید و فرض کنید که پایه‌ای مانند $I = B = [a_1, a_2, a_3]$ در دست باشد که صورت:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N_1x_{N_1} - B^{-1}N_2x_N$$

به صورت جدول زیر می‌باشد:

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	
z	۱	۰	۰	۰					
x_1	۰	۱	۰	۰	۱	-۱	۱	-۱	۱
x_2	۰	۰	۱	۰	۱	۲	-۱	۱	۲
x_3	۰	۰	۰	۱	۱	-۱	-۱	۱	۶

$$1 \leq x_1 \leq 6 \quad 2 \leq x_2 \leq 7 \quad 1 \leq x_3 \leq 6 \quad 0 \leq x_j \leq 3 \quad j = 4, 5, 6, 7$$

در این جدول x_1 و x_2 به عنوان متغیر اساسی در کران پائین خود هستند و سطر اول و دوم $I = B^{-1}$ لکزیکو مثبت می‌باشد اما سطر سوم B^{-1} لکزیکو منفی نمی‌باشد (x_3 در کران بالای خودش است. متغیر تصنعی V_1 را به صورت زیر به جدول اضافه می‌کنیم)

z	x_1	x_2	\hat{x}_3	\hat{V}_1	\hat{x}_4	\hat{x}_5	\hat{x}_6	\hat{x}_7	RHS	
z	۱	۰	۰	۰	۰	۲	۲	۴	۳	
x_1	۰	۱	۰	۰	۰	۱	-۱	-۱	-۲	۱
x_2	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۲	-۱	۱	۲
V_1	۰	۰	۰	۱	۱	-۱	-۱	۱	۰	

ملاحظه می‌گردد که بدین صورت تمامی متغیرهای اساسی جدول فوق در کران پائین خود هستند و تمامی سطرهای B^{-1} ، لکزیکو مثبت می‌باشد. در جدول فوق x_3 متغیر غیراساسی محسوب می‌گردد که در کران بالای خود قرار دارد.

برای این که عمل محوری تبه‌گن پایه شدنی قوی را نگه دارد، به عبارت دیگر برای حفظ افراز شدنی اساسی قوی به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنیم $\Delta_k < \infty$ و فرض کنیم x_k متغیر واردشونده است. و در کران پائین خود می‌باشد و می‌خواهیم آن را افزایش دهیم. اگر x_k به وسیله‌ی خودش قفل شود، یعنی $\Delta_k = u_k - l_k$ در این صورت اگر قرار دهیم $x_k = u_k$

(یعنی $\Delta_k = u_k - l_k$) و سمت راست را اصلاح نمودیم، اگر افزایش شدنی قوی باقی ماند، نیازی به عمل محوری نیست مثلاً در جدول فوق که $x_k = x_6$ متغیر واردشونده باشد. سمت راست به صورت زیر خواهد بود:

$$x_1 = 1 + x_6$$

$$x_2 = 2 + x_6$$

$$V_1 = 0 + x_6$$

x_6 از سطح صفر به ۳ می‌رسد. در نتیجه $x_1 = 4$ و $x_2 = 5$ و $V_1 = 3$ می‌گردد که یک جواب اساسی شدنی غیرتبه‌گن است و افزایش شدنی اساسی قوی، همان‌طور باقی می‌ماند. زیرا هیچ متغیر اساسی در کران پائین یا بالای خود نمی‌باشد. در غیراین صورت فرض کنیم افزایش x_k باعث شد که بعضی از متغیرها به کران بالا یا پائین خود برسند (یا خود x_k به کران بالای خودش برسد) در این صورت در نظر می‌گیریم:

$$S_1 = \{i \mid \bar{a}_{ik} < 0 \text{ \& } x_i \text{ در وضعیت جدید در کران بالای خود است} \}$$

یعنی وقتی $x_i, x_k = l_k + \Delta_k$ ها به کران بالای خودشان رسیدند.

$$S_2 = \{i \mid \bar{a}_{ik} > 0 \text{ \& } \Delta_k + l_k = x_k \text{ \& } x_i \text{ به کران پائین خود رسیده است} \}$$

فرض کنید B_i^{-1} سطر i ام B^{-1} باشد، اندیس r را به‌طور منحصر به فرد به صورت زیر مشخص نمائید:

$$\frac{B_r^{-1}}{\bar{a}_{rk}} = \text{Lexico Min} \left\{ \frac{B_i^{-1}}{\bar{a}_{ik}} \mid i \in S_1 \cup S_2 \right\} \quad (21-3)$$

(یعنی لکزیکو می‌نیمم $\frac{B_i^{-1}}{\bar{a}_{ik}}$ ($i \in S_1 \cup S_2$) را به دست می‌آوریم) ثابت می‌کنیم:

الف. روش مذکور، افزایش شدنی اساسی قوی را حفظ می‌کند.

ب. r به‌طور منحصر به فرد مشخص می‌گردد.

قسمت (ب) بدیهی است. زیرا اگر چنین نباشد، در سطر B^{-1} متناسب می‌باشند که

این مطلب با فرض $|B^{-1}| \neq 0$ در تناقض می‌باشد.

برای اثبات قسمت (الف) ابتدا مثالی می‌زنیم و سپس مطلب را در حالت کلی اثبات می‌کنیم.

مثال ۱۸-۱۲-۳. فرض کنید در مرحله‌ای جدول زیر را داریم:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_1	۱	۰	۰	-۱	۰	۱
x_2	۰	۱	۰	-۲	۰	۲
x_3	۰	۰	-۱	۲	۱	۸

$$1 \leq x_1 \leq 5$$

$$2 \leq x_2 \leq 10 \quad 0 \leq x_3 \leq 5 \quad \uparrow$$

$$0 \leq x_4 \leq 8$$

افراز فوق، افراز اساسی شدنی قوی است زیرا x_1 و x_2 در کران پائین خود هستند و سطر اول و دوم B^{-1} لکزیکو مثبت می‌باشند. و x_3 در کران بالای خود است و سطر سوم B^{-1} لکزیکو منفی است. متغیر x_4 وارد می‌گردد. از معادلات داریم:

$$x_1 = 1 + x_4$$

$$x_2 = 2 + 2x_4$$

$$x_3 = 8 - 2x_4$$

x_4 را می‌توان به اندازه $\Delta_4 = \Delta_k = 4$ واحد افزایش داد (چرا؟) پس RHS به صورت زیر خواهد بود:

$$x_1 = 5 \quad \text{در کران بالا}$$

$$x_2 = 10 \quad \text{در کران بالا}$$

$$x_3 = 0 \quad \text{در کران پائین}$$

حال اندیس r را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Lexico Min } & \left\{ \frac{B_1^{-1}}{-1}, \frac{B_2^{-1}}{-2}, \frac{B_3^{-1}}{2} \right\} = \\ \text{Lexico Min } & \left\{ (-1, 0, 0), (0, -\frac{1}{2}, 0), (0, 0, -\frac{1}{2}) \right\} \\ (-1, 0, 0) & = \frac{B_1^{-1}}{-1} \text{ پس } \boxed{r=1} \end{aligned}$$

پس جدول بعدی به صورت زیر خواهد بود:

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_4	-1	0	0	1	5
x_2	-2	1	0	0	10
x_3	2	0	-1	0	0

ملاحظه می‌گردد که B_1^{-1} لکزیکو منفی و B_3^{-1} لکزیکو منفی (زیرا x_2 و x_3 در کران بالای خود هستند) و B_2^{-1} لکزیکو مثبت است (x_3 در کران پائین خود قرار دارد). حال این مطلب را در حالت کلی اثبات می‌نمائیم. بدون این‌که به کلیت استدلال خللی وارد شود فرض می‌کنیم m ستون اول جدول B^{-1} را تشکیل دهند و جدول به صورت زیر باشد:

	x_1	...	x_m	...	x_k	...	
x_{B_1}	β_{11}	...	β_{1m}	...	\bar{a}_{1k}	...	\hat{b}_1
	\vdots		\vdots		\vdots		\vdots
x_{B_r}	β_{r1}	...	β_{rm}	...	\bar{a}_{rk}	...	\hat{b}_k
	\vdots		\vdots		\vdots		\vdots
x_{B_m}	β_{m1}	...	β_{mm}	...	\bar{a}_{mk}	...	\hat{b}_m

$$B^{-1} = [\beta_{ij}]^{m \times m} \text{ که}$$

جدول سیمپلکس متناظر پس از مرتب نمودن برحسب مجموعه‌های $S_1, S_2, \dots,$

به صورت زیر خواهد بود:

		x_k	
S_1	$\beta_{11} \quad \dots \quad \beta_{1m}$ \vdots $\beta_{l1} \quad \dots \quad \beta_{lm}$	$\bar{a}_{ik} \begin{matrix} \vdots \\ < \circ \end{matrix}$ $(i = 1, \dots, l)$ \vdots	متغیرها در کران بالای خود هستند
S_1	$\beta_{l+11} \quad \dots \quad \beta_{l+1m}$ \vdots $\beta_{h1} \quad \dots \quad \beta_{hm}$	$\bar{a}_{ik} \begin{matrix} \vdots \\ > \circ \end{matrix}$ $(i = l+1, \dots, h)$ \vdots	متغیرها در کران پائین خود هستند
	$\beta_{h+11} \quad \dots \quad \beta_{h+1m}$ \vdots $\beta_{m1} \quad \dots \quad \beta_m$	\vdots \vdots \vdots	متغیرها بین کران بالا و پائین خود هستند

عمل محوری در جدول فوق عمل محور تبه‌گن فرض می‌شود (طبق فرض مساله) پس γ_1 یا

γ_2 مساوی صفر هستند و $\Delta_k = \circ$.

x_k در کران پائین خود می‌باشد. پس r یا متعلق به S_1 است یا $r \in S_2$.

الف. $r \in S_1$. پس x_k وارد می‌شود و x_r خارج می‌گردد. در کران بالای

خود است. پس طبق فرض $(\beta_{r1}, \dots, \beta_{rm}) < \circ$ و $\bar{a}_{rk} < \circ$ در نتیجه

$$\left(\frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{r1}}, \dots, \frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rm}} \right) = \frac{(B^{-1})_r}{\bar{a}_{rk}} > \circ$$

یعنی برای x_k ای که وارد پایه شده سطر به روز شده متناظر B^{-1} لکزیکو مثبت خواهد بود.

ب. $r \in S_2$. در کران پائین وارد پایه می‌گردد و متغیر x_r از پایه خارج می‌گردد. چون

$r \in S_2$ پس $(B_r^{-1} > \circ)$ در نتیجه:

$$\left(\frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{r1}}, \dots, \frac{\beta_{rm}}{\bar{a}_{rm}} \right) = \frac{(B_r^{-1})}{\bar{a}_{rk}} > \circ$$

زیرا $\bar{a}_{rk} > \circ$.

اگر $i \neq r$ در این صورت $(B^{-1})_{New i}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} (B_{New}^{-1})_i &= (B_{Old}^{-1})_i - \frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{a}_{rk}} (B_{Old}^{-1})_r \\ &= \bar{a}_{ik} \left(\frac{(B_{Old}^{-1})_i}{\bar{a}_{ik}} - \frac{(B_{Old}^{-1})_r}{\bar{a}_{rk}} \right) \end{aligned}$$

داخل پرانتز لکزیکو مثبت است (چرا؟).

اگر $i \in S_1$ داریم:

$$(B_{New}^{-1})_i < 0 \quad (\text{چرا؟})$$

اگر $i \in S_2$ داریم:

$$(B_{New}^{-1})_i > 0 \quad (\text{چرا؟})$$

و حکم ثابت است.

عیناً فرض کنیم که متغیر واردشونده در کران بالای خود می‌باشد و می‌خواهیم کاهش دهیم ولی γ_1 یا γ_2 مساوی صفر می‌باشد مجدداً جدول زیر را در نظر می‌گیریم (با همان مفروضات سابق).

		x_k	
S_1	$\beta_{11} \quad \beta_{12} \quad \dots \quad \beta_{1m}$ \vdots $\beta_{l1} \quad \beta_{l2} \quad \dots \quad \beta_{lm}$	$\bar{a}_{ik} \begin{matrix} \vdots \\ < 0 \end{matrix}$ $(i = 1, \dots, l)$ \vdots	متغیرهای اساسی در کران پائین خود می‌باشند
S_2	$\beta_{l+11} \quad \beta_{l+12} \quad \dots \quad \beta_{l+1m}$ \vdots $\beta_{h1} \quad \beta_{h2} \quad \dots \quad \beta_{hm}$	$\bar{a}_{ik} \begin{matrix} \vdots \\ > 0 \end{matrix}$ $(i = l+1, \dots, h)$ \vdots	متغیرهای اساسی در کران بالای خود می‌باشند
	$\beta_{h+11} \quad \beta_{h+12} \quad \dots \quad \beta_{h+1m}$ \vdots $\beta_{m1} \quad \beta_{m2} \quad \dots \quad \beta_m$	\vdots \vdots \vdots	متغیرهای اساسی بین کران بالا و پائین خود می‌باشند

یعنی:

$$S_1 = \{i \mid x_i \text{ اساسی است} \ \& \ x_i = l_i \ \& \ \bar{a}_{ik} < 0 \quad x_k = u_k - \Delta_k \text{ وقتی}$$

وقتی

$$S_2 = \{i \mid x_i \text{ اساسی است} \ \& \ x_i = u_i \ \& \ \bar{a}_{ik} > 0 \quad x_k = u_k - \Delta_k \}$$

چون γ_1 یا γ_2 مساوی صفر می‌باشند پس $\Delta_k = \circ$ (همین فرض نیز شده بود زیرا عمل محوری تبه‌گن صورت می‌گیرد).

در این صورت اندیس r ، اندیس متغیر خارج شونده طبق قاعده‌ی زیر صورت می‌گیرد:

$$\frac{(B^{-1})_r}{\bar{a}_{rk}} = \text{Lexico Max} \left\{ \frac{(B^{-1})_i}{\bar{a}_{ik}} \mid i \in S_1 \cup S_2 \right\}$$

ثابت می‌کنیم که پس از انجام عمل محوری تبه‌گن:

(۱) r به‌طور منحصر به فرد مشخص می‌گردد.

(۲) افزایش شدنی اساسی قوی باقی ماند.

اثبات (۱). اگر r به‌طور منحصر به فرد مشخص نشود، بایستی، حداقل دو اندیس مانند h'

و l' موجود باشد، به طوری که

$$\frac{(B^{-1})_{h'}}{\bar{a}_{h'k}} = \frac{(B^{-1})_{l'}}{\bar{a}_{l'k}}$$

یا

$$(B^{-1})_{h'} = \lambda (B^{-1})_{l'}$$

که در آن:

$$\lambda = \frac{\bar{a}_{h'k}}{\bar{a}_{l'k}}$$

یعنی دو سطر B^{-1} متناسب می‌باشند و این تناقض است.

x_k در کران بالا وارد پایه می‌گردد و x_r پایه را ترک می‌کند و $\Delta_k = \circ$ در این صورت دو

حالت اتفاق می‌افتد:

الف. $i \in S_1$ و x_r در کران پائین خود است و x_k در کران بالای خود متغیر اساسی

می‌گیرد $(B^{-1})_r > \circ$ پس:

$$\frac{(B^{-1})_r}{\bar{a}_{rk}} < \circ$$

(چرا؟ دقیقاً مطلب را توضیح دهید.)

ب. $i \in S_2$ و x_r در کران پائین بوده که پایه را ترک می‌کند و x_k در کران بالا وارد پایه می‌گردد، با توجه به فرض مسأله:

$$(B^{-1})_r < 0$$

و $\bar{a}_{rk} > 0$ پس:

$$\left(\frac{B^{-1}}{New}\right)_r = \left(\frac{B^{-1}}{Old}\right)_r / \bar{a}_{rk} < 0$$

و حکم (۲) ثابت است.

حال فرض کنیم $i \in S_1 \cup S_2$ و $i \neq r$ داریم:

$$\left(\frac{B^{-1}}{New}\right)_i = \bar{a}_{ik} \left\{ \left(\frac{\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_m}}{\bar{a}_{ik}}\right) - \left(\frac{\beta_{r_1}, \dots, \beta_{r_m}}{\bar{a}_{rk}}\right) \right\}$$

داخل $\{0\}$ لکزیکو منفی است و با توجه به علامت \bar{a}_{ik} حکم بدیهی است (چرا؟) از این رو در هر حالت افزایش‌دهی اساسی قوی باقی می‌ماند. حال بردار L را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} L &= (\hat{z}_{Old}, C_{B_1} B_1^{-1}) - (\hat{z}_{New}, C_{B_2} B_2^{-1}) \\ &= \frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{rk}} (0, \beta_{r_1}, \beta_{r_2}, \dots, \beta_{r_m}) \end{aligned}$$

دو حالت تشخیص می‌دهیم:

الف. $z_k - c_k > 0$ در این صورت:

$$\frac{1}{\bar{a}_{rk}} (0, \beta_{r_1}, \beta_{r_2}, \dots, \beta_{r_m}) > 0 \quad (\text{زیرا } x_k \text{ در کران پائین است})$$

پس:

$$L > 0$$

ب. $z_k - c_k < 0$ در این صورت:

(x_k در کران بالای خودش است) پس:

$$\frac{1}{\bar{a}_{rk}}(\theta, \beta_r, \beta_{rm}, \dots, \beta_{rm}) < \theta$$

پس:

$$L > \theta$$

و حکم ثابت است یعنی لکزیکو نزولی است. حال به سادگی ثابت می‌شود که با روش فوق روش سیمپلکس در حالت تبه‌گنی به دور نمی‌افتد (اثبات نمائید).

۱۹-۱۲-۳ خلاصه روش سیمپلکس برای متغیرهای کران‌دار (از نوع می‌نیمم نمودن).

قدم اول. یک جواب اساسی شدنی برای مسأله پیدا نمائید (در صورت ضرورت از متغیرهای تصنعی استفاده کنید). فرض کنید x_B متغیرهای اساسی و x_{N_1} و x_{N_2} متغیرهای غیراساسی به ترتیب در کران پائین و کران بالای خود باشند. جدول زیر را که در آن:

$$\hat{z} = c_B B^{-1} b + (c_{N_1} - c_B B^{-1} N_1) l_{N_1} + (c_{N_2} - c_B B^{-1} N_2) u_{N_2}$$

$$\hat{b} = B^{-1} b - B^{-1} N_1 l_{N_1} - B^{-1} N_2 u_{N_2}$$

تشکیل دهید.

قدم اساسی.

(۱) اگر برای تمامی متغیرها در کران پائین $z_j - c_j \leq \theta$ و برای تمامی متغیرها در کران بالا $z_j - c_j \geq \theta$ ، جواب متناظر جدول، جواب بهینه است در غیراین صورت اندیس k از رابطه:

$$\text{Max} \left\{ \text{Max}_{j \in J_1} \{z_j - c_j\}, \text{Max}_{j \in J_2} \{c_j - z_j\} \right\}$$

به دست آورید. J_1 و J_2 همان مجموعه هستند که قبلاً تعریف شده‌اند یعنی به ترتیب مجموعه‌ی اندیس متغیرهای غیراساسی در کران پائین و کران بالا. عیناً می‌توان قاعده‌ی بلند را جهت

جولوگیری از به دور افتادن در رابطه الگاریتم فوق الذکر تعمیم داد. برای این منظور فرض کنید با تبدیلات مناسبی (اگر ضرورت داشته باشد)، $l = 0$ و قیدهای $x \leq u$ که فرض بر این شده $0 < u_i < \infty$ با معرفی متغیر کمکی به صورت:

$$x + Is = u, \quad s \geq 0$$

بنویسیم. توجه نمائید که برای هر افراز اساسی شدنی مانند $[B, N_1, N_2]$ برای دستگاه $Ax = b$ و $0 \leq x \leq u$ ، یک پایه ای برای دستگاه:

$$\begin{cases} Ax = b \\ x + Is = u \\ s \geq 0, \quad x \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

متناظر می‌گردد، که در آن $m + n$ متغیر اساسی عبارتند از x_B و x_{N_2} و s_B و s_{N_1} و $n - m$ متغیر غیر اساسی که در سطح صفر هستند عبارتند از x_{N_1} و s_{N_2} و بالعکس. توجه نمائید دستگاه (*) دارای $2n$ متغیر است زیرا $x \in R^n$ و $s \in R^n$. حال اگر متغیرها را مثلاً به صورت:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, s_1, s_2, \dots, s_n$$

مرتب نمائیم به سادگی می‌توان قاعده‌ی بلند در مورد جولوگیری از به دور افتادن به کار برد.

(۱) به مرحله‌ی ۲ بروید اگر x_k در کران پائین خود باشد. و اگر x_k در کران بالای خود، به مرحله‌ی ۳ بروید.

(۲) متغیر x_k از l_k به $l_k + \Delta_k$ که در آن:

$$\Delta_k = \text{Min}(\gamma_1, \gamma_2, u_k - l_k)$$

افزایش می‌یابد. اگر $\Delta_k = \infty$ متوقف شوید. مسأله بهینه‌ی نامتناهی دارد. در غیر این صورت با اصلاح نمودن جدول و به روز نمودن آن به قدم اول برگردید.

۳) متغیر x_k از u_k به $u_k - \Delta_k$ کاهش پیدا می‌کند. اگر $\Delta_k = \infty$ متوقف شوید، مسأله نامحدود می‌باشد. در غیراین صورت جدول را به روز نموده و به قدم اول برگردید.

توجه. جهت مشخص شدن، متغیرهای غیراساسی را که در کران پائین خود هستند با اندیس l و آن‌هایی که در کران بالای خود می‌باشند با اندیس u مشخص نمائید. اکنون با حل یک مثال مطالب فوق‌الذکر را توضیح می‌دهیم. توجه به جزئیات حل مسأله در درک عمیق الگوریتم بسیار موثر است.

مثال. ۳-۱۲-۲۰. مسأله‌ی زیر را با روش سیمپلکس برای متغیرهای کران دار حل نمائید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = -2x_1 - 4x_2 - x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ & 0 \leq x_1 \leq 4 \\ & 0 \leq x_2 \leq 6 \\ & 1 \leq x_3 \leq 4 \end{aligned}$$

با معرفی متغیرهای کمکی x_4 و x_5 که از پائین به صفر و از بالا به $+\infty$ محدود هستند مسأله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = -2x_1 - 4x_2 - x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ & x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 4 \end{aligned}$$

$$0 \leq x_1 \leq 4$$

$$0 \leq x_2 \leq 6$$

$$1 \leq x_3 \leq 4$$

$$0 \leq x_4 < \infty$$

$$0 \leq x_5 < \infty$$

در مرحله اول متغیرهای اساسی عبارتند از x_4 و x_5 و متغیرهای غیراساسی در کران پائین خود عبارتند از $x_1 = x_2 = 0$ و $x_3 = 1$. توجه نمائید که مقدار تابع مقصود برابر -1 می‌باشد و مقادیر متغیرهای غیراساسی x_4 و x_5 به ترتیب برابر $9 - 1 = 8$ و $4 + 1 = 5$ می‌باشند.

تکرار اول.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	۲	۱	۱	۱	۰	۹
x_5	۱	۱	-۱	۰	۱	۵
$z_j - c_j$	۲	۴	۱	۰	۰	$\bar{z} = -1$

ماکزیمم مقدار $z_j - c_j$ برای متغیرهای غیراساسی در کران پائین خود، عدد ۴ می‌باشد که

متناظر x_2 است. بنابراین $x_k = x_2$ از کران پائین خود افزایش می‌یابد. و $\bar{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Delta = \text{Min}\{\gamma_1, \gamma_2, u_2 - l_2\} = \text{Min}\{\gamma_1, \gamma_2, 6\}$$

$$\gamma_1 = \text{Min}\left\{\frac{9-0}{1}, \frac{5-0}{1}\right\} = 5$$

که متناظر $x_5 = x_{B_2}$ می‌باشد. یعنی $r = 2$ پس:

$$\Delta_2 = \text{Min}\{5, \infty, 6\} = 5$$

زیرا $\gamma_2 = \infty$ (چرا؟)

پس:

$$\hat{z} = -1 - (4)(5) = -21$$

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} - y_2 \bar{a}_2 \quad \Delta = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

پس جدول فوق پس از انجام عمل محوری چنین خواهد بود.

تکرار دوم.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	۱	۰	۲	۱	-۱	۴
x_2	۱	۱	-۱	۰	۱	۵
$z_j - c_j$	-۲	۰	۵	۰	-۴	-۲۱

تمامی متغیرهای غیراساسی در کران پائین خود می‌باشند. ماکزیمم مقدار $z_j - c_j$ برابر با ۵

است که متناظر x_3 می‌باشد بنابراین:

$$\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

و

$$\Delta_2 = \text{Min}(\gamma_1, \gamma_2, 4 - 1)$$

که:

$$\gamma_1 = \frac{4 - 0}{2} = 2$$

$$\gamma_2 = \frac{6 - 5}{1} = 1$$

$$\Delta_2 = \text{Min}\{2, 1, 3\} = 1$$

که متناظر x_2 است، $x_{B_2} = x_{B_1} = x_2$.

و این بدان معنی است که:

$$x_3 = 1 + \Delta_3 = 1 + 1 = 2$$

$$\hat{z} = -21 - (z_3 - c_3)\Delta_3 = -21 - 5 \times 1 = -26$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \bar{a}\Delta_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} 1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

در این جا x_3 وارد پایه می‌گردد. x_2 به کران بالای خود می‌رسد و پایه را ترک می‌نماید. جدول پس از انجام عمل محوری به صورت زیر خواهد بود.

تکرار سوم.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	۳	۲	۰	۱	۱	۲
x_3	-۱	-۱	۱	۰	-۱	۲
$z_j - c_j$	۳	۵	۰	۰	۱	-۲۶

ماکزیمم مقدار $z_j - c_j$ برای متغیرهای در کران پائین ۳ می‌باشد که متناظر x_1 است. بنابراین x_1 افزایش می‌یابد. در این جا:

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

و

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \text{Min}(\gamma_1, \gamma_2, u_1 - l_1) \\ &= \text{Min}(\gamma_1, \gamma_2, 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{2 - 0}{3} = \frac{2}{3} \\ \gamma_2 &= \frac{4 - 2}{1} = 2 \end{aligned}$$

پس $r = 3$, $x_{B_r} = x_{B_3} = x_3$ که متناظر $\Delta_1 = \text{Min}(\frac{2}{3}, 2, 4) = \frac{2}{3}$

$$\hat{z} = -26 - (z_1 - c_1)\Delta_1 = -26 - (3)\left(\frac{2}{3}\right) = -28$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \bar{a}_1\Delta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\left(\frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

در این جا x_1 وارد پایه می‌گردد و x_4 از پایه خارج می‌شود.

تکرار چهارم. جدول پس از انجام عملیات محوری چنین خواهد بود:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	۱	$\frac{2}{3}$	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_3	۰	$-\frac{1}{3}$	۱	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$
$z_j - c_j$	۰	۳	۰	-۱	۰	-۲۸

چون $z_j - c_j$ برای تمامی متغیرهای غیراساسی در کران پائین نامشبت و برای تمامی متغیرهای اساسی در کران بالا نامنفی است. پس جواب بهینه می‌باشد جواب بهینه فوق منحصر به فرد نمی‌باشد زیرا $z_5 - c_5 = z_j - c_j = 0$ و

$$\theta = \text{Min} \left\{ \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\} = \frac{1}{3} > 0$$

پس:

$$x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_5$$

$$x_3 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3}x_5$$

با افزایش x_5 از صفر به ۲ داریم:

$$x_1 = 0$$

$$x_3 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4 \quad 1 \leq 4 \leq 4$$

پس یک جواب بهینه دیگر به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 6, 4, 0, 2)$$

$$\hat{z} = -6 \times 4 - 4 = -28$$

۱۳-۳ کران بالای تعمیم یافته^۱

تا به حال روش‌هایی را ذکر نمودیم که قیدهای به صورت $x_j \leq u_j$ را دست‌کاری می‌نمود، بدون این‌که این قیدها را در پایه کاری ملحوظ نماید (در حقیقت بودن این‌که این قید باعث بزرگ شدن مرتبه‌ی پایه کاری نمی‌شد). این روش تعمیم یافته، به طوری که می‌تواند، قیدهای که در خاصیت زیر صدق می‌نمایند را دست‌کاری نماید (با همان روش یعنی بدون ملحوظ داشتن آن‌ها در پایه کاری).

(۱) هر قید در مجموعه؛ یک قید کران بالا است به صورت مجموع از متغیرها، یعنی قیدی به صورت:

$$\sum (x_j \mid j \in \{j_1, j_2, \dots, j_k\}) \leq u.$$

که با معرفی متغیر کمکی به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum (x_j \mid j \in \{j_1, j_2, \dots, j_k\}) + s_1 = u.$$

(۲) هر متغیر در مدل، حداکثر در یک قید ظاهر می‌گردد.

مجموعه‌ای از قیدها که در خواص (۱) و (۲) صدق می‌نمایند را، قیدهای کران بالای تعمیم یافته می‌نامند. که این قیدها را به صورت اختصار با قیدهای GUB^2 نشان می‌دهند. روش حل LP بدون ملحوظ داشتن قیدهای مربوط به GUB در پایه کاری (یادآور می‌شویم که B پایه کاری، ماتریسی است که در هر مرحله نیاز به داشتن عکس آن داریم) را تکنیک کران بالای تعمیم یافته یا GUBT (برای اختصار) می‌نامیم. این روش توسط استاد فقید و نابغه جهان

1) Generalized Upper Bounding (GUB) 2) Generalized Upper Bound lenstraint

پروفسور جرج دانتزیگ در سال ۱۹۶۷ ابداع شد. اگر GUBT بتواند قیدهای GUB را که در خواص (۱) و (۲) صدق می‌نماید دست‌کاری نماید، با مقیاس نمودن متغیرها^۱، می‌تواند، مجموعه قیدهایی را که فقط در خاصیت (۲) صدق می‌نماید، دست‌کاری کند. در این مرحله، صورت کلی GUB را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۳-۱۳-۲۱ مثال. LP زیر نمونه‌ای از GUB می‌باشد:

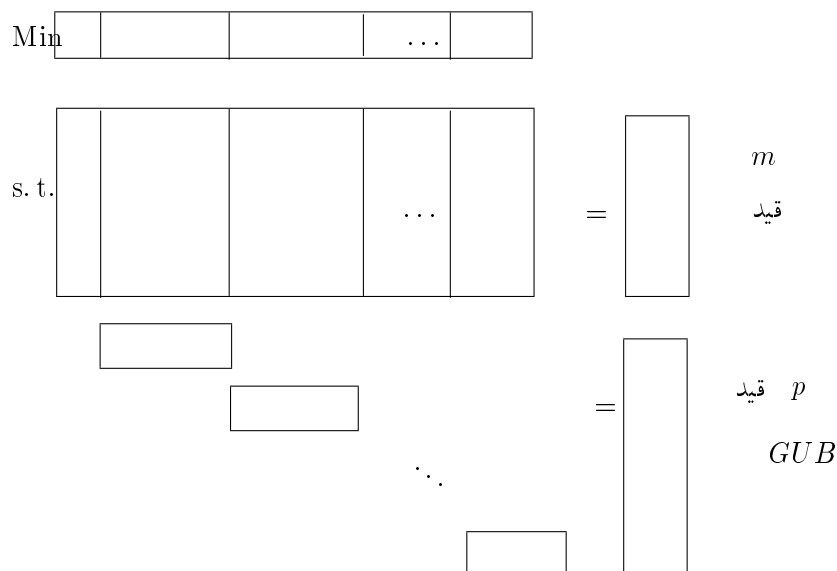
$$\begin{array}{rcccccc} \text{Max} & 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +5x_4 & +6x_5 & \\ \text{s. t.} & 3x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = 10 \\ & -x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +x_4 & +x_5 & = 12 \\ & & x_2 & +x_3 & & +s_1 & = 5 \quad \text{قید GUB} \\ & & & & x_4 & +x_5 & +s_2 = 7 \quad \text{قید GUB} \end{array}$$

تمامی متغیرها نامنفی هستند.

یک LP به صورت استاندارد در نظر بگیرید، که در آن که قیدها در دو دسته قرار می‌گیرند. m قید اول دارای ساختار کلی می‌باشند و p قید بعدی، قیدهایی هستند که در خاصیت (۲) صدق می‌نمایند که آن‌ها را قیدهای کران بالای تعمیم یافته یا قیدهای GUB می‌نامند. GUBT حالت خاصی از روش سیمپلکس اصلاح شده می‌باشد که عکس پایه کاری از مرتبه‌ی m را حفظ می‌نماید (که در آن m تعداد قیدهای غیر GUB است) به جای حفظ عکس پایه از مرتبه‌ی $m + p$ که در سیمپلکس معمولی برای حل چنین مسائلی مورد نیاز می‌باشد. تمام مقادیر مورد نیاز برای حل یک LP با روش سیمپلکس با به‌کاربردن عکس ماتریس پایه کاری و با استفاده از داده‌های اصلی قابل دسترسی می‌باشد. و فقط پس از هر مرحله عکس پایه کاری به روز می‌گردد. وقتی p (تعداد قیدهای GUB) عدد بزرگی باشد، صرفه جویی در استفاده از حافظه اصلی و تقلیل در مدت زمان استفاده شده از C.P.U^۲ بسیار چشم‌گیر می‌باشد برای استفاده از امتیازات GUB، فرد بایستی قادر باشد که قیدهای مربوط به GUB را تشخیص دهد. اگر LP مورد نظر دارای ساختار کلی باشد و فرد هیچ دانش قبلی در رابطه با آن نداشته باشد، بایستی روش خاصی جهت تشخیص این قید اعمال نماید. با مرتب نمودن سطرها و ستون‌ها؛ در صورت ضرورت یک مسأله‌ی LP به صورت استاندارد

1) Scaling of Variables 2) Central Processing Unit

را می‌توان با GUBT حل نمود. که این صورت کلی در شکل (۴-۳) نشان داده شده است.



شکل (۴-۳) تمامی متغیرهای مسأله نامنفی می‌باشند.

شکل (۴-۳) ساختار یک مدل LP که می‌توان آن با GUBT حل نمود. تمامی ضرایبی که خارج از قالب‌ها می‌باشند برابر با صفر می‌باشند. هر یک از قالب‌های بار یک زیرقالب بزرگ قیده‌ها نمایش قیده‌های GUB می‌باشند. فرض کنید n تعداد متغیرهایی باشد که در هیچ‌یک از قیده‌ها GUB ظاهر نمی‌گردد و n_i تعداد متغیرهایی باشد (یعنی با ضرایب غیرصفر) که در هر یک از قیده‌ها GUB موجود می‌باشد ($i = 1, 2, \dots, p$) فرض کنید:

$$S_0 = \{1, 2, 3, \dots, n_0\}$$

$$S_t = \{n_0 + n_1 + \dots + n_{t-1} + 1, \dots, n_0 + n_1 + \dots + n_{t-1} + n_t\}$$

$$t = 1, \dots, p$$

برای روشن شدن تعریف s ها مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{rcccccc} \text{Min} & ۲x_۱ & +۳x_۲ & +۴x_۳ & -x_۴ & -x_۵ & -x_۶ \\ & ۲x_۱ & -x_۲ & +x_۳ & +x_۴ & +۲x_۵ & +۲x_۶ = ۱۰ \\ & x_۱ & +۲x_۲ & +۳x_۳ & +۴x_۴ & -۵x_۵ & -۶x_۶ = ۱۱ \\ & & & ۲x_۳ & +۴x_۴ & & = ۵ \\ & & & & & ۶x_۵ & +۷x_۶ = ۷ \end{array}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = ۱, \dots, ۶$$

در این جا

$$S_0 = \{۱, ۲\}$$

$$S_۱ = \{۲ + ۱, ۲ + ۲\} = \{۳, ۴\}$$

$$S_۲ = \{۴ + ۱, ۴ + ۲\} = \{۵, ۶\}$$

متغیر x_j برای $j \in S_0$ ، متغیرهایی هستند که در هیچ یک از قیدهای $G \cup B$ ظاهر نمی‌گردند مانند متغیرهای $x_۱$ و $x_۲$ در مثال فوق و متغیرهای x_j برای $j \in S_t$ ($t = ۱, \dots, p$) مانند متغیرهایی هستند که در قید t ام $G \cup B$ ظاهر می‌گردند. فرض کنید x^t بردار متغیرهایی x_j باشند که $j \in S_t$ ($t = 0, ۱, \dots, p$) مثلاً در مثال فوق:

$$x^0 = (x_۱, x_۲) ; x^۱ = (x_۳, x_۴) ; x^۲ = (x_۵, x_۶)$$

در این صورت LP مورد نظر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{array}{rcccccc} \text{Min} & z(x) = & c^0 x^0 & + c^1 x^1 & + c^2 x^2 & + \dots & + c^p x^p \\ \text{s. t.} & & A^0 x^0 & + A^1 x^1 & + A^2 x^2 & + \dots & + A^p x^p = b \\ & & & d^1 x^1 & & & = d_1 \\ & & & & d^2 x^2 & & = d_2 \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & & d^p x^p = d_p \end{array}$$

$$x^t \geq 0 \quad t = 0, ۱, ۲, \dots, p$$

(۲۲-۳)

توجه کنید که d_1, \dots, d_p اسکالر و d^t ($t = 0, 1, \dots, p$) بردارهای سطری می‌باشند. A^j یک ماتریس با m سطر و تعداد ستون می‌باشد که تعداد ستون‌های آن برابر مؤلفه‌های x^j است. بدون این‌که به کلیت استدلال خللی وارد شود، فرض می‌کنیم که دستگاه قیدها، مستقل خطی هستند. از این‌رو، هر بردار اساسی برای ۲۲-۳ شامل $m + p$ متغیر اساسی خواهد بود و هر پایه ماتریس مربعی از مرتبه $m + p$ می‌باشد.

در بیشتر کتاب‌ها GUBT حالتی از قیدهای GUB را مورد مطالعه قرار می‌دهد که تمامی ضرایب متغیرها در قیدهای مذکور برابر یک است. در این‌جا، حالت کلی را بررسی می‌کنیم که هر قید GUB ممکن است یک معادله خطی باشد.

توجه. قبل از این‌که GUBT برای حل مسأله به‌کار رود، قیدها بایستی به‌صورتی مرتب گردند که p قید GUB در انتهای قیدهای مسأله آورده شود.

علائمی که در این قسمت مورد استفاده قرار می‌گیرد. وقتی می‌گوئیم که x_j از مجموعه‌ی S_t است، این بدان معنی است که $j \in S_t$. a_j یک بردار ستونی از مرتبه $1 \times (m + p)$ می‌باشد که بردار ضریب متغیر x_j در دستگاه قیود می‌باشد. در بردار a_j ، m مؤلفه‌ی اول از قیدهای غیر GUB و p مؤلفه‌ی آخر از قیدهای GUB ظاهر می‌گردند. از این‌رو حداکثر یک عضو از p مؤلفه‌ی آخر مخالف صفر می‌باشد وقتی می‌گوئیم a_j یک ستون از S_t است، این بدان معنی است که $j \in S_t$. هم‌چنین اگر تمامی p مؤلفه‌ی آخری a_j برابر با صفر باشند این بدان معنی است که a_j از S_0 است (چرا؟)

اگر مؤلفه‌ی $m + t$ ام a_j مخالف صفر باشد، این امر مستلزم آن است که:

$$j \in S_t$$

برای هر عدد طبیعی n ، ماتریس واحد از مرتبه‌ی n به I_n نشان داده می‌شود.

۱۴-۳ فاز اول و فاز دوم

برای پیدا نمودن یک BFS برای ۲۲-۳ فاز اول روش سیمپلکس را با افزودن متغیرهای تصنعی مورد استفاده قرار می‌دهیم. فاز اول مسأله همان ساختار GUB را دارد که مسأله اصلی دارا

می‌باشد. در انتهای فاز اول اگر مسأله اصلی شدنی باشد یک جواب اساسی شدنی برای مسأله‌ی اصلی پیدا می‌شود که می‌توان با به‌کاربردن فاز دوم مسأله را حل نمود. بنابراین بحث بدین‌صورت خواهد بود که یک جواب اساسی شدنی برای مسأله در دست است. محاسباتی که قرار است در یک مرحله از الگوریتم سیمپلکس انجام شود فرض کنیم که یک جواب اساسی شدنی برای ۲۲ - ۳ در دست است. محاسباتی که با به‌کاربردن روش سیمپلکس بایستی انجام شود به شرح ذیل می‌باشد:

(۱) مقادیر متغیرهای اساسی را در BFS متناظر محاسبه نمائید. این کار ممکن است با قرار دادن متغیرهای غیراساسی مساوی صفر و حل دستگاه صورت گیرد.

(۲) جواب اساسی دوآل متناظر پایه موردنظر را به دست آورید.

(۳) با به‌کاربردن جواب حاصل برای دوآل در (۲) ضرایب قیمت نسبی^۱ را با استفاده از داده‌های اصلی به دست آورید. (یعنی $c_j - wa_j$)

(۴) بررسی کنید که $c_j - wa_j$ های بدست آمده بازاء هر j نامنفی است یا نه. در صورت مثبت بودن جواب، جواب حاصل بهینه است و عملیات را قطع نمائید، در غیر این صورت، منفی‌ترین قیمت نسبی را در نظر بگیرید و متغیر متناظر آن را وارد پایه کنید.

(۵) ستون متغیر واردشونده را به روز نمائید، که این ستون ضرایب ترکیب خطی پایه‌ها در نمایش ستون اصلی می‌باشد.

(۶) اگر تمامی اعضای ستون به روز شده نامثبت باشند. مسأله نامحدود است و عملیات ختم می‌گردد. در غیر این صورت قاعده می‌نیمم جهت مشخص نمودن متغیر خارج‌شونده اجرا می‌گردد.

(۷) با به روز نمودن بردار پایه، عکس ماتریس پایه،... به مرحله‌ی بعد می‌رویم مرحله‌ای که تمامی عملیات فوق‌الذکر تکرار می‌گردد.

در حل مسأله‌ی ۳-۲۲ با GUBT با بردار اساسی شدنی اولیه، یک پایه کاری از مرتبه‌ی m از پایه‌ی اولیه ساخته می‌شود. تمامی محاسباتی که قرار است در این مرحله انجام شود؛

1) Relative Cost Coefficients

با به‌کار بردن عکس پایه کاری (پایه کاری مرتبه‌ی m فوق‌الذکر) صورت می‌پذیرد. پس از تغییر بردار اساسی در هر مرحله، عکس پایه کاری به‌روز می‌گردد. چند نتیجه مهم در رابطه با بردار اساسی ذیلاً درج می‌گردد که بسیار در محاسبات مفید می‌باشد.

۲۲-۱۴-۳ قضیه. هر بردار اساسی برای ۲۲-۳ بایستی حداقل یک متغیر اساسی مانند x_j از S_t ($t = 1, \dots, p$) را شامل شود.

برهان. فرض کنید x_B یک بردار اساسی و B پایه متناظر آن باشد (برای مسأله ۲۲-۳). پایه B از مرتبه‌ی $m + p$ می‌باشد و غیرمنفرد است. از این‌رو حداقل یک عضو از سطر $(p + t)$ ام بایستی مخالف صفر باشد (چرا؟) ($t = 1, \dots, p$) ضرایب در سطر $(m + t)$ ام مسأله ۲۲-۳ برای تمامی x_j هائی که $j \notin S_t$ صفر می‌باشند.

پس B در صورتی شامل یک عضو غیرصفر در سطر $(t + p)$ ام است اگر x_B حداقل شامل یک متغیر مانند x_j , $j \in S$ باشد. از این‌رو x_B بایستی حداقل یک متغیر از S_t برای هر t ($t = 1, \dots, p$) باشد.

۱۵-۳ مجموعه‌های ضروری و غیرضروری^۱

فرض کنید x_B یک بردار اساسی برای ۲۲-۳ باشد. برای $1 \leq t \leq p$ مجموعه‌ی S_t را نسبت به پایه مذکور ضروری گوئیم، در صورتی که، x_B شامل دو یا بیشتر از متغیرهای مجموعه‌ی S_t باشد. برای $1 \leq t \leq p$ ، مجموعه‌ی S_t را غیرضروری گویند، در صورتی که نسبت به بردار و پایه، x_B فقط شامل یک متغیر از S_t باشد.

توجه داشته باشید که یک مجموعه‌ای مانند S_t نسبت به یک پایه از ۲۲-۳ که ضروری است، ممکن است نسبت به بردار پایه دیگر غیرضروری شود، ضمناً یادآور می‌شویم که بر مبنای تعریف فوق S_t ها ($t = 1, \dots, p$) به دو دسته جدا؛ مجموعه‌های ضروری و مجموعه‌های غیرضروری دسته‌بندی می‌گردند. این دسته‌بندی شامل مجموعه‌ی S نمی‌گردد.

1) Essential an Inessential Sets

۳-۱۵-۲۳ قضیه. فرض کنید x_B یک بردار اساسی ۳-۲۲ باشد. تعداد مجموعه‌های ضروری نسبت به x_B حداکثر m می‌باشد.

برهان. فرض کنید x_B یک بردار اساسی برای ۳-۲۲ باشد طبق قضیه قبل، x_B بایستی از هر S_t حداقل یک متغیر را داشته باشد (برای $t = 1, \dots, p$). هم‌چنین $m + p$ متغیر اساسی در x_B است. از این رو تعداد مجموعه‌های S_t که از آن‌ها x_B دو یا بیشتر از دو متغیر را دارا می‌باشد نمی‌تواند از m بیشتر شود.

۳-۱۶ متغیرهای کلیدی و غیرکلیدی^۱

فرض کنید x_B یک بردار اساسی برای ۳-۲۲ و B پایه متناظر آن باشد. طبق قضیه‌ی قبل، x_B شامل حداقل یک متغیر از مجموعه‌ی S_t ($t = 1, \dots, p$) می‌باشد. برای هر $1 \leq t \leq p$ یک متغیر از x_B انتخاب نمائید که در S_t باشد و آن را متغیر کلیدی از S_t در x_B بنامید. اگر S_t مجموعه‌ی ضروری باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی:

$$\{x_j \mid j \in S_t\}$$

شامل دو یا بیشتر متغیر اساسی در x_B می‌باشد و می‌توان هر یک از این متغیرها را دلخواه انتخاب نمود. توجه داشته باشید اگر S_t مجموعه‌ی غیرضروری باشد، در این صورت متغیر کلیدی تنها متغیر x_B در آن می‌باشد. پایه کاری که از B به دست می‌آید کاملاً بستگی به متغیر کلیدی دارد که از مجموعه‌های ضروری انتخاب می‌گردد. ستون‌های اصلی در ۳-۲۲ که متناظر متغیرهای کلیدی می‌باشد، ستون‌های کلیدی در پایه نامیده می‌شود. ستون کلیدی متناظر متغیر کلیدی از مجموعه S_t ها ($t = 1, \dots, p$) را ستون کلیدی t ام در پایه می‌نامیم. توجه نمائید که متغیرهای کلیدی، از S_t ($t = 1, \dots, p$) انتخاب می‌گردند و هیچ متغیر کلیدی از S انتخاب نمی‌گردد. متغیرهای اساسی که متغیرهای کلیدی نمی‌باشند، متغیرهای غیرکلیدی نامیده می‌شوند و ستون‌های متناظر آن‌ها را ستون‌های غیرکلیدی گویند. تعداد کلی متغیرهای غیرکلیدی m می‌باشد.

1) Key and Nonkey Variables

۱۷-۳ به دست آوردن پایه کاری^۱

فرض کنید x_B بردار اساسی شدن اولیه و B پایه متناظر آن باشد؛ به علاوه فرض کنید متغیرهای کلیدی در x_B از مجموعه S_t ($t = 1, \dots, p$) انتخاب شده اند. برای پایه اولیه، پایه کاری به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

متغیرهای x_B (و ستون‌های متناظر آن را در پایه B) را به صورتی مرتب نمائید، که متغیرهای کلیدی در مجموعه‌های S_t ($t = 1, \dots, p$) در p ستون اولی قرار گیرند. پس از متغیرهای کلیدی، متغیرهای غیرکلیدی در مجموعه S_t ($t = 1, \dots, p$) را به طریقی مرتب نمائید. پس از مرتب نمودن با روش فوق‌الذکر، پایه متناظر B به صورت زیر افزاز می‌گردد:

$$B = \left[\begin{array}{ccc} \text{ستون‌های غیرکلیدی} & \vdots & \text{ستون‌های کلیدی به ترتیب } t = 1, \dots, p \\ & \vdots & P \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ & \vdots & D \\ & \vdots & Q \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{سطر اول } m \\ \\ \text{سطر آخر } p \end{array} \quad (23-3)$$

که در آن D یک ماتریس غیرمنفرد می‌باشد و قطری است که مرتبه‌ی آن $p \times p$ است. Q ماتریسی است که شامل حداکثر یک عضو مخالف صفر در هر ستون می‌باشد. فرض کنید:

$$T = \left[\begin{array}{ccc} D^{-1} & \vdots & -D^{-1}Q \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \circ & \vdots & I_m \end{array} \right] \quad (24-3)$$

T یک ماتریس مربع از مرتبه‌ی $m + p$ غیرمنفرد می‌باشد. ماتریس T با استفاده از D^{-1} و Q ساخته شده است؛ که یک ماتریس بالا مثلثی است:

$$BT = \left[\begin{array}{ccc} PQ^{-1} & \vdots & S \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ I_p & \vdots & \circ \end{array} \right] \quad (25-3)$$

1) Derivation of the Working Basic

که در آن $S = -PD^{-1}Q + R$ یک ماتریس مربع از مرتبه m می‌باشد. اگر S ماتریس منفرد باشد؛ آنگاه مجموعه‌ی m ستون BT یک مجموعه‌ی وابسته‌ی خطی خواهد بود و در نتیجه BT ماتریس منفرد می‌باشد، که تناقض با نامنفرد بودن B و T می‌باشد (حاصل ضرب دو ماتریس غیرمنفرد، ماتریسی است غیرمنفرد). از این رو S ماتریس نامنفرد می‌باشد. ماتریس S ای که به صورت فوق تعریف شد، پایه کاری برای مسأله می‌باشد. با داشتن B که یک ماتریس $(m+p) \times (m+p)$ می‌باشد و با انتخاب متغیرهای کلیدی ماتریس B و با مرتب نمودن متغیرهای کلیدی و غیرکلیدی به صورت ۳-۲۰ افزایش می‌گردد. و پایه کاری به وسیله

$$S = -PD^{-1}Q + R$$

محاسبه می‌شود. پایه کاری S را می‌توان به صورت زیر نیز محاسبه نمود.

۳-۱۸ روشی برای محاسبه‌ی پایه کاری

همان طوری که قبلاً ذکر شد، قیدهای LP بایستی به صورتی مرتب گردند که p قید آخری، مربوط به قیدهای GUB باشند. همین طور پایه را بایستی به صورتی بنویسیم که p ستون اول، ستون‌های کلیدی به ترتیب $t = 1, \dots, p$ شوند. پس از مرتب نمودن B به شرحی که گذشت، m ستون آخری آن مربوط به ستون‌های غیرکلیدی است. با شروع از اولین ستون غیرکلیدی در B ، محاسبات زیر را در رابطه با ستون‌های غیرکلیدی انجام دهید. فرض کنید که ستون انتخاب شده مربوط به S_{t_1} باشد. اگر $t_1 = 0$ ، هیچ عملی روی این ستون انجام ندهید، ستون غیرکلیدی بعدی را انتخاب نمایید. (یعنی ستون $1 \leq t_1 \leq p$) ضریب مناسبی از ستون اول را از این ستون کم کنید (یعنی مضر بی از ستون کلیدی را از ستون غیرکلیدی) به طوری که عضو غیرصفر این ستون صفر شود (توجه کنید که در این ستون فقط یک عضو غیرصفر وجود دارد) پس از انجام این محاسبه، همین کار را با ستون‌های غیرکلیدی دیگر انجام دهید. پس انجام عملیات فوق در رابطه با ستون‌های غیرکلیدی، اعضای ستون‌های کلیدی را به عضو مخالف صفر آن‌ها تقسیم نماید. واضح است که عملیات فوق روی پایه، پایه را به ماتریس BT تبدیل می‌نماید. (BT در ۳-۲۵). و پایه کاری عبارت است از ماتریس $m \times m$ واقع در m سطر

x_8, x_9 متناظر ستون‌های هشتم و نهم (به ترتیب) در پایه از مجموعه‌های S_1 و S_2 می‌باشند. در این مسأله متغیرهای x_4 و x_5 به ترتیب از مجموعه‌های S_2 و S_3 می‌باشند. برای به دست آوردن پایه کاری بایستی عملیات زیر را انجام دهیم.

$\frac{1}{4}$ ستون اول را از ستون ششم، $-\frac{2}{3}$ ستون دوم را از ستون هفتم و $\frac{1}{4}$ ستون سوم را از ستون هشتم و بالاخره $-\frac{3}{4}$ ستون سوم را از ستون ۹ تفریق نمائیم و ستون‌های اول و دوم و سوم و چهارم و پنجم را به ترتیب به اعداد $3, 2, -1, 4, -5$ تقسیم کنیم. پس از انجام عملیات فوق B صورتی به شکل ۳-۲۵ خواهد داشت.

$$BT = \begin{pmatrix} \begin{array}{cccc|cccc} \text{ستون‌های کلیدی} & & & & & & & & & \\ \text{ستون‌های غیرکلیدی} & & & & & & & & & \\ \frac{1}{4} & 11 & -2 & 1 & \frac{1}{5} & : & \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & -4 & -5 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & : & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -5 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -1 & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & : & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{2}{5} & : & 1 & 0 & -3 & -3 \end{array} & \text{اعضای سطرهای غیر } GUB \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{اعضای سطرهای } GUB \end{array}$$

از این رو پایه کاری به صورت زیر خواهد بود:

$$S \text{ پایه کاری} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & -4 & -5 \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad S^{-1} \text{ عکس پایه کاری} = \begin{bmatrix} 84 & 33 & 48 & -183 \\ 15 & 6 & 9 & -33 \\ 26 & 10 & 15 & -\frac{170}{3} \\ 2 & 1 & 1 & -\frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

۳-۱۸-۲۵ به کار بردن عکس پایه کاری برای محاسبه‌ی متغیرهای اساسی و به روز نمودن بردارهای ستونی.

حال روش حل دستگاه معادلات به صورت زیر را با به کار بردن عکس ماتریس پایه کاری:

$$By = q \quad (۲۷-۳)$$

بیان می‌کنیم؛ که در آن $q = (q_1, \dots, q_m, q_{m+1}, \dots, q_{m+p})^t$ بردار داده شده می‌باشد. فرض کنید:

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{p+m}) = T^{-1}Y$$

که در آن T ماتریس انتقال یافته ۲۴-۳ می‌باشد. در این صورت دستگاه معادلات ۲۶-۳ معادل دستگاه:

$$BT(T^{-1}Y) = q$$

می‌باشد. یعنی:

$$\begin{pmatrix} PD^{-1} & S \\ I_p & 0 \end{pmatrix} \xi = q \quad (۲۸-۳)$$

یعنی:

$$(\xi_1, \dots, \xi_p)^t = (q_{m+1}, \dots, q_{m+p})^t$$

و

$$(\xi_{p+1}, \dots, \xi_{p+m})^t = s^{-1}[(q_1, \dots, q_m) - PD^{-1}(q_{m+1}, \dots, q_{m+p})]$$

بنابراین با به کار بردن اطلاعات ماتریس پایه B و بردار q و B^{-1} بردار $(\xi_1, \dots, \xi_{p+m})^t$ به صورت فوق محاسبه می‌گردد. با داشتن $(\xi_1, \dots, \xi_{p+m})^t$ جواب Y به صورت:

$$Y = T(\xi_1, \dots, \xi_{p+m})^t$$

به دست می‌آید.

مثال ۲۶-۱۸-۳ فرض کنید $m = 4$, $p = 5$ و x_B و B بردار اساسی و پایه متناظر آن به ترتیب در مثال ۲۴-۱۸-۳ باشد ستون‌های کلیدی و غیرکلیدی همان‌هائی هستند که در آن مثال مشخص گردید. در این صورت PD^{-1} یک ماتریس $m \times p$ می‌باشد که در گوشه شمال غربی BT قرار دارد (یعنی زیر ماتریسی که سطرهای آن متناظر سطرهای غیر GUB و ستون‌های آن ستون‌های کلیدی BT هستند). در این صورت ماتریس T به صورت زیر می‌باشد:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فرض کنیم، می‌خواهیم دستگاه ۲۶-۳ با:

$$q = (20, 18, 8, 3, 4, 4, 2, 12, 0)$$

را حل کنیم. فرض کنیم:

$$y = (y_j \mid j = 1, \dots, 9)^t$$

$$\xi = (\xi \mid j = 1, \dots, 9)^t = T^{-1}Y$$

از روش بالا داریم:

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5) = (4, 4, 2, 12, 0)^t$$

و

$$\begin{aligned} & (\xi_6, \xi_7, \xi_8, \xi_9) \\ & = S^{-1}[(2^0, 18, 8, 3)^t - PD^{-1}(4, 4, 2, 12, 0)^t] \\ & = S^{-1}\left(\frac{2^0}{3}, \frac{7}{3}, 2, 4\right)^t = (1, 0, 0, -1)^t \end{aligned}$$

از این رو:

$$\xi = (4, 4, 2, 12, 0, 1, 0, 0, -1)^t$$

و

$$y = T\xi = (1, 2, 1, 3, 0, 1, 0, 0, -1)^t$$

جواب دستگاه ۲۶-۳ می‌باشد.

دستگاه معادلاتی که از حل آن‌ها BFS‌های متناظر مسائلی مانند ۲۲-۳ حاصل می‌گردد و حل دستگاه‌هائی که منجر به به‌روز نمودن بردار ستونی واردشونده در مراحل روش سیمپلکس به‌کارگرفته می‌شوند، از نوع ۲۶-۳ می‌باشند، از این رو با روش فوق‌الذکر با به‌کارگرفتن پایه کاری قابل حل هستند.

۲۷-۱۸-۳ به‌کار بردن عکس پایه کاری برای محاسبه‌ی متغیرهای دوآل.

فرض کنید x_B بردار اساسی ۲۲-۳ و B پایه متناظر آن و C_B بردار سطری اصلی ضرایب قیمت متناظر x_B در ۲۲-۳ باشد. فرض کنید:

$$w = (w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_{m+p})$$

جواب اساسی دوآل متناظر مسأله ۲۲-۳ می‌باشد. بردار w را می‌توان از حل دستگاه:

$$wB = C_B$$

به‌دست آورد. که دستگاه فوق معادل است با:

$$WBT = C_B T$$

یعنی:

$$w \begin{pmatrix} PD^{-1} & \vdots & S \\ \dots & \dots & \dots \\ I_p & \vdots & \circ \end{pmatrix} = v = C_B T \quad (29-3)$$

بنابراین:

$$v = C_B T = (v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+m}) \quad (30-3)$$

به سادگی قابل محاسبه است.

از ۲۹-۳ حاصل می‌گردد:

$$(w_1, w_2, \dots, w_m) = (v_{p+1}, \dots, v_{p+m}) S^{-1} \quad (31-3)$$

و

$$(w_{m+1}, \dots, w_{m+p}) = (v_1, \dots, v_p) - (w_1, \dots, w_m) PD^{-1} \quad (32-3)$$

از این رو با داشتن B ، C_B و B^{-1} به سادگی می‌توان بردار w را به دست آورد.**مثال ۲۸-۱۸-۳** فرض کنید $m = 4$ و $p = 5$ و B همان باشد که در مثال ۲۴-۱۸-۳

داده شد. متغیرهای کلیدی و غیرکلیدی همان‌ها هستند که در آن مثال مشخص گردیدند. فرض

کنید:

$$C_B = (-1, -1, 2, -5, 5, 2, -\frac{7}{3}, -7, -4)$$

و

$$w = (w_i \mid i = 1, \dots, 9)$$

پس:

$$v = C_B T = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -2, \frac{5}{4}, -1, \frac{7}{3}, -3, -5, -10)$$

از این رو با توجه به آن چه گفته شد داریم:

$$\begin{aligned}(w_1, w_2, w_3, w_4) &= \left(\frac{7}{3}, -3, -5, -10\right)s^{-1} \\ &= (1, -1, 0, 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(w_5, w_6, w_7, w_8, w_9) &= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -2, -\frac{5}{4}, -1\right) - \\ (1, -1, 0, 2)PD^{-1} &= (0, 2, 1, -1, 0)\end{aligned}$$

پس بردار w عبارت خواهد بود از:

$$w = (1, -1, 0, 2, 0, -2, 1, -1, 0)$$

۲۹-۱۸-۳ به چه صورتی بقیه‌ی محاسبات را با به‌کار بردن عکس ماتریس پایه‌ی کاری می‌توان انجام داد.

برای محاسبه \bar{c}_j (قیمت نسبی ضرایب) برای متغیر x_j نسبت به پایه B داریم:

$$\bar{c}_j = c_j - wa_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

اگر تمامی \bar{c}_j ها نامنفی باشند، پایه B متناظر یک پایه‌ی بهینه می‌باشد (برای مسأله‌ی ۳-۲۲) متوقف می‌گردیم. در غیر این صورت متغیر x_k را با $\bar{c}_k < 0$ در نظر می‌گیریم. متغیر واردشونده خواهد بود. بردار \bar{a}_j به صورت زیر به‌روز می‌گردد:

$$B\bar{a}_j = a_j \quad (۳۳-۳)$$

می‌توان معادله‌ی فوق را به صورت زیر نیز نوشت:

$$BT(T^{-1}\bar{a}_j) = a_j \quad (۳۴-۳)$$

قرار می‌دهیم:

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+m}) = T^{-1}\bar{a}_j$$

که در آن T همان است که قبلاً محاسبه شده است.

$$BT\alpha = a_j$$

$$\begin{pmatrix} PD^{-1} & \vdots & S \\ \dots & \dots & \dots \\ I_p & \vdots & 0 \end{pmatrix} \alpha = a_j$$

یعنی:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = (a_{m+1j}, \dots, a_{m+pj})$$

و

$$(\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+m}) = s^{-1}[(a_{1j}, \dots, a_{mj}) - D^{-1}(a_{m+1j}, \dots, a_{m+pj})]$$

و از آن جا:

$$\bar{a}_j = T(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+m})$$

با محاسبه‌ی \bar{a}_j اگر $\bar{a}_j \leq 0$ ، آن‌گاه z در ناحیه شدنی از پائین نامحدود می‌باشد مسأله‌ی ۲۲-۳ بهینه‌ی نامتناهی دارد متوقف می‌گردیم. در غیر این صورت با استفاده از قاعده می‌نیم نسبت متغیر خارج شونده به شرح زیر مشخص می‌گردد. فرض کنیم \bar{b} بردار مقادیر متغیرهای اساسی متناظر پایه B باشد. در این صورت داریم:

$$\theta = \text{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} \quad (35-3)$$

در این صورت x_r متغیر خارج شونده خواهد بود. در صورتی که r به‌طور منحصر به فرد مشخص نگردد؛ می‌توان به دلخواه یکی را انتخاب نمود.

۱۹-۳ به‌روز نمودن مقادیر اساسی

فرض کنید x_B بردار اساسی شدنی متناظر پایه B برای مسأله‌ی ۲۲-۳ باشد و S پایه کاری مستخرج از آن و x_k متغیر وارد شونده. فرض کنید σ چنان باشد که S_σ شامل k باشد و p

چنان باشد که $r \in S_p$. از این رو متغیر واردشونده از S_σ و متغیر خارج شونده از S_p می باشد. چندین حالت وجود دارد که بایستی جداگانه بررسی گردد.

حالت اول.

متغیر خارج شونده x_2 از متغیرهای کلیدی نمی باشد.

در این حالت، ستون خارج شونده از پایه B یکی از m ستون آخری B می باشد. فرض کنید x_r ، $p+g$ در x_B باشد. بنابراین ستون x_r در $p+g$ ام ستون B قرار گیرد. این ستون قرار است با ستون x_k جایگزین گردد. (در ۳-۲۲)

فرض کنید B به همان صورت قبلی افراز گردیده است. پس:

$$g \text{ ام ستون} = \begin{pmatrix} R \\ \dots \\ Q \end{pmatrix} = \text{ستون خارج شونده}$$

$$\text{ستون واردشونده} = \begin{pmatrix} a'_k \\ u_k \end{pmatrix}$$

که در آن $a_k = \begin{pmatrix} a'_k \\ u_k \end{pmatrix}$ و u_k شامل حداکثر یک عضو مخالف صفر می باشد (اگر $\sigma \neq 0$ ، چون $k \in S_\sigma$ ، σ ام عضو u_k غیر صفر می باشد. اگر $\sigma = 0$ در این صورت $u_k = 0$). پایه جدید کاری با جایگزین نمودن g ام ستون در S با $a_k - PD^{-1}u_k$ حاصل می گردد. فرض کنید:

$$h = (h_1, \dots, h_m)^t$$

$$= s^{-1}(a_k - PD^{-1}u_k)$$

از این رو، در این حالت، عکس پایه کاری می توان با وارد نمودن ستون h ام سمت راست عکس S^{-1} و با انجام عمل محوری با ملحوظ داشتن h به عنوان ستون محوری و g به عنوان سطر محوری.

توجه. توجه داشته باشید در این حالت، بردار h ، که ستون محوری برای به روز نمودن عکس پایه کاری می باشد مستقیماً با به کار بردن ستون اصلی در ۳-۲۲ محاسبه می شود نه با ستون

به روز شده متناظر x_k .

مثال ۳-۱۹-۳۰ فرض کنیم $m = 4$ و $p = 5$ و x_B و B همان باشند که در مثال ۳-۱۸-۲۴ بودند. فرض کنید که متغیر x_1 که متناظر ستون $a_{10} = (0, 0, 2, 0, 6, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$ ، متغیر واردشونده باشد. واضح است که x_{10} از S_0 نمی‌باشد و از S_2 می‌باشد. (چرا؟) فرض کنید که متغیر خارج‌شونده از پایه x_9 باشد. بردار اساسی جدید به صورت زیر خواهد بود:

$$x_{B_1} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{10})$$

و

$$\begin{aligned} h &= (h_1, h_2, h_3, h_4) \\ &= S^{-1} [(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 6, 2) - PD^{-1}(0, 2, 0, 0)] \\ &= (0, 2, 1, -1)^t \end{aligned}$$

چون متغیر خارج‌شونده، چهارمین متغیر غیرکلیدی در x_B می‌باشد سطر محوری سطر چهارم خواهد بود.

S^{-1}				ستون محوری
۸۴	۳۳	۴۸	-۱۸۳	۰
۱۹	۸	۱۱	$-\frac{۱۲۷}{۳}$	۰
۲۸	۱۱	۱۶	$-\frac{۱۸۴}{۳}$	۱
-۲	-۱	-۱	$\frac{۱۴}{۳}$	-۱

پس از انجام عمل محوری داریم:

$=S^{-1}$ عکس پایه کاری جدید				ستون محوری h می‌شود
۸۴	۳۳	۴۸	-۱۸۳	۰
۱۹	۸	۱۱	$-\frac{۱۲۷}{۳}$	۰
۲۸	۱۱	۱۶	$-\frac{۱۸۴}{۳}$	۱
-۲	-۱	-۱	$\frac{۱۴}{۳}$	۱

ستون محوری پس از انجام عمل محوری حذف می‌گردد.

حالت دوم.

متغیر خارج شونده متغیر کلیدی در مجموعه‌ی ضروری است

در این حالت، مجموعه‌ی S_p که شامل متغیر خارج شونده می‌باشد یک مجموعه‌ی ضروری نسبت به بردار اساسی x_B می‌باشد (چرا S_p مجموعه‌ی ضروری است). متغیر وارد شونده x_k از مجموعه‌ی S_σ می‌باشد، و p ممکن است همان σ باشد یا ممکن است σ نباشد. در این حالت طبق فرض، مجموعه‌ی S_p ، بعضی از متغیرهای غیرکلیدی نسبت به بردار اساسی x_B را دربردارد. به روز نمودن عکس ماتریس پایه کاری در این حالت در دو مرحله صورت می‌پذیرد. در مرحله‌ی اول متغیر کلیدی x_r (متغیر خارج شونده) را که در مجموعه‌ی S_p می‌باشد با متغیر دیگری که در این مجموعه است و غیرکلیدی است عوض می‌کنیم (نسبت به بردار x_B سنجیده می‌شود) پس از مرتب نمودن دوباره، بردار اساسی x_B تبدیل به بردار اساسی x_B می‌گردد. توجه نمائید که مجموعه متغیرهای اساسی در x_B و x_B یکی می‌باشد. اختلاف فقط در ترتیب قرار گرفتن آن‌ها می‌باشد. فرض کنید B پایه متناظر بردار اساسی x_B باشد. مجدداً یادآور می‌شویم که B از B با تعویض ستون کلیدی p ام با یک ستون غیرکلیدی از S_p به دست آمده است، که ستون غیرکلیدی، کلیدی شده است. چون ستون‌های اساسی B و B متفاوت هستند، پایه کاری محاسبه شده از B ؛ ممکن است از پایه کاری به دست آمده از B متفاوت باشد. در مرحله‌ی اول S_0^{-1} از B را محاسبه می‌نمائیم. در مرحله‌ی دوم، x_r را که اکنون متغیر غیرکلیدی است، جایگزین با متغیر وارد شونده می‌نمائیم.

مرحله‌ی اول.

چون x_r ستون کلیدی از S_p می‌باشد، بنابراین p امین ستون B ، ستون متغیر x_r در ۲-۳ می‌باشد فرض کنیم $p + j_1, \dots, p + j_\ell$ تمامی ستون‌های غیرکلیدی S_p در B باشند، به علاوه فرض کنیم که در سطر $m + p$ ام در ستون‌های $p, p + j_1, \dots, p + j_\ell$ به ترتیب اعضا عبارت باشند از $d_1^p, d_2^p, \dots, d_\ell^p$. واضح است که این اعضا، تنها اعضای غیرصفر در سطر $m + p$ ام B است. عضوی از ستون‌های غیرکلیدی مجموعه‌ی S_p ، از B را انتخاب نمائید، که قرار است آن را با ستون کلیدی S_p عوض شود. فرض کنید این ستون $p + j_1$

باشد. در این مرحله ما می‌خواهیم ستون p و j_1 در B را عوض کنیم. ماتریس مقدماتی T_2 ، $m \times m$ را به صورت زیر تعریف نمائید.

$$T_2 = \begin{array}{ccccccc} & & & \text{ستون} & & \text{ستون} & & \text{ستون} \\ & & & j_2 & & j_1 & & j_3 \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \vdots & & -\frac{d_{12}^p}{d_{11}^p} & \dots & -\frac{d_{11}^p}{d_{11}^p} & \dots & -\frac{d_{13}^p}{d_{11}^p} & \dots & \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

ماتریس T_2 همان ماتریس یککانی است (یعنی I_m) جز این‌که در سطر j_1 عبارت است از ستون غیرکلیدی $p + j_1$ در ماتریس پایه B که در حال تعویض شدن با ستون کلیدی p می‌باشد. عضو قطری در سطر j_1 از T_2 ، $-\frac{d_{11}^p}{d_{11}^p}$ می‌باشد. اعضای ستون در سطر j_1 از ماتریس T_2 عبارت هستند از $-\frac{d_{1u}^p}{d_{11}^p}$ ($u = 2, \dots, f$) تمامی اعضای در T_2 در سطر j_1 برابر صفر می‌باشند.

به سادگی می‌توان ثابت کرد (اثبات نمائید) که بین پایه کاری مستخرج از B که آن را S و پایه کاری مستخرج از B_0 که آن را S_0 می‌نامیم رابطه:

$$S_0 = ST_2$$

برقرار است. از این رو، اثر تعویض ستون‌های کلیدی و غیرکلیدی در S_p عبارت خواهد بود از جایگزین نمودن S_0^{-1} به جای S^{-1} که از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$S_0^{-1} = T_2^{-1} S^{-1}$$

(توجه کنید $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$)

چون T_2 ماتریس مقدماتی است به سادگی می توان ثابت کرد (ثابت کنید که عکس ماتریس T_2 بدین صورت به دست می آید که تمامی اعضای سطر j (جز عضو قطر محوری) را به منفی عکس عضو قطری تقسیم نمائیم).

مثال ۳۱-۱۹-۳ فرض کنید $m = 4$ و $p = 5$ و x_B بردار مثال ۳-۱۸-۲۴ می باشد. فرض کنید متغیر x_1 قرار است وارد بردار x_B شود و جایگزین x_1 گردد. متغیر x_1 در مجموعه S_1 ، متغیر کلیدی است و متغیرهای x_6 و x_7 متغیرهای غیرکلیدی در x_B می باشد که از مجموعه S_1 آمده اند. در این حالت ابتدا متغیر x_1 را متغیر غیرکلیدی می نمائیم و x_6 یا x_7 را به عنوان متغیر کلیدی در S_1 معرفی می کنیم. فرض کنید x_7 را به عنوان متغیر کلیدی معرفی می نمائیم (در مجموعه S_1) پس از مرتب نمودن مجدد بردار اساسی x_B به صورت زیر خواهد بود:

$$x_B = (x_7, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_8, x_9)$$

که متناظر پایه B می باشد و بدین صورت به دست آمد که ستون های اول و هفتم را عوض نمودیم. عکس S^{-1} ، یعنی عکس پایه کاری با انتخاب اصلی از متغیرهای کلیدی در x_B که در مثال ۳-۱۸-۲۴ صورت گرفته بود به دست آورده شد. ماتریس مقدماتی T_2 به صورتی که در بالا تعریف شد، برای تعویض x_1 با x_7 ذیلاً داده شده است. عکس S پایه کاری متناظر B نیز آورده شده است:

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_0^{-1} = T_2^{-1} S^{-1} = \begin{bmatrix} 84 & 33 & 48 & -183 \\ -\frac{54}{3} & -7 & -10 & 39 \\ 26 & 10 & 15 & -\frac{170}{3} \\ 2 & 1 & 1 & -\frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

و بدین صورت مرحله‌ی اول در این عمل محوری تکمیل می‌گردد.

مرحله‌ی دوم.

متغیر خارج‌شونده متغیر اساسی در مجموعه‌ی ضروری است

طبق قضیه‌ی قبل هر بردار اساسی ۳-۲۲ بایستی حداقل یک متغیر از هر یک از مجموعه‌های s_t ($1 \leq t \leq p$) بایستی داشته باشد. چون متغیر خارج‌شونده x_r تنها متغیر اساسی از s_p می‌باشد (در بردار اساسی x_B) متغیر واردشونده x_k نیز بایستی از s_p باشد، چه در غیراین صورت با جایگزین نمودن x_r با x_k ، x_B بردار اساسی ۳-۲۲ نخواهد بود (چرا؟) از این رو S^{-1} یعنی عکس پایه کاری بدون تغییر باقی می‌ماند.

پس از این‌که بردار اساسی، جواب اساسی، عکس ماتریس پایه کاری به‌روز گردیدند، عملیات تا خاتمه الگاریتم صورت می‌پذیرد.

۳-۲۰ برتری GUB نسبت به روش سیمپلکس اصلاح شده

بیشترین کوشش در مراحل الگاریتم سیمپلکس، به‌روز نمودن عکس پایه کاری می‌باشد. برای حل مسأله ۳-۲۲ با سیمپلکس اصلاح شده معمولی، مجبوریم که پایه کاری از مرتبه‌ی $m + p$ داشته باشیم. GUB ما را قادر می‌سازد که با یک پایه کاری از مرتبه‌ی m سروکار داشته باشیم. از این رو حل مسأله ۳-۲۲ با GUB از نظر محاسبات بسیار کاراتر است.

روش‌هایی که در LPها از ساختار حاصل آن‌ها در جهت تقلیل محاسبات و کارا نمودن عملیات، استفاده می‌نماید و با نگره داشتن عکس پایه کاری کوچک، راندمان کار را بالا می‌برد روش‌های فشرده معکوس^۱ نام دارد. GUB یکی از این روش‌ها می‌باشد. زمینه‌ای که روش‌ها در حل مسائل برنامه‌ریزی خطی مربوطه از ساختار حاصل مسأله استفاده می‌نمایند. (ساختار حاصل مربوط به ساختار ماتریس ضرایب یا ماتریس تکنولوژی می‌باشد). تحت عنوان برنامه‌ریزی خطی ساختاری^۲ نامیده می‌شوند. جهت مطالعه بیشتر در این زمینه به منابع (۱) مراجعه شود.

1) Compact Inverse Method 2) Structured Linear Programming

۳-۲۰-۳ خلاصه فصل سوم. در این فصل ابتدا روش سیمپلکس اصلاح شده

بیان گردید که خلاصه آن به شرح ذیل است

قدم اولیه. یک جواب اساسی شدنی به دست آورید و فرض کنید B متناظر آن و B^{-1}

در دست باشد. w را از رابطه:

$$w = c_B B^{-1}$$

محاسبه نمائید و قرار دهید $\bar{b} = B^{-1}b$ و جدول سیمپلکس اصلاح شده زیر را تشکیل دهید.

w	$c_B \bar{b}$
B^{-1}	\bar{b}

قدم اصلی. برای تمامی متغیرهای غیراساسی محاسبه کنید.

$$z_j - c_j = w a_j - c_j \quad (j \in N_B)$$

$$z_k - c_k = \text{Max}_{j \in N_B} \{z_j - c_j\}$$

اگر $z_k - c_k \leq 0$ متوقف شوید، جواب متناظر جدول بهینه می باشد در غیر این صورت:

$$\bar{a}_k = B^{-1} a_k$$

اگر $\bar{a} \leq 0$ در این صورت مسأله بهینه نامتناهی دارد. اگر $\bar{a}_k \not\leq 0$ ستون $\begin{pmatrix} z_k - c_k \\ \bar{a}_k \end{pmatrix}$ در سمت راست جدول مذکور قرار دهید که منجر به وجود آمدن جدول زیر می گردد.

w	$c_B \bar{b}$
B^{-1}	\bar{b}

$z_k - c_k$
\bar{a}_k

از رابطه ی ذیل اندیس متغیر و در نتیجه متغیر خارج شونده را مشخص نمائید.

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\}$$

با انجام عملیات محوری این جدول را به روز نمائید و ستون اضافه شده x_k را کاملاً حذف نمائید و عملیات را تکرار کنید.

توجه شود که کدهای کامپیوتری عکس ماتریس را به صورت حاصل ضرب بردارهای حاصل محاسبه می‌نماید. (متن فصل ملاحظه گردد)

سیمپلکس اصلاح شده توسط پروفسور جرج دانتزیگ و یکی از شاگردان وی به نام wolf ابداع شد.

روش دیگری از واریانت‌های سیمپلکس که سیمپلکس دوآل نامیده می‌شود، توسط Lemke ابداع شد (۱۹۵۴). این روش کاربردهای بسیار زیادی دارد، که یک نمونه از آن در برش صفحه در برنامه‌ریزی کسری می‌باشد و خلاصه این روش به شرح ذیل است.

خلاصه روش سیمپلکس دوآل. قدم اولیه، یک پایه مانند B بیابید که با $z_j - c_j \leq 0$ هر j یعنی پایه دوآل شدنی باشد (روش پیدا نمودن چنین پایه‌ای در این فصل با دقت گفته شد). قدم اصلی.

(۱) اگر $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$ متوقف شوید، جواب متناظر جدول جواب بهینه است. در غیراین صورت سطری مانند r انتخاب نمائید که $\bar{b}_r < 0$ روش انتخاب معمولاً به صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{b}_r = \text{Min}\{\bar{b}_i : \bar{b}_i < 0\}$$

(۲) اگر $\bar{a}_{rj} \geq 0$ (بازاء هر j) متوقف شوید. در این حالت دوآل نامحدود و پرایمال نشدنی است. در غیر این صورت ستون k را به عنوان ستون محوری طبق فرمول زیر انتخاب نمائید:

$$\frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{rk}} = \text{Min} \left\{ \frac{z_j - c_j}{\bar{a}_{rj}} \mid \bar{a}_{rj} < 0 \right\}$$

(۳) با ملحوظ داشتن عضو محوری \bar{a}_{rk} ، عملیات محوری را انجام دهید و به (۱) در قدم اصلی برگردید.

الگاریتم دیگری که در این فصل بیان گردید، الگاریتم پرایمال-دوآل بود. این الگاریتم به وسیله‌ی دانتزیگ و فورد^۱ و فولکرسون^۲ ابداع شد (۱۹۵۶). الگاریتم پرایمال - دوآل با کار کوهن که در سال ۱۹۵۵ در رابطه با مسأله‌ی تخصیص صورت گرفته بود پروانده و تکمیل شد. این روش هم از نظر تئوری و هم از نظر کاربردی بسیار ارزنده است. خلاصه این روش ذیلاً آورده می‌شود.

۳-۲۰-۳ خلاصه الگاریتم پرایمال - دوآل.

قدم اولیه.

بردار w را چنان انتخاب کنید که بازاء هر j :

$$wa_j - c_j \leq 0$$

قدم اصلی.

(۱) فرض کنید

$$Q = \{j \mid wa_j - c_j = 0\}$$

مسأله‌ی زیر را که معروف به مسأله‌ی پرایمال محدود^۳ شده است را حل نمائید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j \in Q} 0x_j + 1x_a \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j \in Q} a_j x_j + 1x_a = b \\ & x_j \geq 0 \quad j \in Q \\ & x_a \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید x^0 مقدار بهینه‌ی تابع مقصود باشد.

1) Ford 2) Fulkerson 3) Restricted Primal

اگر $x^0 = 0$ ، در این صورت جواب حاصل از حل مسأله‌ی فوق در شرایط K.K.T صدق می‌کند؛ در نتیجه جواب بهینه می‌باشد (یعنی جواب بهینه‌ی مسأله‌ی محدود شده، جواب بهینه‌ی مسأله‌ی اصلی می‌باشد).

اگر $x^0 > 0$ فرض کنیم v^* جواب بهینه‌ی دوآل مسأله محدود شده پرابمال فوق‌الذکر باشد.

(۲) اگر $v^* a_j \leq 0$ (بازاء هر j) متوقف شوید. در این صورت دوآل نامحدود است و پرابمال نشدنی می‌باشد. در غیراین صورت قرار دهید:

$$\theta = \text{Min}_j \left\{ \frac{-(wa_j - c_j)}{v^* a_j} \mid v^* a_j > 0 \right\}$$

و جایگزین کنید w را با $w + \theta v^*$. برگردید به قدم اول.

۲۱-۳ تمرینات فصل سوم

(۱) مسأله‌ی زیر را با روش سیمپلکس اصلاح شده حل نمائید.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= -2x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s. t. } x_1 - 2x_2 + x_3 &\geq -4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(۲) مسأله‌ی زیر را با روش سیمپلکس اصلاح شده حل نمائید.

$$\begin{aligned} \text{Min } x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 5x_5 \\ \text{s. t. } x_1 - \frac{1}{4}x_2 + 2x_3 - \frac{1}{4}x_4 &= 5 \\ -\frac{1}{4}x_2 + 3x_3 - \frac{1}{4}x_4 + x_5 &= 5 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

(۳) در سیمپلکس اصلاح شده با صورت حاصل ضربی عکس ماتریس، تعداد ماتریس‌های مقدماتی در هر مرحله از تکرار یک واحد اضافه می‌گردد. اگر تعداد ماتریس‌های مقدماتی

زیاد شود، ضرورت دارد که عکس ماتریس به خاطر جلوگیری از جمع شدن خطا، دوباره محاسبه گردد. فرض کنید B پایه‌ای در مرحله‌ای از الگوریتم سیمپلکس باشد، نشان دهید که B را می‌توان به صورت حاصل ضرب m ماتریس مقدماتی نشان داد. مطلب را با یک مثال توضیح دهید.

(۴) مسأله‌ی زیر را با روش سیمپلکس اصلاح شده که عکس ماتریس به صورت حاصل ضرب ماتریس‌های مقدماتی باشد حل نمائید (یعنی B^{-1} به صورت حاصل ضربی داشته باشد).

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\ 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &\leq 7 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 &\leq 3 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &\leq 8 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

مسأله‌ی فوق را مجدداً حل کنید و در آن فاکتوریزیشن LU^۱ برای پایه استفاده نمائید.

(۵) فرض کنید $C = (c_1, \dots, c_n) \in R^n$ مسأله‌ی زیر با یک روش کارا حل کنید.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z(x) &= \text{Max}\{c_j \mid x_j > 0\} \\ \text{s. t. } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

1) LU-Factorization of the basic

(۶) با به‌کاربردن الگوریتم سیمپلکس متغیرهای کران‌دار مسائل زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ & -x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & 0 \leq x_2 \leq 6 \\ & 0 \leq x_3 \leq 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \\ \text{s. t.} & 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 8 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \end{array}$$

$$0 \leq x_1 \leq 3$$

$$1 \leq x_2 \leq 4$$

$$0 \leq x_3 \leq 10$$

$$2 \leq x_4 \leq 5$$

(۷) چگونه می‌توان، الگوریتم سیمپلکس اصلاح شده را برای متغیرهای کران‌دار در LP

به کار برد؟ مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی کران‌دار زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= x_1 - x_2 \\ \text{s. t. } & -x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 1 \\ & -2 \leq x_1 \leq 1 \\ & x_2 \leq 2 \end{aligned}$$

الف. ناحیه‌ی شدنی را در صفحه (x_1, x_2) رسم کنید. جواب بهینه را به دست آورید.

آیا این جواب تبه‌گن است؟ چرا هست یا چرا نیست؟

ب. برای نقطه‌ی راسی $(x_1, x_2) = (1, 1)$ پایه‌ی کاری B را مشخص نمایید، جدول سیمپلکس مربوطه را تشکیل دهید، B^{-1} و cB^{-1} را نیز در جدول مشخص کنید، مقادیر متغیرهای اساسی را به دست آورید و کار را تا به دست آوردن جواب بهینه از روی جدول ادامه دهید.

ج. مقادیر سمت راست دو قید را به b_1 و b_2 نشان دهید. چه شرایطی بایستی b_1 و b_2 داشته باشند تا جواب بهینه، بهینه باقی بماند.

(۸) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min } & cx \\ \text{s. t. } & Ax = b \\ & l \leq x \leq u \end{aligned}$$

(l متناهی است) نشان دهید مجموعه‌ی نقاط راسی ناحیه‌ی شدنی (با فرض خالی نبودن آن) مساوی مجموعه‌ی BFS‌های مسأله است.

(۹) برای برنامه‌ریزی خطی متغیرهای کران‌دار، چه رابطه‌ای بین افراز اساسی شدنی (Basic Feasible Partition) (B, N_1, N_2) و نقاط راسی وجود دارد؟ چه رابطه‌ای بین

جواب اساسی مجاور و نقاط رأسی مجاور موجود است؟ (هم برای حالت تبه‌گنی و هم غیرتبه‌گنی مطلب بیان شود).

(۱۰) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & 0 \leq x \leq u \end{aligned}$$

نشان دهید تعریفی که در رابطه با متغیرهای کران‌دار در متن فصل برای نقطه رأسی داشتیم با تعریف نقطه‌ی رأسی دستگاه:

$$\begin{aligned} x + x_s &= u \\ x \geq 0, x_s &\geq 0 \end{aligned}$$

معادل می‌باشد.

(۱۱) نشان دهید در جزئیات که الگوریتم سیمپلکس برای متغیرهای کران‌دار، یک الگوریتم متقارب (در حالت غیرتبه‌گنی) می‌باشد. با جزئیات نشان دهید که مسأله در حالت تبه‌گنی با به‌کاربردن روش لکزیکو برای متغیرهای کران‌دار افزایش اساسی شدنی قوی را حفظ می‌کند.

(۱۲) قاعده‌ی بلند (Bland) را برای LP با متغیرهای کران‌دار، چگونه می‌توان به‌کاربرد. مطلب را با جزئیات توضیح دهید.

۱۳) روش بلند و لکزیکو را جهت جلوگیری از به دور افتادن برای مسأله زیر بیان نمائید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -2x_1 + 3x_2 \leq 0 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 3 \end{aligned}$$

۱۴) الف. مسأله زیر را (مسأله کوله‌پشتی) حل کنید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 + x_5 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 2x_4 + 7x_5 \leq 100 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

ب. یک فرم کلی برای حل مسأله‌ی زیر پیشنهاد نمائید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ & a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن c_j ها و a_j ها اعداد مثبتی می‌باشند.

ج. صورت جواب بهینه مسأله‌ی فوق اگر a_j ها و c_j ها هر عدد حقیقی باشند چیست؟

د. مسأله را برای حالت ب و ج در حالتی که متغیرها کران‌دار باشد حل نمائید.

۱۵) فرض کنید $Q = \{1, 2, \dots, n\}$ و $P_i \subset Q$ که

$$\begin{aligned} i \neq j \quad & (i = 1, \dots, r) \quad P_i \cap P_j = \phi \\ & (j = 1, \dots, r) \end{aligned}$$

و

$$\bigcup_{i=1}^r P_i = Q$$

یک روش کارا برای حل مسأله‌ی زیر، که در آن $c_j \leq 0$ (بازاء هر j) به دست آورید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{j \in Q} c_j x_j \\ \text{s. t.} \quad & b'_i \leq \sum_{j \in Q} x_j \leq b''_i \\ & b'_i \leq \sum_{j \in P_i} x_j \leq b''_i \quad i = 1, \dots, r \\ & 0 \leq x_j \leq u_j \quad j \in Q \end{aligned}$$

روش به دست آمده را در رابطه با مسأله‌ی زیر به کار ببرید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 10x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 8x_5 \\ \text{s. t.} \quad & 30 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 100 \\ & 2 \leq x_1 + x_2 \leq 50 \\ & 70 \leq x_3 + x_4 + x_5 \leq 80 \\ & 0 \leq x_1, x_4, x_5 \leq 30 \\ & 0 \leq x_2, x_3 \leq 25 \end{aligned}$$

۱۶) مسأله‌ی زیر را با روش سیمپلکس متغیرهای کران دار حل نمائید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 2x_1 + 6x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ & 3x_1 + 8x_2 - 3x_3 + x_4 = 7 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & 1 \leq x_2 \leq 4 \\ & 0 \leq x_3 \leq 8 \\ & 1 \leq x_4 \leq 2 \\ & 0 \leq x_5 \leq 20 \end{aligned}$$

۱۷) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -12 \\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 \leq -6 \\ & 2x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -24 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید x_a یک متغیر تصنعی با بردار فعالیت $b < \hat{b}$ باشد. با معرفی قید $0 \leq x_a \leq 1$ و با قرار دادن $x_a = 1$ یک جواب اساسی شدنی (شروع‌کننده) برای دستگاه جدید به دست می‌آید. با به‌کاربردن روش سیمپلکس متغیرهای کران دار یک جواب اساسی شدنی برای مسأله‌ی اصلی بیابید.

۱۸) مسائل زیر را با روش سیمپلکس متغیرهای کران دار حل نمائید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 6x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ & x_1 \geq 2 \quad x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & ۶x_۱ + ۴x_۲ + ۲x_۳ \\
 \text{s. t.} \quad & ۴x_۱ - ۳x_۲ + ۴x_۳ \leq ۸ \\
 & ۳x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳ \leq ۱۰ \\
 & ۰ \leq x_۱ \leq ۳ \\
 & ۰ \leq x_۲ \leq ۲ \\
 & ۰ \leq x_۳
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & ۶x_۱ + ۴x_۲ \\
 \text{s. t.} \quad & x_۱ + ۲x_۲ \leq ۴ \\
 & ۲x_۱ + ۲x_۲ \leq ۵ \\
 & ۰ \leq x_۱ \leq ۳ \\
 & ۰ \leq x_۲ \leq ۴
 \end{aligned}$$

(۱۹) نشان دهید که دو مسأله‌ی زیر معادل هستند.

$$\begin{aligned}
 P_۱: \quad & \text{Min} \quad cx & P_۲: \quad & \text{Min} \quad cx \\
 \text{s. t.} \quad & b_۱ \leq Ax \leq b_۲ & \text{s. t.} \quad & Ax + s = b_۲ \\
 & x \geq ۰ & & x \geq ۰ \\
 & & & ۰ \leq s \leq b_۲ - b_۱
 \end{aligned}$$

با به‌کاربردن این مطلب مسأله‌ی زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & ۳x_۱ - ۴x_۲ \\
 \text{s. t.} \quad & ۳ \leq x_۱ + x_۲ \leq ۵ \\
 & -۱۵ \leq ۲x_۱ - ۵x_۲ \leq ۲ \\
 & x_۱, x_۲ \geq ۰
 \end{aligned}$$

۲۰) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید B پایه‌ای باشد. پس از افزودن قیود زاید $x_N - x_N = 0$ معادلات زیر نمایش تمامی متغیرهای برحسب متغیرهای مستقل x_N خواهد بود.

z	$c_B B^{-1} N - c_N$	$c_B \bar{b}$
x_B	$B^{-1} N$	\bar{b}
x_N	$-I$	0

روش سیمپلکس با انتخاب مثبت‌ترین $z_j - c_j$ مثلاً $z_k - c_k$ پیش می‌رود. با وارد شدن x_k به پایه و با به‌کاربردن قاعده‌ی می‌نیم، فرض کنیم x_{B_r} پایه را ترک می‌کند. آرایه‌های فوق‌الذکر را با انجام عمل محور ستونی با عضو محوری \bar{a}_{rk} به صورت زیر به روز می‌نمائیم.

- ۱- ستون k را به $-\bar{a}_{rk}$ تقسیم می‌کنیم (ستون محوری را).
- ۲- ستون k را در عدد \bar{a}_{rk} ضرب و به ستون r بیفزائید.
- ۳- ستون k را در \bar{b}_r ضرب و به سمت راست اضافه کنید.
- ۴- متغیر x_k را از لیست متغیرهای غیراساسی خارج و x_{B_r} را به لیست متغیرهای اساسی اضافه نمائید (به جای متغیر اساسی x_{B_r}).

توجه کنید که هیچ طرح سطری عوض نمی‌شود.

این روش از نمایش جدول و به روز نمودن آن، به روش سیمپلکس ستونی^۱ معروف است. نشان دهید عمل محوری نمایش تمامی متغیرها را برحسب متغیرهای غیراساسی به دست می‌دهد. به خصوص ثابت کنید که عمل محوری فوق‌الذکر $c_B B^{-1} N - c_N$ و $B^{-1} N$ و $B^{-1} b$ و $c_B B^{-1} b$ را به روز می‌نماید.

1) Column Simplex Method

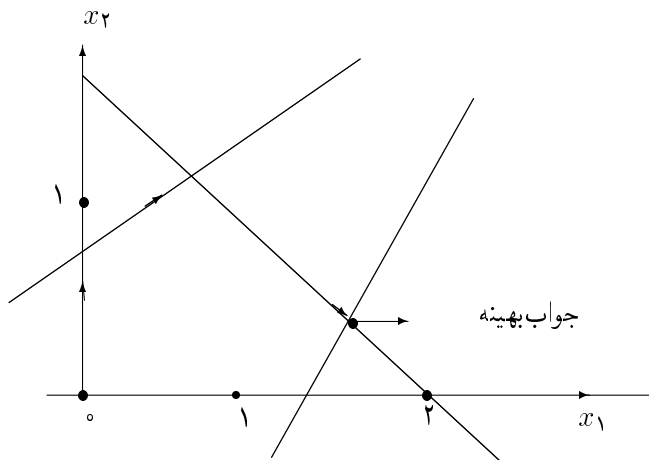
(۲۱) با در نظر گرفتن مطالب مطرح شده در مسأله قبل مسأله‌ی زیر را با روش سیمپلکس ستونی حل نمائید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(۲۲) با توجه به مطالب مطرح شده در مسأله‌ی ۲۰ آیا ممکن است عکس ماتریس پایه را از جدول سیمپلکس ستونی به دست آورد؟ اگر چنین است، چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟

(۲۳) دولت می‌خواهد ۱/۵ میلیارد دلار برای مقاصد نظامی خرج نماید. شصت درصد از بودجه جهت خرید تانک، هواپیما و موشک صرف خواهد شد، که قیمت آن‌ها به ترتیب ششصد هزار دلار، ۲ میلیون دلار و هشتصد هزار دلار می‌باشد. تصمیم گرفته شده که حداقل ۲۰۰ تانک و ۲۰۰ هواپیما خریداری گردد. به خاطر نبود خلبان ماهر نمی‌توان بیش از ۳۰۰ هواپیما خریداری نمود. از نظر استراتژی نسبت موشک به هواپیما بایستی در بازه $[\frac{1}{3}, \frac{1}{4}]$ باشد. دولت می‌خواهد توانائی نظامی خود را با خرید این تسلیحات ماکزیمم نماید. با توجه به این‌که بهره‌وری آن‌ها به ترتیب ۱ و ۳ و ۲ است. جواب بهینه را بیابید.

(۲۴) ذیلاً یک ایده گرافیکی از روش سیمپلکس در حمل به تصویر کشیده شده است.



الف. پایه و پایه‌های بعدی تا نقطه‌ی بهینه مشخص نمایند. متغیر واردشونده و خارج شونده را در هر مرحله تعیین کنید.

ب. اگر جواب بهینه منحصر به فرد باشد، آیا روش سیمپلکس در مراحل طی شده مثبت‌ترین $z_j - c_j$ را انتخاب نموده است؟

(۲۵) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید x یک جواب اساسی شدنی متناظر پایه B باشد. روش سیمپلکس با افزایش متغیر غیراساسی که بیشترین $z_j - c_j$ را دارد پیش می‌رود.

الف. روشی ارائه نمائید که در آن روش تمامی متغیرهای غیراساسی که $z_j - c_j$ آن‌ها مثبت است افزایش داده شوند. چگونه متغیرهای اساسی در این صورت تعدیل می‌گردند؟ چقدر می‌توان متغیرهای غیراساسی را افزایش داد؟ تفسیر افزایش همزمان متغیرهای غیراساسی چیست؟

ب. در تکراری، ممکن است، بیش از m متغیر مثبت موجود باشد، چگونه می‌توانید

نقطه متناظر را در جدول نشان دهید؟

ج. در تکراری ممکن است متغیر غیراساسی x_j مقدار مثبت و $z_j - c_j$ منفی داشته باشد. چه اتفاقی می‌افتد اگر متغیر غیراساسی را کاهش دهید؟

د. با به‌کار بردن مطالبی که در بندهای (الف) تا (ج) مطرح گردید الگوریتم کاملی برای حل مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی که در آن چندین متغیر غیراساسی همزمان تعدیل می‌گردند، طراحی نمائید. چگونه می‌توانید بگوئید که به جواب بهینه رسیده‌اید؟ امتیاز یا عدم امتیاز این روش چه می‌باشد. مطلب را با حل مسأله‌ی زیر توضیح دهید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

ه. روش ذیل را برای تعدیل متغیرهای غیراساسی در نظر بگیرید. برای هر متغیر غیراساسی x_j فرض کنید:

$$d_j = \begin{cases} z_j - c_j & \text{اگر } x_j > 0 \\ \text{Max}\{0, z_j - c_j\} & \text{اگر } x_j = 0 \end{cases}$$

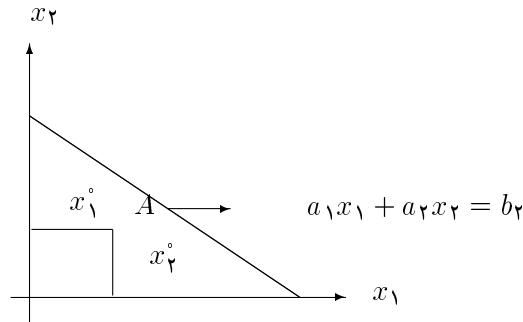
متغیرهای غیراساسی را بر طبق d های فوق و اساسی‌ها را طبق رابطه:

$$x_B = \hat{b} - \lambda \sum_{j \in R} \bar{a}_{ij} d_j$$

تعدیل نمائید، که در آن بردار مقادیر متغیرهای اساسی و $\lambda \geq 0$ بایستی مشخص گردد. این روش را تفسیر نموده و آن را با روش قسمت (د) مقایسه نمائید. مسأله‌ی (*) را با این روش نیز حل نمائید.

(۲۶) نمودار ذیل نمایش ناحیه‌ای است که به وسیله‌ی قید $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ و $x_1, x_2 \geq 0$

مشخص گردیده است. فرض کنید $A(x_1^0, x_2^0)$ نقطه‌ای باشد که در شکل نشان داده شده است.



در این نقطه (نقطه A) مقدار متغیر کمکی را مشخص نمایید. چگونه می‌توان مسأله را برای حالتی با n متغیر تعمیم داد؟

۲۷) کشاورزی دارای مرغداری است که او در رابطه با تهیه خوراک آن‌ها علاقمند است از کیفیت بر خوردار باشد که در جدول زیر اطلاعات مربوط به آن‌ها آمده است.

اجراء خوراک				
	ذرت	پودر ماهی	آلفا آلفا	حداقل مورد نیاز
پروتئین	۸	۴	۴	۱۰
کربوهیدرات	۴	۲	۴	۶
ویتامین	۲	۳	۴	۵
قیمت	\$۰٫۱	\$۰٫۰۶	\$۰٫۰۴	

مخلوط بهینه را با به‌کار بردن سیمپلکس اصلاح شده با صورت حاصل ضربی عکس ماتریس مشخص نمایید. فقط یک متغیر تصنعی به‌کار برید.

۲۸) یک کارخانه اتومبیل‌سازی قرارداد بسته است که ۴۰۰ دستگاه اتومبیل از مدل A و ۵۰۰ دستگاه اتومبیل از مدل B را به خارج از کشور صادر نماید. اتومبیل مدل A ۱۲ مترمکعب و اتومبیل مدل B ، ۱۵ مترمکعب جا اشغال می‌نماید. سه کشتی برای حمل اتومبیل‌ها به خارج از کشور در اختیار می‌باشند. این کشتی‌ها در ابتدای ژانویه، اواسط

فوریه و اواخر ماه مارس وارد بندر می‌شوند. کشتی اول فقط اتومبیل از نوع مدل A را حمل می‌کند و هزینه حمل هر اتومبیل $\$450$ می‌باشد. کشتی دومی و سومی هر دو نوع مدل را حمل می‌کنند که هزینه حمل آن‌ها برای هر مترمکعب جای (فضا) اشغال شده به ترتیب $\$35$ و $\$40$ می‌باشد کشتی اول فقط می‌تواند 200 اتومبیل حمل نماید و فضای کشتی دوم و سوم برای حمل بار به ترتیب 4500 و 6000 مترمکعب می‌باشد. اگر سازنده در قرارداد طی نموده باشد که حداقل 250 اتومبیل از نوع مدل A و 200 اتومبیل از نوع مدل B برای اواسط فوریه و بقیه را در اواخر مارس تحویل دهد، طرح تحویل اتومبیل بایستی چگونه باشد؛ که هزینه کلی می‌نیمم گردد. با به‌کار بردن روش سیمپلکس اصلاح شده، جواب بهینه مسأله را به دست آورید.

(۲۹) یک کمپانی مایل است برنامه تولید محصول خود را برای ماه‌های آگست، سپتامبر، اکتبر و نوامبر مشخص نماید. محصول تولید شده فصلی می‌باشند و تقاضا برای این محصول برای ماه‌های مذکور به ترتیب عبارت است از 500 ، 600 ، 800 ، 1200 واحد. ظرفیت فعلی کارخانه ماهیانه 600 واحد به قیمت هر واحد 25 دلار می‌باشد. مدیریت تصمیم گرفته است که یک دستگاه جدیدی جهت تولید محصول با ظرفیت ماهیانه 1100 واحد و با هزینه تولید 30 دلار برای هر واحد نصب نماید. به‌هرحال دستگاه جدید تا اواسط نوامبر قابل نصب نمی‌باشد. فرض کنیم که شروع تولید با 250 واحد موجودی باشد و ظرفیت ذخیره‌سازی 400 واحد در ماه. اگر هزینه ذخیره‌سازی (نگهداری کالا) 3 دلار برای هر واحد باشد، خط‌مشی بهینه تولید را به‌صورتی مشخص نمایید که هزینه کلی تولید برای تحویل تقاضا می‌نیمم گردد. با فرض این‌که در انتهای کار 100 واحد کالا در انبار موجود باشد. با به‌کار بردن سیمپلکس اصلاح شده برای متغیرهای کران‌دار مسأله را حل نمایید. جزئیات حل را در هر مرحله توضیح دهید.

مراجع

- [1] G.B.Dantizing, "Computational Algorithm of the Revised Simplex Method," RM-1266, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1953.
- [2] G.E.Forsythe and C. B. Moler, Computer Solutions of Linear Algebraic Systems, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967.
- [3] A. M. Frieze, "Bottleneck Linear Programming," Operational Research Quarterly 26, 4, ii (1975), 871-874.
- [4] W. Orchard-Hays, "Background, Development and Extensions of the Revised Simplex Method," RM-1433, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif. 1954.
- [5] G. M. Roodman, "Post-Infeasibility Analysis in Linear Programming," Management Science 25, 9 (September 1979), 916-922.
- [6] D. M. Smith and W. Orchard-Hays, "Computational Efficiency in Product Form LP Codes," in Recent Advances in Mathematical Programming, R. L. Graves and P. Wolfe (Ed.), McGraw-Hill, New York, 1963.
- [7] H. M. Wagner, "A Comparison of the Original and Revised Simplex Methods," Operations Research 5 (1957), 361-369.
- [8] D. Gale The Theory of Linear Economic Models, McGraw-Hill, New York, 1960. D. K. Faddeev and V. N. Faddeeva, Computational Methods of Linear Algebra, Freeman San Francisco, Calif. 1963.

-
- [9] P. R. Halmos, *Finite Dimensional Vector Spaces*, D. Van Nostrand, New York, 1969
- [10] C. R. Bector, "Programming Problems with Convex Fractional Function," *Operations Research* 16, 1968, pp. 383-391.
- [11] A. Charnes and W. W. Cooper, "Nonlinear Power of Adjacent Extreme Point Methods in Linear Programming," *Econometrica* 25, 1956, pp. 132-153.
- [12] A. Charnes and W. W. Cooper, "Programming with Linear Fractional Functionals," *Naval Research Logistics Quarterly* 9, 1962, pp. 181-186.
- [13] J. B. J. Fourier, *Memoires de L'Academie Royale des Sciences de l'Institute de France* 7, 1824, pp. XVII-IV; also, *Second Extrait in G. Darboux (Ed.) Oeuvres de Fourier* 2, 1890, pp. 324-328.
- [14] A. J. Goldman, "Resolution and Separation Theorems for Polyhedral Convex Sets" in *Linear Inequalities and Related Systems*, H. W. Kuhn and A. W. Tucker (Eds.), Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
- [15] I. Grattan-Guinness, "Joseph Fourier's Anticipation of Linear Programming," *Operational Research Quarterly* 21, 3, 1970, pp. 361-364. B. Grunbaum, *Convex Polytopes*, Wiley, New York, 1967.
- [16] D. A. Kohler, "Translation of a Report by Fourier on His Work on Linear Inequalities," *OPSEARCH* 10, 1973, pp. 38-42, M.

-
- Manas and J. Nedoma, "Finding all Vertices of a Convex Polyhedron," *Numerische Mathematic* 12. 1968, pp. 226-229.
- [17] T. H. Matheiss and D. S. Rubin, "A Survey and Comparison of Methods for Finding all Vertices of Convex Polyhedral Sets," *Mathematics of Operations Research* 5, 2 May 1980, 167-185.
- [18] P. G. McKeown, "A Vertex Ranking Procedure for Solving the Linear Fixed Charge Problem," *Operations Research* 23, 6, 1975, pp. 1183-1191.
- [19] C. B. Millham, "Fast Feasibility Methods for Linear Programming," *OPSEARCH* 13, 3-4, 1976, pp, 198-204.
- [20] K. G. Murty, "Solving the Fixed Charge Problem by Ranking the Extreme Points," *Operations Research* 16, 1968, pp. 268-279.
- [21] K. G. Murty, "Adjacency on Convex Polyhedra, " *SIAM Review* 13, 3 (July 1971), 377-386.
- [22] H. Raiffa, G. I. Thompson, and R. M. Thrall, "The Double Description Method," in H. W. Kuhn and A. W. Tucker (Eds.), *Contributions to the Theory of Games II*, *Annals of Mathematics study No. 28*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1953.
- [23] D. S. Rubin, "Neighboring Vertices on convex Polyhedral Sets," *Graduate School of Busi*

-
- [24] B. Noble and J. W. Daniel, Applied Linear Algebra, 2nd Ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1977.
- [25] D. I. Steinberg, Computational Matrix Algebra, McGraw-Hill, New York, 1974.
- [26] R. M. Thrall and L. Tornheim, Vector Spaces and Matrices, Wiley, New York, 1957. R. S. Varga, Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.
- [27] I. Adler, "Equivalent Linear programs," Dept of IE & OR, University of California, Berkeley, 1976.
- [28] M. L. Balinski, "An Algorithm for Finding all Vertices of Convex Polyhedral Sets," SIAM Journal on Applied Mathematics IX, 1961, pp. 72-88.
- [29] C. A. Burdet, "Generating all the Faces of a Polyhedron," SIAM Journal on Applied Mathematics XXVI, 1974, pp. 479-489.
- [30] N. V. Chernikova, "Algorithm for Finding a General Formula for the Nonnegative Solutions of a System of Linear Equations," U. S. S. R. Computational Mathematics and Mathematical Physics IV, No. 4, 1964, pp. 151-158.
- [31] N. V. Chernikova, "Algorithm for Finding a General Formula for the Nonnegative Solutions of a System of Linear Inequalities," U. S. S. R. Computational Mathematics and Mathematical Physics V, no. 2, 1965, pp. 228-233.

-
- [32] G. B. Dantzig and B. C. Eaves, "Fourier-Motzkin Elimination and its Dual," *Journal of Combinatorial Theory, Series A* XIV 1973, pp. 228-237.
- [33] R. J. Duffin, "On Fourier's Analysis of linear Inequality Systems," *Mathematical Programming Study* 1, Elsevier, New York, 1974. M. E. Dyer and L. G. Proll, "An Algorithm for Determining all Extreme Points of a Convex Polytopes," *Mathematical Programming* 12, 1977, pp. 81-96.
- [34] U. Eckhardt, "Theorems on the Dimension of Convex Sets," *Linear Algebra and Its Applications* 12, 1975, pp. 63-76.

فصل چهارم

تحلیل حساسیت در برنامه ریزی

خطی^۱

۱-۴ مقدمه

فرض کنید یک مسأله‌ی عملی را به صورت زیر فرموله نموده باشیم

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z(x) = cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{۱-۴}$$

که در آن A یک ماتریس $m \times n$ با رتبه‌ی m باشد. مسأله را با الگوریتم سیمپلکس حل می‌نمائیم و جواب بهینه شدنی برای مسأله به دست می‌آوریم. در مسائل حقیقی زندگی ضرایب A ، b و c با مشاهدات عملی تقریب زده می‌شوند. پس از این که جواب بهینه نهائی به دست آمد، ممکن است معلوم گردد که اعضای A ، b و c بایستی عوض شوند و یا این که قید اضافی

1) Sensitive Analysis in Liner Programming

به مسأله افزوده گردد، یا متغیر جدیدی به مسأله معرفی شود. حل مسأله از ابتدای کار، باعث تلف شدن وقت می‌گردد و کار از راندمان خوبی برخوردار نخواهد بود. تحلیل حساسیت (تحلیل پس از بهینگی نیز نامیده می‌شود) در جهت به دست آوردن جواب بهینه شدنی برای مدل تعدیل یافته (مدل تعدیل یافته مدلی است که در آن بعضی از اعضای A ، b و c تغییر می‌کند یا قیدی به مسأله افزوده می‌گردد یا متغیر جدیدی در مسأله ظاهر می‌شود) به کار گرفته می‌شود. کار بدین صورت انجام می‌گیرد که از جواب بهینه مسأله قدیمی شروع می‌نمائیم و با انجام عملیاتی به جواب بهینه مسأله‌ی تعدیل یافته (در صورت وجود می‌رسیم). مسأله را بدین صورت در نظر می‌گیریم که هر دفعه یک تغییر در آن داده باشیم. مثلاً یکی از c ها تغییر می‌کند یا یک قید به مسأله افزوده می‌گردد. اگر قرار باشد چندین تغییر در مسأله صورت گیرد، هر دفعه یک تغییر در مسأله می‌دهیم. البته می‌توان مدل را توسعه داد و چندین تغییر را با هم در نظر گرفت که این کار، کمی پیچیده‌تر می‌باشد. در مسأله برنامه‌ریزی پارامتری نوعی از تحلیل حساسیت را که در آن بردار سمت راست یا بردار ضرایب قیمت به طور تابع خطی از یک پارامتر λ که می‌توانست تمام مقادیر حقیقی را اختیار نماید؛ مورد بحث قرار دادیم (مسأله‌ی برنامه‌ریزی پارامتری). اکنون به بررسی مسأله مطرح شده می‌پردازیم.

فرض کنیم:

$$S = \{x \mid Ax = b \ \& \ x \geq 0\}$$

در حقیقت مجموعه‌ی جواب‌های شدنی مسأله‌ی (۱) می‌باشد و فرض کنیم \tilde{B} پایه بهینه نهائی به دست آمده برای مسأله ۱-۴ باشد. که بردار اساسی متناظر آن و ضرایب متغیرهای اساسی چنین است

$$x_B = (x_1, \dots, x_m)$$

و

$$c_B = (c_1, \dots, c_m)$$

$$\tilde{x} = (\tilde{B}^{-1}b, 0) \quad , \quad \tilde{w} = c_B \tilde{B}^{-1}$$

یک BFS برای مسأله‌ی ۱-۴ می‌باشد برای توضیح مسأله‌ای را در نظر بگیرید که متناظر جدول زیر می‌باشد.

جدول شماره (۱-۴)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	b
۱	۲	۰	۱	۰	-۶	۰	۱۱
۰	۱	۱	۳	-۲	-۱	۰	۶
۱	۲	۱	۳	-۱	-۵	۰	۱۳
۳	۲	-۳	-۶	۱۰	-۵	۱	۰

z می‌نیمم می‌گردد. $j = 1, \dots, 6$ $x_j \geq 0$

پس از حل مسأله با الگوریتم سیمپلکس $\tilde{x}_B = (x_1, x_2, x_3)$ یک بردار اساسی بهینه برای مسأله خواهد بود که در جدول زیر اطلاعات مربوط به عکس \tilde{B}^{-1} و مقادیر متغیرهای اساسی داده شده است.

(مسأله را با روش سیمپلکس اصلاح شده با جدول معکوس حل نموده‌ایم)

جدول شماره (۲-۴)

متغیرهای اساسی	جدول معکوس	مقادیر متغیرهای اساسی
x_1	-۱ -۲ ۲ ۰	۳
x_2	۱ ۱ -۱ ۰	۴
x_3	-۱ ۰ ۱ ۰	۲
$-z$	-۲ ۴ -۱ ۱	-۱۱

بنابراین $\tilde{x} = (3, 4, 2, 0, 0, 0)^t$ یک جواب بهینه برای مسأله می‌باشد که مقدار بهینه تابع مقصود $z(\tilde{x}) = 11$

۱-۱-۴ معرفی فعالیت جدید^۱ (افزودن متغیر جدید) فرض کنیم متغیر جدیدی را به مسأله معرفی می‌نمائیم (در حقیقت فعالیت جدیدی مانند x_{n+1} را به مدل می‌افزائیم)

و فرض کنیم. بردار متناظر آن a_{n+1} و ضریب آن در تابع مقصود c_{n+1} باشد. پس مدل تعدیل یافته به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z(x) = cx + c_{n+1}x_{n+1} \\ \text{s. t.} \quad & [A, a_{n+1}]x = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (2-4)$$

که در آن

$$x = (x^t, x_{n+1})$$

\tilde{B} برای مسأله ۲-۴ شدنی می باشد، که BFS متناظر آن برای مسأله ۲-۴ عبارت است از:

$$x^0 = (\tilde{x}^t, 0)$$

با توجه به میزان بهینگی؛ x^0 برای مسأله ۲-۴ بهینه می ماند اگر داشته باشیم:

$$\bar{c}_{n+1} = c_{n+1} - \tilde{w}a_{n+1} \geq 0$$

اگر $\bar{c}_{n+1} < 0$ مسأله ۲-۴ را با وارد نمودن x_{n+1} به عنوان متغیر واردشونده حل می نمایم (با الگوریتم سیمپلکس اصلاح شده) اغلب اتفاق می افتد که با آوردن x_{n+1} به پایه، به جواب بهینه مسأله ۲-۴ می رسیم و کار خاتمه می پذیرد. ولی هیچ تئوری حمایت کننده ای که این کار را تضمین نماید موجود نمی باشد. در بعضی از مسائل ممکن است ضرورت داشته باشد که چندین عمل محوری تا رسیدن به جواب بهینه مسأله ۲-۴ ضروری باشد.

۲-۱-۴ تمرین.

(۱) ثابت کنید که مقدار بهینه مسأله ۲-۴ کوچک تر یا مساوی مقدار بهینه مسأله ۱-۴ می باشد (مقدار بهینه مسأله عبارت است مقدار بهینه ی تابع مقصود یعنی مقدار تابع مقصود بازاء جواب بهینه). مثالی بسازید که مسأله ۱-۴ محدود باشد ولی مسأله ۲-۴ از پائین نامحدود باشد.

(۲) چه رابطه‌ای بین ناحیه‌ی شدنی مسأله‌ی ۱-۴ و ۲-۴ وجود دارد؟ مطلب را از نظر جبری بیان و با آوردن مثال مطلب را کاملاً توضیح دهید.

توجه حل تمرینات که در متن درس می‌آید، برای خوانندگان بسیار ضروری است در حقیقت مقصود از آوردن تمرین آن است که سنجیده شود که خواننده چقدر مطلب را گرفته است. از این رو توصیه می‌گردد قبل از ادامه بحث حتماً تمرینات را دقیقاً حل نموده و حل آن را یادداشت نمائید.

۳-۱-۴ مثال. مسأله جدول شماره‌ی (۱-۴) را مجدداً در نظر بگیرید. فرض کنید متغیر جدیدی مانند x_7 به مسأله معرفی می‌گردد، که ستون متناظر آن $a_7 = (1, 2, -3)^t$ و $c_7 = -7$ می‌باشد. ضریب سود نسبی این متغیر نسبت به پایه بهینه قبلی، عبارت است از:

$$\bar{c}_7 = c_7 + (-\tilde{w})a_7 = -7 + (-2, 4, -1)(1, 2, -3)^t = 2$$

از این رو، جواب بهینه قبلی با مقدار $x_7 = 0$ ، بهینه می‌باشد. جواب بهینه مسأله‌ی جدید عبارت است از $\tilde{x} = (3, 4, 2, 0, 0, 0, 0)$ و مقدار بهینه تابع مقصود $\tilde{z} = 11$ می‌باشد. بنابراین، اگر x_7 سطح فعالیت جدید در مدل تعدیل یافته صورت نمی‌پذیرد (در جواب بهینه).

۴-۱-۴ مثال. مجدداً مسأله متناظر جدول شماره‌ی (۱-۴) را در نظر می‌گیریم. متغیر جدید x_7 را با بردار $a_7 = (3, -1, 1)$ و $c_7 = 4$ معرفی می‌نمائیم. ضرایب سود نسبی متغیر جدید نسبت به پایه بهینه مسأله‌ی قدیمی

$$\bar{c}_7 = c_7 + (-\tilde{w})a_7 = 4 + (-2, 4, -1)(3, -1, 1)^t = -7 < 0$$

در نتیجه با معرفی متغیر جدید، جواب بهینه قبلی، در مدل تعدیل یافته جدید؛ بهینه نخواهد بود. با وارد نمودن x_7 به پایه و انجام عمل محوری، با توجه به جدول شماره (۲-۴) داریم:

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_7 \\ \bar{c}_7 \end{pmatrix} = \tilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} a_7 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_7 \\ \bar{c}_7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

این ستون، ستون محوری است. با استفاده از قاعده می نیمم مشخص می گردد که متغیر x_1 ، متغیر خارج شونده می باشد.

جدول شماره (۳-۴)

متغیرهای اساسی	جدول معکوس	مقادیر متغیرهای اساسی
x_7	-۱ -۲ ۲ ۰	۳
x_2	۲ ۳ -۳ ۰	۱
x_3	-۳ -۴ ۵ ۰	۸
$-z$	-۹ -۱۰ ۱۳ ۱	۱۰

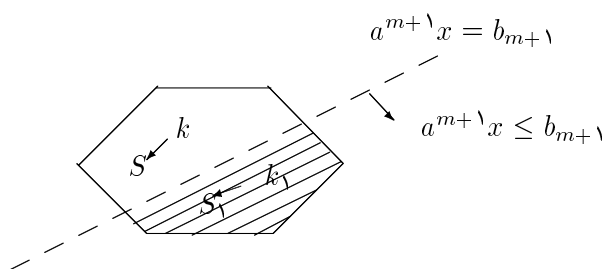
۵-۱-۴ تمرین. ادامه عملیات مسأله فوق را تا رسیدن به جواب بهینه ادامه دهید. در هر مرحله تمامی عملیات را به دقت انجام داده و عکس پایه بهینه را به دست آورید.

۲-۴ افزودن یک قید نامساوی^۱

مسأله شماره ۱-۴ را در نظر و مجدداً فرض کنید \tilde{B} پایه بهینه مسأله ی باشد. فرض کنیم قیدی به صورت زیر به مسأله می افزائیم

$$a^{m+1}x \leq b_{m+1} \quad (۳-۴)$$

1) Introducing an Additional Inequality Constraint



شکل (۱-۴)

با ملحوظ داشتن این نامساوی به عنوان قید افزوده شده، نقاطی از ناحیه S ممکن است نشدنی گردد، به عبارت دیگر ناحیه ممکن است کوچک‌تر شود. فرض کنیم S_1 ناحیه جدید شدنی باشد، واضح است که $S_1 \subseteq S$. شکل (۱-۴) ملاحظه گردد. از این رو، اگر ناحیه اصلی (اولیه) جواب بهینه شدنی داشته باشد ناحیه شدنی مسأله‌ی تعدیل یافته یا خالی است، یا جواب بهینه شدنی دارد. هم‌چنین داریم:

$$z(\tilde{x}) = \text{Min}\{z(x) \mid x \in S\} \leq \text{Min}\{z(x) \mid x \in S_1\}$$

اگر $\tilde{x} \in S_1$ ؛ یعنی \tilde{x} در ۳-۴ صدق نماید، در این صورت \tilde{x} با افزودن قید جدید جواب بهینه باقی می‌ماند. از طرف دیگر، اگر \tilde{x} در قید افزوده شده صدق ننماید، یعنی:

$$\tilde{x}_{n+1} = -a^{m+1}\tilde{x} + b_{m+1} \leq 0 \quad (۴-۴)$$

که در آن متغیر کمکی متناظر ۳-۴ می‌باشد. مسأله‌ی تعدیل یافته به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + 0 x_{n+1} \\ \text{s. t.} \quad & \begin{bmatrix} A & 0 \\ a^{m+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b_{n+1} \end{bmatrix} \\ & x_j \geq 0 \quad \text{بازاء هر } j \end{aligned} \quad (۵-۴)$$

فرض کنید A ماتریس تکنولوژی از مرتبه‌ی $(m+1) \times (n+1)$ متناظر ۵-۴ باشد. با افزودن x_{n+1} به عنوان متغیر اساسی به متغیرهای اساسی قبلی می‌توان پایه \tilde{B} را به پایه B

وسعت دارد که متناظر (\tilde{x}^t, x_{n+1}) باشد طبق ۱-۴ \tilde{B} یک پایه نشدنی برای مسأله تعدیل یافته می‌باشد. چون $c_{n+1} = 0$ ؛ بنابراین سود نسبی x_j نسبت به پایه جدید B همان قبلی خواهد بود که داریم $\bar{c}_j \geq 0$ بازاء هر $j (1, \dots, n)$ ؛ بنابراین پایه جدید B دوآل شدنی می‌باشد، اما پرایمال شدنی نیست. با به‌کار بردن B به عنوان پایه اولیه و با به‌کار بردن الگوریتم سیمپلکس دوآل مسأله را حل می‌کنیم. چگونگی به‌دست آوردن عکس پایه جدید چنین خواهد بود:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & 0 \\ a_{m+1,1} & \dots & a_{m+1,m} & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{B}^{-1} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ -(a_{m+1,1} \dots a_{m+1,m}) \tilde{B}^{-1} & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین B^{-1} را می‌توان به آسانی از \tilde{B}^{-1} به‌دست آورد. و واضح است که:

$$(\tilde{w}, 0) = \tilde{w}$$

۶-۲-۴ مثال. مجدداً مسأله‌ی متناظر جدول شماره (۱-۴) را در نظر بگیرید. فرض کنید قید

$$x_1 - x_2 + 3x_3 \leq -7$$

به مسأله افزوده می‌گردد. جواب بهینه $\tilde{x} = (3, 4, 2, 0, 0, 0)$ در قید فوق‌الذکر صدق نمی‌نماید. فرض کنیم x_7 متغیر کمکی متناظر قید فوق باشد؛ یعنی:

$$x_7 = -x_1 + x_2 - 3x_3 - 7$$

در جدول زیر که جدول معکوس می‌باشد، اطلاعات مربوط به جدول و افزودن قید آورده شده است.

جدول شماره (۴-۴)

متغیرهای اساسی	جدول معکوس	مقادیر اساسی	ستون محوری x_4
x_1	-۱ -۲ ۲ ۰ ۰	۳	-۱
x_2	۱ ۱ -۱ ۰ ۰	۴	۱
x_3	-۱ ۰ ۱ ۰ ۰	۲	۲
x_7	۵ ۳ -۶ ۱ ۰	-۱۲	-۴
$-z$	-۲ ۴ -۱ ۰ ۱	-۱۱	۱

x_7 متغیری است که بایستی از پایه خارج شود و متغیر x_4 واردشونده به صورت زیر مشخص می‌گردد.

جدول شماره (۵-۴)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	b
سطر چهارم به روز شده	۰	۰	۰	-۴	۰	-۳	۱	۰	-۱۲
سطر قیمت به روز شده	۰	۰	۰	۱	۳	۸	۰	۱	-۱۱
$\frac{-\bar{c}_j}{\bar{a}_{4j}} < 0$				$\frac{1}{4}$		$\frac{8}{3}$			

x_4 وارد پایه می‌گردد و x_7 از پایه خارج می‌گردد. این عملیات به این صورت آن قدر ادامه پیدا می‌کند تا کار به اتمام رسد.

۷-۲-۴ تمرینات متن درس.

- مسئله‌ی فوق را تا تکمیل شدن عملیات ادامه دهید.
- نشان دهید افزودن یک قید به مسئله‌ی پرایمال در تحلیل حساسیت مانند معرفی یک متغیر در مسئله‌ی دوآل آن می‌باشد.
- ثابت کنید تمامی نقاط رأسی S_1 شامل نقاط زیر می‌باشد.

الف. تمامی نقاط رأس S است که در شرط ۳-۴ صدق می‌کند.

ب. نقاطی از تقاطع پال‌های S با ابرصفحه H که آن پال‌ها کاملاً روی ابرصفحه H قرار نمی‌گیرند. که

$$H = \{x \mid a^{m+1}x = b_{m+1}\}$$

(۴) اگر هر نقطه‌ی بهینه‌ی شدنی ۱-۴ که در شرایط ۳-۴ صدق نکند و اگر $S \neq \emptyset$ ، ثابت کنید که هر جواب بهینه‌ی شدنی مسأله‌ی تعدیل یافته که در شرایط ۳-۴ به صورت تساوی صدق نماید، روی ابرصفحه H که در مسأله ۴-۴ تعریف شد قرار می‌گیرد.

۳-۴ معرفی یک قید اضافی به صورت تساوی^۱

مجدداً بررسی‌گردیم به مسأله‌ی متناظر جدول شماره‌ی (۱-۴) فرض کنید یک قید اضافی به صورت زیر به مسأله افزوده می‌گردد.

$$a^{m+1}x = b_{m+1}$$

فرض کنید:

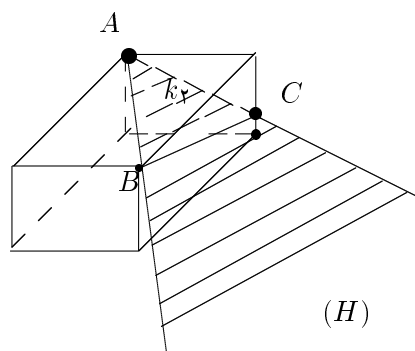
$$H = \{x \mid a^{m+1}x = b_{m+1}\}$$

مجموعه‌ی جواب‌های شدنی مسأله‌ی تعدیل یافته عبارت است از مجموعه تمامی نقاطی که $H \cap S = S_2$ قرار می‌گیرد. شکل (۲-۴) ملاحظه گردد. فرض کنید $\tilde{x} \in H$ در این صورت واضح است که \tilde{x} جواب بهینه مسأله‌ی تعدیل یافته می‌باشد.
اگر $\tilde{x} \notin H$ ، آنگاه:

$$a^{m+1}\tilde{x} \neq b_{m+1}$$

فرض کنید $a^{m+1}\tilde{x} > b_{m+1}$. آنگاه مسأله‌ی اصلی را با افزودن قید $a^{m+1}x - x_{n+1} = b_{m+1}$ در آن $x_{n+1} \geq 0$.

1) Introducing an Additional Equality Constraint



شکل (۲-۴)

اگر $a^{m+1}\tilde{x} < b_{m+1}$ با قید $a^{m+1}x + x_{n+1} = b_{m+1}$ و $x_{n+1} \geq 0$ عوض نمایند (مسئله جدید، یعنی مسئله تعدیل یافته به صورت زیر خواهد بود)

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z(x) = cx + Mx_{n+1} \\ \text{s. t.} \quad & \begin{bmatrix} A & 0 \\ a^{m+1} & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b_{m+1} \end{pmatrix} \\ & x = \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (۶-۴)$$

که در آن M عدد دلخواه بسیار بزرگی می‌باشد. بردار X_B به صورت

$$x_B = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$$

یک بردار اساسی شدنی برای مسئله‌ی ۶-۴ خواهد بود. BFS متناظر آن عبارت خواهد بود

از:

$$x^t = (\tilde{x}^t, \tilde{x}_{n+1})$$

که در آن

$$\tilde{x}_{n+1} = a^{m+1}\tilde{x} - b_{m+1}$$

همچنین \tilde{B} عبارت خواهد بود از:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & 0 \\ a_{m+1,1} & \dots & a_{m+1,m} & -1 \end{bmatrix}$$

از این رو عکس \tilde{B}^{-1} چنین خواهد بود:

$$\tilde{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{B}^{-1} & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m+1,1}, \dots, a_{m+1,m}) & \tilde{B}^{-1} & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

با شروع از پایه شدنی B مسأله‌ی تعدیل یافته ۴-۶ حل می‌گردد تا جواب بهینه حاصل (در صورت وجود) به دست آید.

اگر $\tilde{x}_{n+1} > 0$ در این صورت $S_2 = \phi$. اگر $\tilde{x}_{n+1} = 0$ آن‌گاه \tilde{x} جواب بهینه مسأله‌ی تعدیل یافته خواهد بود.

۸-۳-۴ تمرینات متن درس.

(۱) فرض کنید در مسأله متناظر جدول شماره (۱-۴) قید:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$$

به مسأله افزوده شد. جواب بهینه شدنی مسأله‌ی تعدیل یافته را به دست آورید.

(۲) با به‌کار بردن روش سیمپلکس دوآل به جای روش M بزرگ که در بالا توضیح داده شد، چگونه می‌توان مسأله را حل نمود. در جزئیات بحث نمائید.

(۳) ثابت کنید نقاط رأسی مجموعه S_2 شامل نقاط زیر است:

الف. تمامی نقاط رأسی S که روی ابرصفحه H قرار دارند.

ب. تقاطع یال‌های S با H ، آن یال‌هایی که تماماً در H قرار ندارند.

۴) فرض کنید H و S_2 همان باشند که در متن درس تعریف شد.

$$S_1 = S \cap \{x \mid a^{m+1}x \leq b_{m+1}\}$$

$$S_2 = S \cap \{x \mid a^{m+1}x \geq b_{m+1}\}$$

اگر $S_2 \neq \phi$ ثابت کنید S_2 شامل حداقل یک جواب بهین شدنی یکی از مسائل زیر می‌باشد.

$$۱) \text{ Min } z(x) = cx$$

$$\text{s. t. } x \in S_1$$

$$۲) \text{ Min } z(x) = cx$$

$$\text{s. t. } x \in S_2$$

۴-۴ تغییرات قیمت متغیرهای غیراساسی در تابع مقصود^۱

مجدداً مسأله‌ی متناظر جدول شماره‌ی (۴-۱) را در نظر می‌گیریم. فرض کنید x_r یک متغیر غیراساسی است و فرض کنیم ضرایب تمامی متغیرهای غیراساسی جز c_r که ضرایب x_r در تابع مقصود ثابت بماند. می‌خواهیم بدانیم اگر \tilde{B} پایه بهینه مسأله‌ی ۴-۱ باشد، می‌خواهیم بدانیم که تغییرات c_r چقدر باشد تا \tilde{B} برای مسأله‌ی ۴-۱ باز هم بهینه بماند یعنی:

$$\bar{c}_r = c_r - \tilde{w}a^r \geq 0$$

یعنی:

$$c_r \geq \tilde{w}a^r$$

سود نسبی قیمت بقیه‌ی متغیرها مستقل از c_r می‌باشند، از این رو تغییر نخواهند کرد. اگر c_r در بازه $[\tilde{w}a^r, \infty)$ نباشد، x_r تنها متغیر غیراساسی است که سود نسبی آن منفی می‌باشد (نسبت به پایه \tilde{B}). x_r را وارد پایه می‌کنیم و عملیات را با روش سیمپلکس تا پایان کار ادامه می‌دهیم.

1) Cost Ranging of a Nonbasic Cost Coefficient

۹-۴-۴ مثال. مجدداً مسأله‌ی متناظر جدول شماره‌ی (۱-۴) را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم بدانیم c_5 چقدر (که مقدار فعلی آن ۱۰ است) می‌تواند تغییر کند که بردار $x_B = (x_1, x_2, x_3)$ اساسی باقی بماند. برای این منظور بایستی داشته باشیم:

$$c_5 + (-2, 4, -1)(0, -2, -1)^t \geq 0$$

یعنی:

$$c_5 \geq 7$$

به عبارت دیگر اگر مقدار c_5 در $[7, \infty)$ پایه بهینه می‌ماند. فرض کنیم که c_5 مقدار ۶ را به خود می‌گیرد. واضح است که پایه بهینه قبلی دیگر پایه بهینه نیست. متغیر x_5 را وارد پایه می‌کنیم، با به‌کار بردن قاعده‌ی می‌نیم مشخص می‌گردد که متغیر x_1 از پایه خارج می‌گردد و جدول جدید به‌روز شده به‌صورت زیر خواهد بود:

جدول شماره (۶-۴)

متغیرهای اساسی	جدول معکوس	مقادیر اساسی
x_5	$-\frac{1}{4} \quad -1 \quad 1 \quad 0$	$\frac{3}{4}$
x_2	$\frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 0$	$\frac{11}{4}$
x_3	$-\frac{3}{4} \quad -1 \quad 2 \quad 0$	$\frac{7}{4}$
$-z$	$-\frac{5}{4} \quad 3 \quad 0 \quad 1$	$-\frac{19}{4}$

به سادگی می‌توان بررسی نمود که جدول فوق، جدول بهینه مسأله‌ی تعدیل یافته می‌باشد.

۵-۴ تغییر ضرایب یک متغیر اساسی^۱

مجدداً مسأله متناظر جدول شماره‌ی (۱-۴) را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم تمامی ضرایب تابع مقصود جز c_1 ثابت می‌مانند. c_1 ضریب متغیر اساسی x_1 می‌باشد. اگر c_1 را به عنوان یک پارامتر در نظر بگیریم، می‌خواهیم دامنه تغییرات آن را که \bar{B} پایه بهینه باقی بماند، مشخص نماییم. چون c_1 ضریب یکی از متغیرهای اساسی می‌باشد، هر نوع تغییر در آن باعث تغییر در

1) Cost Ranging of a Basic Cost Coefficient

جواب دوآل متناظر پایه \tilde{B} خواهد شد و همین‌طور باعث می‌گردد که سود نسبی کلیه متغیرهای غیراساسی نیز تغییر نماید. برای تسهیل در بیان فرض می‌کنیم γ_1 ، نشان‌دهنده سطح پارامتر c_1 ، و فرض کنیم $w(\gamma_1)$ و $\bar{c}_j(\gamma)$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی جواب‌های دوآل و سود نسبی متغیرها نسبت به پایه \tilde{B} باشند. پس:

$$w(\gamma_1) = (\gamma_1, c_2, \dots, c_m) \tilde{B}^{-1}$$

از این‌رو بردار دوآل یک تابع آفینی از γ_1 می‌باشد. اگر این جواب دوآل را به‌کارگیریم، سود نسبی متغیرها چنین خواهد بود:

$$\bar{c}_j(\gamma_1) = c_j - w(\gamma_1) a_j \quad j = 1, \dots, n$$

پس هر کدام از $\bar{c}_j(\gamma_1)$ نیز خود تابع آفینی از γ_1 خواهند شد. لهذا دامنه‌ی تغییرات γ_1 که برای آن مقادیر \tilde{B} پایه بهین بماند، عبارت است از دامنه‌ی تغییرات γ_1 که $\bar{c}_j(\gamma_1)$ ‌ها نامنفی بمانند. این دامنه‌ی تغییرات بازه بسته‌ی غیرخالی می‌باشد. (چرا؟)

اگر لازم باشد که c_1 در خارج از این بازه تعدیل یابد، مثلاً مقدار $\gamma_1 = c'_1$ را بگیرد. با به‌کار بردن فرمول‌های $\bar{c}_j(c'_1)$ تمامی سود نسبی متغیرهای غیراساسی محاسبه می‌گردد و متغیری که سود نسبی آن منفی باشد وارد پایه می‌شود و عملیات الگوریتم سیمپلکس در جهت رسیدن به جواب بهینه ادامه می‌یابد.

مثال ۱۰-۵-۴ مجدداً مسأله‌ی متناظر جدول شماره‌ی (۴-۱) را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم γ_1 نشان‌دهنده‌ی ضریب x_1 در تابع مقصود باشد، که مقدار آن ۳ می‌باشد (در جدول حاضر ۳ می‌باشد). جواب دوآل متناظر بردار اساسی (x_1, x_2, x_3) به‌عنوان تابعی از γ_1 به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} w(\gamma_1) &= (\gamma_1, 2, -3) (\tilde{B}^{-1}) \\ &= (-\gamma_1 + 5, -2\gamma_1 + 2, 2\gamma_1 - 5) \end{aligned}$$

با به کار بردن فرمول:

$$\bar{c}_j(\gamma_1) = c_j - w(\gamma_1)a_j$$

بردار سود نسبی چنین خواهد بود:

$$\bar{c}(\gamma_1) = (0, 0, 0, \gamma_1 - 2, -2\gamma_1 + 9, 2\gamma_1 + 2) \geq 0 \iff 2 \leq \gamma_1 \leq \frac{9}{2}$$

بنابراین \tilde{B} پایه بهینه می باشد، وقتی که ضریب x_1 در تابع مقصود در بازه $[\frac{9}{2}, 2]$ قرار گیرد با فرض این که تمام ضرایب تابع مقصود ثابت می مانند (در مقدار فعلی خودشان در جدول (۱-۴))

فرض کنید γ_1 مقدار ۵، با تغییر c_1 از ۳ به ۵، جواب دوآل تعدیل یافته چنین خواهد بود:

$$w(\gamma_1 = 5) = (0, -8, 5)$$

با این تغییر، جدول معکوس چنین خواهد بود

جدول شماره (۴-۷)

متغیرهای اساسی	جدول معکوس	مقادیر اساسی	ستون محوری (x_5)
x_1	-۱ -۲ ۲ ۰	۳	۲
x_2	۱ ۱ -۱ ۰	۴	-۱
x_3	-۱ ۰ ۱ ۰	۲	-۱
$-z$	۰ ۸ -۵ ۱	-۱۷	-۱

سود نسبی تعدیل یافته x_5 ، برابر با (-۱) می باشد. از این جهت x_5 وارد پایه می گردد که جدول به روز شده پس از عملیات محوری و اطلاعات مربوط به متغیرهای اساسی بعدی چنین خواهد بود

جدول شماره (۴-۸)

متغیرهای اساسی	جدول معکوس	مقادیر اساسی
x_5	$-\frac{1}{4} \quad -1 \quad 1 \quad 0$	$\frac{3}{4}$
x_2	$\frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 0$	$\frac{11}{4}$
x_3	$-\frac{3}{4} \quad -1 \quad 2 \quad 0$	$\frac{7}{4}$
$-z$	$-\frac{1}{4} \quad 7 \quad -4 \quad 1$	$-\frac{31}{4}$

به خاطر بیاورید که ضریب x_1 در تابع مقصود ۵ می‌باشد، و بررسی نمائید که آیا پایه جدید در میزان اختتام صدق می‌نماید. در صورت ضرورت الگاریتم را ادامه دهید.

۴-۵-۱۱ تغییرات سمت راست^۱ در مسأله متناظر جدول شماره (۴-۱) می‌خواهیم معین کنیم دامنه تغییرات مقدار یکی از ثابت‌های سمت راست، مثلاً b_1 را که برای این فاصله‌ی تغییرات \tilde{B} پایه بهینه باقی ماند. ثابت سمت راست را به عنوان یک پارامتر تلقی نمائید و آن را با β_1 نشان دهید. b_1 مقدار β_1 در جدول شماره (۴-۱) می‌باشد که $b_1 = 11$ می‌باشد. فرض کنیم که b_2 و b_3 تغییر ننمایند. \tilde{B} پایه بهینه است وقتی مقدار پارامتر β_1 مساوی b_1 است. از این رو \tilde{B} دوآل شدنی می‌باشد. بنابراین \tilde{B} برای تمامی مقادیر β_1 که مسأله پرایمال شدنی باشد، بهینه خواهد ماند. و مقدار این متغیرهای اساسی یعنی $x_{\tilde{B}^i}$ ها تابعی از پارامتر β_1 خواهد بود. \tilde{B} پرایمال شدنی است اگر:

$$x_{\tilde{B}}(\beta_1) = \tilde{B}^{-1}(\beta_1, b_2, \dots, b_m)^t \geq 0$$

چون تمامی این نامساوی‌ها برحسب β_1 خطی می‌باشند، این مطلب یک فاصله بسته‌ی به صورت $\lambda \leq \beta_1 \leq \bar{\lambda}$ را برای بهینه ماندن \tilde{B} برای تمام مقادیر β_1 در این فاصله مشخص خواهد نمود.

اگر ضرورت داشته باشد که مسأله را برای $\beta_1 = b_1$ که خارج از فاصله فوق باشد حل نمائیم. با توجه به این که مسأله برای پایه \tilde{B} دوآل شدنی است ولی برای مقدار فوق پرایمال شدنی نمی‌باشد، با به‌کار بردن سیمپلکس دوآل می‌توان مسأله را حل نمود و بازاء مقدار داده شده پایه بهینه را در صورت شدنی بودن مسأله معین کرد.

1) Right Hand Side Ranging

مثال ۱۲-۵-۴ در مسأله‌ی متناظر جدول شماره‌ی (۱-۴)، مقادیر متغیرهای اساسی (x_1, x_2, x_3) به عنوان تابعی از پارامتر β_1 چنین می‌باشد.

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\beta_1 + 14 \\ \beta_1 - 7 \\ -\beta_1 + 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$7 \leq \beta_1 \leq 13 \iff (\text{بردار اساسی شدنی است})$$

از این رو $[7, 13]$ فاصله‌ای است که بردار اساسی (x_1, x_2, x_3) بهینه می‌ماند.

تمرین ۱۳-۵-۴ یک جواب بهینه شدنی برای مسأله‌ی متناظر جدول (۱-۴) بیابید وقتی b_1 از ۱۱ به ۶ تغییر می‌نماید.

۱۴-۵-۴ تغییر در ماتریس تکنولوژیکی A در ستون‌های متغیرهای

غیراساسی^۱ فرض کنید x_j یک متغیر غیراساسی است، یعنی در بردار \tilde{B} نمی‌باشد. a_{ij} یکی از اعضای ماتریس تکنولوژی (ماتریس ورودی و خروجی) می‌باشد، که در ستون a_j قرار داد (ستون a_j متناظر x_j است). اگر در ماتریس تکنولوژی تمامی اعضاء جز a_{ij} ثابت بمانند و a_{ij} تغییر نماید، دامنه تغییرات آن چقدر می‌تواند باشد، که پایه بهینه \tilde{B} بهینه بماند. اگر a_{ij} را به عنوان یک پارامتر تلقی نمائیم و آن را به α_{ij} نشان دهیم. در جدول حاضر سطح α_{ij} همان a_{ij} می‌باشد. چون x_j متغیر غیراساسی می‌باشد، تغییرات در a_{ij} در پرابمال شدنی \tilde{B} تغییری نمی‌دهد. تغییر در α_{ij} ، تنها سود نسبی متغیر x_j را عوض می‌نماید، به صورت زیر:

$$\bar{c}_j(\alpha_{ij}) = c_j + \left(\sum_{r \neq i} (-\tilde{w}_r) a_{rj} \right) - \tilde{w}_i \alpha_{ij}$$

1) Change in The Input- output Coefficient in a Nonbasic Column Vectors

تا زمانی که $\bar{c}_j(\alpha_{ij}) \geq 0$ ، پایه بهینه باقی می‌ماند. رابطه اخیر یک فاصله‌ی بسته برای α_{ij} مشخص می‌نماید، به طوری که اگر تغییرات α_{ij} در این فاصله باشد، \tilde{B} پایه بهینه مسأله خواهد بود. اگر α_{ij} قرار باشد، مقداری مانند a'_{ij} را که خارج از فاصله فوق باشد بگیرد، واضح است که سود نسبی این متغیر، یعنی متغیر x_j منفی می‌گردد که با انجام عمل محوری در الگوریتم سیمپلکس پایه بهینه دیگری را می‌توان برای مسأله به دست آورد.

مثال ۴-۵-۱۵. در مسأله متناظر جدول شماره (۴-۱) مقدار فعلی $\alpha_{۲۵}$ ، برابر با (۲-)
می‌باشد.

$$\begin{aligned}\bar{c}_5(\alpha_{۲۵}) &= ۱۰ + (-۲, ۴, -۱)(۰, \alpha_{۲۵}, -۱)^t \\ &= ۱۱ + ۴\alpha_{۲۵} \geq ۰ \iff \alpha_{۲۵} \geq -\frac{۱۱}{۴}\end{aligned}$$

بنابراین \tilde{B} پایه بهینه باقی ماند اگر $\alpha_{۲۵} \geq -\frac{۱۱}{۴}$.

فرض کنید $\alpha_{۲۵}$ از مقدار فعلی (۲-) به (۳-) تغییر یابد. ستون به‌روز شده متناظر x_5 عبارت خواهد بود از $(۱, -۱, -۲, ۴)^t$. با وارد نمودن متغیر x_5 و خارج نمودن متغیری که از قاعده‌ی می‌نیم به دست می‌آید کار را با مرحله ختم ادامه می‌دهیم.

۴-۶ تغییر در ضریب یکی از اعضای ستون‌های اساسی^۱

فرض کنید $x_۱$ ، یک متغیر اساسی در \tilde{B} برای مسأله ۴-۱ باشد می‌خواهیم $a_{۱۱}$ را از مقدار فعلی خود تغییر دهیم و آن را به $a'_{۱۱}$ برسانیم.

ستون تعدیل یافته $a'_1 = (a'_{۱۱}, a_{۱۲}, \dots, a_{m۱})^t = a_1$ جایگزین $(a_{۱۱}, a_{۱۲}, \dots, a_{m۱})^t$ می‌گردد. فرض کنید x'_1 سطح فعالیت بردار ستونی جدید باشد. بنابراین x'_1 جایگزین x_1 می‌گردد. مسأله‌ی جدید تغییر یافته را، مسأله‌ی اصلاح شده می‌نامیم.

مسأله‌ی جدید را با وسعت دادن جدول اصلی بسازید. در مسأله جدید متغیر x'_1 با ستون a'_1 در نظر بگیرید و در تابع مقصود ضریب آن را c_1 قرار دهید و ضریب x_1 را عدد بسیار

1) Change in a Basic Column Input- Output Coefficient

بزرگ M قرار دهید. این کار باعث به وجود آمدن مسأله‌ای به صورت زیر می‌گردد.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c_1 x'_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + M x_1 \\ \text{s. t.} \quad & a'_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + a_1 x_1 = b_1 \\ & x_1, \dots, x_n, x'_1 \geq 0 \end{aligned}$$

در حقیقت x_1 نقش یک متغیر تصنعی را بازی می‌کند. که با حل این مسأله مطلب مورد نظر عاید می‌گردد.

۱۶-۶-۴ کاربردهای عملی تحلیل حساسیت^۱ در مطالعه‌ی یک سیستم در به‌کارگیری مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی، تکنیک تحلیل حساسیت را می‌توان در ارزیابی محصول جدید به‌کار برد. هم‌چنین این روش در معرفی تکنولوژی جدید و یا به‌کارگیری منابع جدید به‌کار گرفته می‌شود. برای اطلاع از جزئیات امر به منابع آخر فصل مراجعه شود.

۷-۴ تمرینات فصل چهارم

(۱) جدول سیمپلکس زیر را در نظر بگیرید.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$R.H.S$
	۱	۰	۲	۲	۱	۲	-۱	۰	۹
	۰	۱	۳	۱	۳	۲	۰	-۱	۱۹
c_j	۳۵	۳۰	۶۰	۵۰	۲۷	۲۲	۰	۰	

در جدول فوق متغیرهای x_7 و x_8 متغیرهای کمکی می‌باشند.

۱- بررسی نمایید که $B = [a_5, a_6]$ پایه بهینه مسأله فوق است. قیمت‌های سایه را

به دست آورید. آیا مسأله بهینه دیگری دارد؟

۲- متغیر x_9 به مسأله افزوده می‌گردد که در آن $a_9 = (۲)$ ، آیا مقدار بهینه تابع

مقصود تغییر می‌کند؟ (مقدار $c_9 = ۷$ می‌باشد)

1) Practical Applications of Sensitivity Analysis

- ۳- c_9 چقدر باشد تا جواب بهینه تغییر نکند؟
- ۴- c_4 در چه فاصله‌ای تغییر کند تا جواب بهینه تغییر نکند؟
- ۵- فرض کنید که عدد ۹ سمت راست تبدیل می‌شود به $9 + \alpha$ ($\alpha \geq 0$) چقدر باشد تا پایه $[a_5, a_6]$ شدنی بماند؟
- ۶- فرض کنید a_3 به $\frac{3}{4}$ تبدیل می‌گردد، آیا جواب بهینه تغییر می‌کند؟
- ۷- اگر ۱۹ به $19 + \beta$ تبدیل شود، β باید چقدر باشد تا جواب شدنی بماند؟
- (۲) در جدول زیر داده‌های مربوط به حلال شیمیایی مختلف داده شده است:

	حلال‌های				خواسته شده
	۱	۲	۳	۴	
ماده ۱ شیمیایی در هر کیلوگرم	۱۸۰	۱۲۰	۹۰	۶۰	≥ 90
ماده ۲ شیمیایی در هر کیلوگرم	۳	۲	۶	۵	≤ 4
قیمت به سنت بر حسب کیلوگرم	۱۶	۱۲	۱۰	۱۱	

فرض کنید x_j کسری از حلال نوع j در ترکیب j باشد ($j = 1, 2, 3, 4$). x_5 و x_6 متغیرهای کمکی می‌باشند. جدول اولیه به صورت زیر خواهد بود.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
۱	۱	۱	۱	۰	۰	۱
۱۸۰	۱۲۰	۹۰	۶۰	-۱	۰	۹۰
۳	۲	۶	۵	۰	۱	۴
۱۶	۱۲	۱۰	۱۱	۰	۰	

جدول اولیه

- ۱- جواب بهینه‌ی مسأله را به دست آورید. پایه بهینه را مشخص کنید و عکس آن را به دست آورید.
- ۲- دوآل مسأله را نوشته و با به کار بردن شرایط مکمل زاید برای بهینگی یک جواب برای دوآل به دست آورید.

۳- اگر مقدار 90° در بردار سمت راست به 88 تقلیل پیدا کند چه مقدار، مقدار بهینه تابع مقصود تغییر می‌کند.

۴- اگر 90° به $90^\circ + \alpha$ تبدیل شود ($\alpha \in R$) مقدار α در چه فاصله می‌تواند تغییر کند تا جواب شدنی باقی بماند.

۵- اگر در سمت راست 4 ، تبدیل به $4 + \beta$ دامنه تغییرات β را به صورتی مشخص کنید که بهینه تغییر نکند.

(۳) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= -2x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 \\ \text{s. t. } & \quad x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 8 \\ & \quad 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & \quad x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 6 \\ & \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

با معرفی متغیرهای x_5 و x_6 و x_7 ، پایه و عکس پایه‌ی بهینه را به دست آورید.

۱- اگر بخواهیم یکی از مؤلفه‌های بردار b (بردار سمت راست) را افزایش دهیم، کدام را بایستی انتخاب کنیم؟

۲- اگر $b_1 = 8$ تبدیل به $8 + \alpha$ ($\alpha \geq 0$) بازاء چه مقدار یا مقداری از α پایه حاصل بهینه خواهند ماند؟

۳- اگر $b_1 = 20$ مقدار بهینه تابع مقصود چقدر خواهد بود؟

۴- یک کمپانی دستگاه جدیدی خریداری نموده است که به وسیله‌ی آن می‌تواند محصول جدیدی تولید نماید. فرض کنید x_8 مقدار این محصول و $b_4 = -25 + \frac{\lambda}{4}$ و $a_4 = (10, 20, 24 - 3\lambda)^t$ که $0 \leq \lambda \leq 6$ بازاء چه مقدار λ ، محصول جدید قابل تولید است؟ بازاء $\lambda = 4$ ، مقدار بهینه تابع مقصود چقدر می‌باشد؟

(۴) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

دوآل آن را بنویسید. بحث نمائید چه اثراتی روی پرایمال و دوآل و مقادیر بهینه پرایمال دوآل خواهیم داشت اگر:

- ۱- به مسأله‌ی پرایمال متغیر جدیدی معرفی گردد.
- ۲- به مسأله‌ی پرایمال قید نامساوی تحمیل شود.
- ۳- به مسأله‌ی پرایمال یک قید به صورت تساوی افزوده شود.

در هر سه حالت پس از استدلال کلی مثالی نیز بیاورید.

(۵) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید. جدول داده‌های مسأله چنین است.

		اجزاء موجود در یک کیلوگرم			حداقل خواسته شده
		سبزیجات	سیب‌زمینی	ذرت	
	A	۱۰	۱	۹	۵
ویتامین‌ها	B	۱۰	۱۰	۱۰	۵۰
	C	۱۰	۱۱	۱۱	۱۰
	قیمت به کیلوگرم برحسب سنت	۵۰	۱۰۰	۵۱	

مسأله را به صورت یک برنامه‌ریزی خطی فرموله نمائید و جواب بهینه را به دست آورید. پایه بهینه B و عکس آن را مشخص کنید. آیا مسأله، بهینه‌ی دگرین دارد یا نه؟ قیمت‌های سایه را مشخص نمائید. حدود تغییرات مؤلفه‌های b را چنان به دست آورید که پایه بهینه تغییر نکند.

(۶) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید $g(b_1)$ مقدار بهینه تابع مقصود باشد وقتی از بردار b فقط مؤلفه‌ی b_1 تغییر می‌کند و بقیه مؤلفه‌های b بدون تغییر می‌مانند. ثابت کنید $g(b_1)$ یک تابع قطعه قطعه خطی محدب است (البته فرض بر این بوده که b_1 به صورتی تغییر می‌کند که مسأله شدنی باقی می‌ماند و دوآل آن مسأله نیز شدنی است). به چه صورت می‌توان $g(b_1)$ را محاسبه نمود.

(۷) فرض کنید

$$S = \{x \mid Ax = b \ \& \ x \geq 0\}$$

فرض کنید $f_1(x) = c_1x$ و $f_2(x) = c_2x$. اگر:

$$\forall x \{x \in S \implies f_1(x) > 0 \ \& \ f_2(x) > 0\}$$

الگوریتمی جهت حل مسأله‌ی زیر ارائه دهید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f_1(x)f_2(x) \\ \text{s. t.} \quad & x \in S \end{aligned}$$

(تحت شرایط فوق).

(۸) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = cx \\ \text{s. t.} \quad & a^i x \geq b_i \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (p)$$

فرض کنیم x^1 جواب بهینه‌ی LP زیر باشد:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = cx \\ \text{s. t.} \quad & a^i x \geq b_i \quad i = 2, \dots, m \end{aligned}$$

و فرض کنیم x^2 جواب بهینه‌ی مسأله‌ی زیر باشد:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = cx \\ \text{s. t.} \quad & a^1 x = b_1 \\ & a^i x \geq b_i \quad i = 2, \dots, m \end{aligned}$$

ثابت کنید یکی از نقاط x^1 یا x^2 بایستی جواب بهینه‌ی مسأله (p) باشد.

(۹) مسأله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (*)$$

و فرض کنید

$$S = \{x \mid Ax = b \ \& \ x \geq 0\}$$

فرض می‌کنیم S_1 به صورت زیر تعریف شده باشد

$$S = \{x \mid x \in S \ \& \ x_n = 0\}$$

فرض می‌کنیم که مسأله LP $(*)$ غیرته‌گن می‌باشد و S و S_1 هر دو غیرخالی و محدود می‌باشند. تمامی داده‌ها به جزء c_n ثابت هستند. ثابت کنید عددی مانند γ موجود است، به طوری که بازاء هر $c_n > \gamma$ ، x_n یک جواب غیراساسی در تمامی جواب‌های بهینه $(*)$ است و بازاء هر $c_n < \gamma$ ، x_n یک جواب اساسی در تمامی جواب‌های بهینه $(*)$ می‌باشد. چگونه γ قابل محاسبه است؟

(۱۰) برای حل مسأله‌ی

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (**)$$

نوعی از الگوریتم سیمپلکس را به صورت زیر در نظر بگیرید. با یک جواب اساسی شدنی مانند \bar{x} شروع نمائید. و فرض کنید:

$$\bar{c} = \{\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n\}$$

سود نسبی مسأله نسبت به پایه مورد نظر که آن را B می‌نامید باشد. اگر $\bar{c}_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$) در این صورت \bar{x} جواب بهینه است و B پایه‌ی بهینه‌ی متناظر آن می‌باشد. و عملیات قطع می‌شود. فرض کنیم چنین نباشد، یعنی k ی یافت شود که $\bar{c}_k < 0$ مجموعه‌ی J را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$J = \{j \mid \bar{c}_j < 0\}$$

فرض کنید:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{j \in J} w_j a_j \\ c_{n+1} &= \sum_{j \in J} w_j c_j \end{aligned}$$

که در آن:

$$\forall j (j \in J \implies w_j > 0)$$

متغیری مانند x_{n+1} به $(**)$ اضافه نمائید که ستون آن a_{n+1} و ضریب آن در تابع مقصود c_{n+1} باشد. فرض کنیم:

$$x = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$$

x_{n+1} را وارد پایه نمائید و جواب حاصل را \tilde{X} بنامید که

$$\tilde{x} = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}\}$$

با ملحوظ داشتن این‌که:

$$x_{n+1} = \sum_{j \in J} w_j x_j$$

می‌باشد.

یک جواب شدنی \hat{x} از مسأله‌ی (***) متناظر \tilde{x} برای مسأله‌ی وسعت یافته^۱ به دست آورید. در حالت کلی، ممکن است \hat{x} برای (***) جواب اساسی شدنی نباشد. با روش قضیه‌ی هل دادن از این جواب یک جواب اساسی شدنی برای مسأله (***) به دست آورید به طوری که مقدار تابع مقصود در این جواب اساسی که آن را x^* می‌نامید از مقدار تابع مقصود در \hat{x} بیشتر نباشد. کار را با شروع از x^* تکرار نمائید تا به BFS جدیدی برسید. مقادیر w ها را می‌توان ۱ یا $w_j = 1$ برای $j \in J$ یا $w_j = -\bar{c}_j$ برای $j \in J$ یا هر عدد مثبت دیگر. این روش را با روشی که برای حل مسأله (***) از یک جواب اساسی شدنی شروع می‌نمودید مقایسه نمائید و بگوئید که از نظر محاسباتی کدام کارا می‌باشد. از نقطه‌نظر هندسی چه فرقی با روش سیمپلکس دارد؟

1) Augmented Problem

نمایه

اصل تثلیث قوی، ۸	۳۳، LRC
افراز اساسی شدنی قوی، ۲۳۵	M-بزرگ، ۲۳۴
افزودن یک قید نامساوی، ۳۰۳	B به عنوان پایه اولیه، ۳۰۵
اکیداً صعود، ۲۰۳	\hat{B} پایه، ۲۳
الگاریتم پرایمال-دوآل، ۲۰۸	سلطنتی انگلستان، ۹
الگاریتم متقارب، ۷	۱۸۰، C.P.U
بردار لکزیکو می نیمم، ۲۲	۱۸۰، Cash Memory
برنامه ریزی خطی، ۱	GUB، ۲۵۲
به دست آوردن پایه کاری، ۲۵۹	K.K.T، ۱۰۱
به روز نمودن عکس پایه، ۱۹۱	K.T. Marshal، ۴۵
به صورت متقارن، ۱۱۱	آماری، ۴
به کاربردن عکس پایه کاری برای محاسبه‌ی	ابرفصفحه، ۶
متغیرهای دوآل، ۲۶۵	استاندارد دوآلیتی، ۵۱
بهینه رآسی، ۸۴	

- بهبینه متناهی، ۸۴
- بهبینه‌ی دگرین، ۳۱۷
- بهبینه‌ی نامتناهی، ۱۸۳
- پایداری مدل‌ها، ۱۰۷
- پایه غیرتبه‌گن، ۲
- پایه کاری، ۲۶۰
- پرایمال محدود شده، ۲۰۹
- تابع قطعه‌قطعه خطی، ۸۲
- تابع آفین، ۷۹
- تابع قطعه‌قطعه خطی، ۸۳
- تابع لاگرانژ، ۱۱۲
- تابع لاگرانژین، ۱۱۵
- تابع مقصود، ۲۵
- تابع نقطه‌ای ماکزیمم، ۸۰
- تابع نقطه‌ای می‌نیمم، ۸۰
- تبه‌گنی، ۱
- تبه‌گنی پرایمال، ۱۳
- تحلیل پس از بهینگی، ۲۹۹
- تحلیل حساسیت، ۲۹۹
- ترکیب خطی، ۳
- تعداد متناهی، ۸
- تغییرات قیمت، ۳۱۰
- تغییر در ضریب یکی از اعضای ستون‌های
اساسی، ۳۱۶
- تغییر در ماتریس تکنولوژی، ۳۱۵
- تغییر ضرایب یک متغیر اساسی، ۳۱۱
- تغییرات سمت راست، ۳۱۴
- تفسیر اقتصادی مسأله، ۶۰
- تکنیک قید تصنعی، ۲۰۳
- تنگ می‌باشد، ۷۱
- جرج - دانتریگ، ۱۸۰
- جواب اساسی شدنی، ۲۲۶
- جهت‌های راسی، ۷
- جهت‌های رأسی شدنی، ۷
- حالتی‌که دوآل نامحدود می‌گردد، ۲۱۳
- حلقه دور می‌زند، ۱۱
- دانتریگ، ۹
- درجه تبه‌گنی، ۲۲۵
- دوآل غیرتبه‌گن، ۱۲
- دوآلیتی، ۵۱
- دور افتادن، ۴۵
- رابطه‌ی بین پرایمال - دوآل، ۶۲
- روش سیستماتیک، ۲۲۹
- روش سیمپلکس، ۱۶، ۴۴
- روش سیمپلکس دوآل، ۱۹۵
- روش شهودی، ۱۱۰
- روش مجرد، ۱۱۰
- روش همگرا، ۲۲۱
- زوج‌های مکمل، ۷۲
- زیرفضاها، ۴

- ستون های متغیرهای غیراساسی، ۳۱۵
- سود نسبی، ۳۱۲
- سیمای یکنوایی، ۳۰
- سیمپلکس اصلاح شده، ۱۸۱، ۱۸۲
- سیمپلکس پرایمال، ۷۶
- شرایط *CS*، ۱۰۴
- شرایط *K.K.T*، ۲۱۵
- شرایط کاروش - کهن - تاکر، ۹۹
- شرایط مکمل زاید، ۲۱۷
- شرایط مکمل زائد، ۱۱۶
- شرایط منظمی، ۱۲۱
- صریح عکس ماتریس، ۱۸۲
- صورت جدولی روش پرایمال-دوآل، ۲۱۹
- صورت هائی دیگری از لم فارکاس، ۹۷
- ضعیف دوآلیتی، ۶۳
- عمل محوری، ۱۹۸
- غیرتبه گن، ۱
- غیرتبه گن (اولیه)، ۱
- فاز اول، ۴۷
- فاز اول سیمپلکس، ۲۳۴
- فاز اول و فاز دوم، ۲۵۵
- فرم حاصل ضربی عکس ماتریس پایه، ۱۸۲
- فرم کانونی دوآلیتی، ۵۱
- فرم حاصل ضرب، ۱۸۷
- قاعده می نیمم مثبت، ۱۶
- قاعده بلند، ۲۸
- قاعده ی بلند، ۳۰، ۲۴۴
- قضیه تاکر (قضیه ای از شقوق)، ۱۰۷
- قضیه قوی دوآلیتی، ۶۷
- قضیه ی قوی دوآلیتی، ۱۱۶، ۲۱۳
- قضیه ی مکمل زائد، ۷۲
- قضیه ی موتزکینز (قضیه ای از شقوق)، ۱۰۵
- قطعه قطعه خطی، ۸۰
- قید زائد، ۶
- قیمت های سایه تحت تبه گنی، ۷۹
- قیود تساوی زاید، ۳۴
- قیود زاید نامساوی، ۳۵
- کاربردهای عملی تحلیل حساسیت، ۳۱۷
- کاردینال، ۱۱
- کثیرالجمله، ۱۲
- کدهای کامپیوتری، ۱۸۴
- کران بالا، ۲۲۲
- کران بالای تعمیم یافته، ۲۵۱
- کران پائین، ۲۲۲
- کوچکترین اندیس، ۲۹
- گره ای، ۹
- گیر کردن، ۳۲، ۳۳
- لکزیکو مثبت، ۱۸، ۲۳
- لکزیکو منفی، ۱۸

مشق جهت دار یک طرفی، ۹۱	لکزیکو می نیمم، ۱۸
مشق سمت چپ، ۹۱	لکزیکو می نیمم بردار، ۲۱
مشق سمت راست، ۹۱	لم فارکاس، ۹۴
معرفی فعالیت جدید، ۳۰۰	ماتریس تکنولوژی، ۳۰۴
معرفی یک قید اضافی به صورت تساوی، ۳۰۷	متغیر تصنعی، ۴۷
مکمل زاید، ۲۰۸	متغیر خارج شونده، ۹
منحصر به فرد، ۱۶	متغیر دوآل، ۵۲
ناحیه شدنی، ۵	متغیرهای تصنعی، ۱۹۸
نامحدود بودن، ۱۸، ۴۷	متغیرهای غیراساسی، ۲۲۵
نقطه رأسی تبه‌گن، ۴۲	متغیرهای کران دار، ۲۲۲، ۲۴۴
نقطه غیراساسی، ۲۰۶	متغیرهای کلیدی و غیرکلیدی، ۲۵۸
نقطه‌ی بهینه، ۴۲	متناهی، ۳۲
نقطه‌ی زینی، ۱۱۳	مثال نقض، ۴۸
هدف‌های استراتژیک، ۱۸۰	مجموعه‌های ضروری و غیرضروری، ۲۵۷
همگرایی الگاریتم سیمپلکس، ۲۶	مجموعه‌ی منفرد، ۲۲
یال، ۱۵	محدب، ۸۱
	محوری تبه‌گن، ۳۳
	مدل تعدیل، ۲۹۹
	مدل تعدیل یافته، ۳۰۳
	مدل موردنظر ناپایدار می‌باشد، ۱۰۸
	مسأله متقارن LP، ۱۱۶
	مسأله‌ی آشوب شده، ۱۷
	مسأله‌ی وسعت یافته، ۳۲۴
	مسائل حمل و نقل، ۳۲
	مستقل خطی، ۲