ریاضیات عمومی (۲)

ویژه‌ی دانشجویان فنی مراکز علمی کاربردی
و آزاد اسلامی

محمدعلی عزیزپور
مدرس دانشگاه

1396

موضوع: ______ تاریخ: / /

مقدمه:

در طول زمان کتاب‌های زیادی با موضوع

ریاضیات عمومی (۱) و (۲) نوشته شده

بعضاً بسیار کامل و جامع هستند ولیکن درباره

از موضوعات حجم مطالب و سنگینی دریافت مفاهیم

آن از سوی دانشجویان، بنده را به این فکر واداشت

که جزوه در محدوده‌ی لازم که متناسب با رشته‌هایی

که مشغول تحصیل هستند و بیشتر جنبه فنی و کاربردی

دارند، مطالبی از ریاضیات عمومی گفته شود، بنابراین

این کتاب که محصول همان اندیشه می‌باشد

از همکاران و اساتید راضی می‌خواهم نارسائی‌ها و نقص مطالب

را به این بنده یادآوری کرده تا در آینده کامل سازیم.

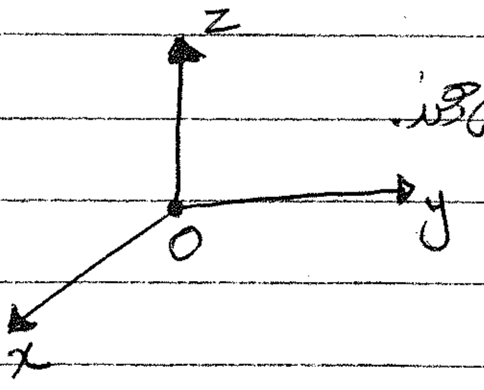
با احترام، عزیزپور

در مباحث علمی مختلف با دو نوع کمیت مواجه خواهیم شد:

الف) کمیت عددی (اسکالر): مانند طول و حجم و زمان و دما و جمعیت که فقط طول و بزرگی آن‌ها مورد نظر است.

ب) کمیت برداری: مانند سرعت و شتاب و نیرو و شدت میدان الکتریکی که جدا از بزرگی و طول آن، جهت آن‌ها هم مورد نظر می‌باشد.

در دوره‌ی متوسطه با فضای دو بعدی و ویژگی‌ها صفحه و بردار با مختصات (x,y) آشنا شدید. در اینجا هم همان مباحث بردارها و ویژگی‌های آن در فضای سه بعدی یعنی با مختصات (x,y,z) ارائه می‌یابد و این فضا را با R^3 نمایش می‌دهند.



بردار: هر پاره‌خط در فضا را بردار می‌نامیم. و زمانی دو بردار مساوی‌اند که دارای طول و جهت یکسان باشند.

اگر $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ دو نقطه در فضا باشند

داریم:

<u>بردار AB</u> $= \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1)$

<u>طول بردار AB</u> $= |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

<u>تذکر</u>: اگر بردار $\vec{v} = \langle x, y, z \rangle$ مفروض باشد و K یک عدد حقیقی باشد آنگاه:

$K\vec{v} = \langle Kx , Ky , Kz \rangle$

<u>بردارها موازی</u>: دو بردار $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

را موازی می‌گوییم هرگاه $\forall t \in \mathbb{R} : \vec{a} = t\vec{b}$

یا به عبارتی: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

مثال: نشان دهید چهارضلعی ABCD با مختصات $A = (8, 8, 7)$, $B = (2, -1, -5)$, $C = (4, 2, -6)$, $D = (8, 8, 2)$ یک ذوزنقه است؟

راهنمایی: کافی است ثابت کنید فقط دو ضلع موازی دارد.

$\overrightarrow{AB} = (-6, -9, -12)$

$\overrightarrow{CD} = (4, 6, 8)$

$\rightarrow \frac{-6}{4} = \frac{-9}{6} = \frac{12}{8} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

ولی به روش مشابه ثابت می‌شود که $\overrightarrow{AD} \nparallel \overrightarrow{BC}$

جمع دو بردار : با فرض دو بردار $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$, $\vec{b}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\langle a_1\pm b_1 , a_2\pm b_2 , a_3\pm b_3\rangle$$

قرینه بردار : $-\vec{a}=\langle -a_1 , -a_2 , -a_3\rangle$

بردار یکانی : $\overrightarrow{U_a}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$

ترکیب خطی یک بردار برحسب بردارهای پایه :

$$\begin{aligned}\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle&=\langle a_1,0,0\rangle+\langle 0,a_2,0\rangle+\langle 0,0,a_3\rangle\\&=a_1\langle 1,0,0\rangle+a_2\langle 0,1,0\rangle+a_3\langle 0,0,1\rangle\\&=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\end{aligned}$$

مثال: هرگاه $A(4,3,1)$, $B(2,5,7)$, $C(-2,4,0)$ سه نقطه از فضا باشند مطلوبست :

الف) بردار $\overrightarrow{AB}=\langle -2, 2, 6\rangle$

ب) بردار $\overrightarrow{AC}=\langle -6, 1, -1\rangle$

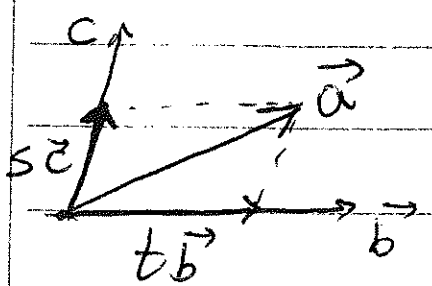
ج) طول بردار $\overrightarrow{AB}=\sqrt{(-2)^2+(2)^2+6^2}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

د) $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\langle -4,4,12\rangle-\langle -18,3,-3\rangle=\langle 14,1,15\rangle$

هـ) $\overrightarrow{U_{AB}}=\dfrac{1}{2\sqrt{11}}\langle -2,2,6\rangle=\langle \dfrac{-1}{\sqrt{11}},\dfrac{1}{\sqrt{11}},\dfrac{3}{\sqrt{11}}\rangle$

ترکیب خطی بین سه بردار

برای سه بردار فرضی $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ می‌توان اعدادی چون s, t را چنان یافت که:
$t\vec{b} + s\vec{c} = \vec{a}$



زاویه‌های هادی بردار: اگر بردار فرضی $\vec{a}$ با محورهای x و y و z به ترتیب زوایای α ، β ، γ بسازند در آن صورت: $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

سؤال: ثابت کنید $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ؟

مثال: زاویه‌های بردار $\vec{a} = \langle 3, 2, -6 \rangle$ با محورهای مختصات می‌سازد را بیابید؟

$$|\vec{a}| = \sqrt{9+4+36} = 7$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} = \frac{3}{7}, \quad \cos\beta = \frac{2}{7}, \quad \cos\gamma = \frac{-6}{7}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) = 64{,}62^\circ, \quad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 73{,}39^\circ, \quad \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{7}\right) = 149^\circ$$

مثال: آیا زاویه‌های $\alpha = 45^\circ$ ، $\beta = 60^\circ$ ، $\gamma = 150^\circ$ به ترتیب می‌توانند زوایای هادی یک بردار باشند؟ (با دلیل و راه حل)

تمرین: بردار یکانی بردارهای $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ ، $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ را بدست آورده و سپس $2\vec{a} - \vec{b}$ ، $\vec{a} + 3\vec{b}$ را محاسبه کنید؟

تمرین: با فرض $A=\langle 2,1,3\rangle$ ، $B=\langle -1,2,2\rangle$ مختصات نقطه C
را طوری بیابید که $4\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{BC}$

تمرین: بردار $\vec{c}=\langle 0,2,-1\rangle$ را به صورت ترکیب خطی از بردارها
$\vec{a}=\langle 0,1,3\rangle$ ، $\vec{b}=\langle 0,5,2\rangle$ بنویسید؟

تمرین: برداری در فضا با محورهای x و y به ترتیب زوایای 45° و 60°
می‌سازد، زاویه‌هایی که این بردار می‌تواند با محور z ها بسازد
را مشخص کنید؟

ضرب داخلی دو بردار:
اگر دو بردار $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ ، $\vec{b}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$ آنگاه:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

• و اگر زاویه بین دو بردار مفروض α باشد آنگاه ضرب داخلی
با تساوی به شکل زیر هم بیان می‌شود:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$

نتیجه: $$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

مثال: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار با طول‌های ۲ ، ۳ و زاویه بین آنها 120° باشد.
طول بردار $(2\vec{a}-\vec{b})$ و $(\vec{a}+\vec{b})$ را بیابید؟

طول بردار $(2\vec{a}-\vec{b}) \Rightarrow |2\vec{a}-\vec{b}|^2 = (2\vec{a}-\vec{b}) \cdot (2\vec{a}-\vec{b})$

$= 4|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b}$

$= 4(2)^2 + (3)^2 - 4(2)(3)\underbrace{\cos(120^\circ)}_{-1/2} = 37 \rightarrow$ طول $(2\vec{a}-\vec{b}) = \sqrt{37}$

حالا شما طول $(\vec{a}+\vec{b})$ را مانند مثال بدست آورید؟

تمرین: اگر دو بردار $\vec{a} = \langle 2, t, 3\rangle$, $\vec{b} = \langle -4, 2, 1\rangle$ برهم عمود باشد مقدار t چند است؟

تمرین: زاویه بین دو بردار $\vec{a} = 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ را بدست آورید؟

تمرین: اگر طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب ۳ و ۴ و زاویه بین آنها 30° است. زاویه بین دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$.

تحقیق: تصویر یک بردار بر بردار دیگر را چگونه محاسبه می کنیم. و به کمک آن تصویر بردار $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ بر $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ را بدست آورید؟

ضرب خارجی دو بردار: با فرض دو بردار $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ ضرب خارجی دو بردار از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{(به کمک تعریف دترمینان)},$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

مثال: با فرض $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ، $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ بردارها $\vec{a} \times \vec{b}$ و $\vec{a} \times \vec{j}$ ، $\vec{b} \times \vec{i}$ را محاسبه کنید؟

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{b} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

تذکر: مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده با دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر طول $(\vec{a} \times \vec{b})$ خواهد بود.

مثال: متوازی الاضلاعی با دو بردار $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ، $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ چه مساحتی دارد؟

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1 + 49 + 25} = 5\sqrt{3}$$

مثال: مساحت مثلث ABC به رأس‌های $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$, $C(5,2,6)$ را بدست آورید؟

$\overrightarrow{AB} = \langle 2,-2,-3 \rangle$

$\overrightarrow{AC} = \langle 4,0,6 \rangle \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 14$$

تذکر: حجم متوازی السطوح با سه بردار $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$V = \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right|$$

که به ضرب مختلط سه بردار یا ضرب عددی سه بردار می‌گویند.

مثال: حجم جعبه‌ای که توسط سه بردار زیر ساخته می‌شود را حساب کنید؟

$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{k}$, $c = 7\vec{j} - 4\vec{k}$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -23 \Rightarrow V = 23$$

تذکر: اگر برای سه بردار $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ داشته باشیم

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

آنگاه سه بردار هم صفحه‌اند.

مثال: آیا سه بردار $\vec{a} = \langle 2,3,-1 \rangle$, $\vec{b} = \langle 1,-1,3 \rangle$, $\vec{c} = \langle 1,9,-11 \rangle$ هم صفحه‌اند؟ (راهنمایی: ثابت کنید $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$)

تمرین: مساحت‌های متوازی‌الاضلاع و مثلثی که توسط دو بردار $\vec{a} = 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ تولید می‌شود را محاسبه کنید؟

تمرین: مساحت مثلثی با رئوسی به مختصات $A(2,0,1)$ $B(0,2,0)$ و $C(0,0,1)$ را بیابید؟

تمرین: هم صفحه بودن سه بردار $\vec{a}=\langle 1,4,-7\rangle$ $\vec{b}=\langle 2,-1,4\rangle$ و $\vec{c}=\langle 0,-9,18\rangle$ را بررسی کنید؟

تحقیق: معادله خط در فضا و فاصله نقطه از خط در فضا و وضعیت دو خط در فضا و معادله صفحه را جستجو کرده و توضیح دهید.

فصل دوم «ماتریس‌ها و حل دستگاه معادلات خطی» مدرس: محمدعلی عزیزپور

ماتریس: آرایش مستطیل شکل از اشیاء که در m سطر و n ستون باشد

را یک ماتریس $m \times n$ می‌گویند، معمولاً نام ماتریس با حروف لاتین بزرگ نمایش

می‌دهند. به هر عضو ماتریس درایه ماتریس می‌گویند.

اسامی خاصی از ماتریس به نام‌های ماتریس سطری، ماتریس ستونی، مربعی

، بالا مثلثی، پایین مثلثی، قطری، ماتریس صفر، یا پیوستاری (؟) در ادامه

وجود دارند که مفاهیم آن به عنوان تحقیق به دانشجو واگذار می‌شود.

ضرب عدد در ماتریس: کافی است آن عدد در همه درایه‌های ماتریس ضرب شود.

قرینه ماتریس: کافی است همه‌ی درایه‌های ماتریس قرینه شوند.

جمع جبری ماتریس‌ها: اگر دو ماتریس هم مرتبه باشند هر درایه با درایه‌ی نظیر خودش قابل جمع شدن می‌باشد

ضرب ماتریس‌ها:

اگر تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد آنگاه (AXB) قابل اجرا است. به این شکل که از ماتریس اولی سطر و از ماتریس دومی ستون انتخاب کرده و مانند ضرب نقطه‌ای دو بردار عمل می‌کنیم.

دترمینان ماتریس: اگر ماتریس A مربعی باشد
دترمینان آن از دستور زیر بدست می‌آید:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

تذکر: برای مرتبه ۳×۳ می‌توان هم روش ضرب خارجی دو بردار و

هم روش ساروس عمل کرد:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 & c_3 \end{array}\right|$$

$$=(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2)-(a_1b_3c_2+a_2b_1c_3+a_3b_2c_1)$$

تحقیق: دترمینان ماتریس مربعی از مرتبه ۴ و ۵ به چه شکل قابل محاسبه است؟

تذکر: دترمینان ماتریس‌های بالا مثلثی و پایین مثلثی و قطری برابر حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی است.

معکوس یا وارون یک ماتریس:

ماتریس A معکوس پذیر هست اگر از مرتبه‌ی n باشد و $\det A \neq 0$ و سپس معکوس آن از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adj(A)$$

مثال: با توجه به ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}2&3&5\\1&-1&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&2&-2\\4&1&0\end{bmatrix}$ به موارد زیر پاسخ دهید:

الف) $2A+3B = \begin{bmatrix}4&6&10\\2&-2&8\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&6&-6\\12&3&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4&12&4\\14&1&8\end{bmatrix}$

ب) $2A+B+D=0 \quad 2\begin{bmatrix}4&6&10\\2&-2&8\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&6&-6\\12&3&0\end{bmatrix} + D = 0$

آن‌گاه ماتریس D را بیابید؟

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}8&18&14\\16&-1&16\end{bmatrix} + D = 0$$

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix}-8&-18&-14\\-16&1&-16\end{bmatrix}$$

مثال: با توجه به دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&3\\5&8\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}$ به موارد زیر پاسخ دهید:

الف) $AB = \begin{bmatrix}2&3\\5&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10&22\\29&58\end{bmatrix}$

ب) $\det(BA) \Rightarrow BA = \begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\5&8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12&19\\36&57\end{bmatrix} \Rightarrow \det(BA) = 684-684 = 0$

ج) $A^{-1} \Rightarrow \det A = 1 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix}8&-3\\-5&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8&-3\\-5&2\end{bmatrix}$

د) $B^{-1} \Rightarrow$?? (به عنوان تمرین)

موضوع: تاریخ: / /

تمرین: در میان ماتریس‌های زیر را بیابید؟ و سپس معکوس آن‌ها را بیابید؟

الف) $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 4 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

تمرین: با توجه به ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) $A^{-1}+B-2I=$

ب) $2A-B+C=0 \Longrightarrow C=?$

ج) $A^{-1}B^{-1}=$

د) $(BA)^{-1}=$

حل دستگاه معادلات خطی :

در دوره متوسطه با دستگاه دو معادله دو مجهولی و سه معادله سه مجهولی آشنا شدید

که معمولاً به روش حذفی قابل حل بودند.

در اینجا با روش‌های مختلفی برای حل یک دستگاه n معادله‌ای n مجهولی آشنا می‌شویم.

روش اول: (روش حذفی) با اعمال ریاضی در هر مرحله به حذف مجهولات تا جایی که به یک مجهول رسیده، ادامه می‌دهیم و به سادگی با یافتن اولین مجهول، مجهولات دیگر نیز بدست خواهند آمد.

مثال: دستگاه معادلات مقابل را به روش حذف حل کنید؟

$$*\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+4z=8 \\ x+3y+9z=27 \end{cases}$$

$$* \longrightarrow z=1-x-y \xrightarrow[\text{در دو معادله دیگر}]{\text{جایگذاری}} \begin{cases} x+2y+4(1-x-y)=8 \\ x+3y+9(1-x-y)=27 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times(-3)} \begin{cases} -3x-2y=4 \\ -8x-6y=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x+\cancel{6y}=-12 \\ -8x\cancel{-6y}=18 \end{cases}$$

$$x=6 \longrightarrow y=-11$$

$$* \longrightarrow z=6$$

لازم به ذکر است که می‌توانستیم به جای انتخاب تغییر متغیر با حذف z از هر دو معادله دلخواه، تشکیل یک دستگاه جدید هم مجهول بدست آورده شوند.

روش دوم / ماتریس معکوس: کافی است معکوس ماتریس ضرایب را از سمت راست در ماتریس ثابت‌ها معادله ضرب کنیم به سادگی مقادیر مجهول‌ها به دست می‌آیند.

مثال: دستگاه $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ را با روش ماتریس معکوس حل کنید؟

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

یافتن معکوس آن

$$\det = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{11}+\frac{21}{11}=2 \\ \frac{3}{11}-\frac{14}{11}=-1 \end{bmatrix} \Rightarrow x=2,\ y=-1$$

روش سوم / روش کرامر: ابتدا یافتن دترمینان ماتریس ضرایب را به دست آورده سپس از فرمول زیر برای یافتن مجهولات استفاده می‌کنیم

$[A]=$ ماتریس ضرایب

$[C]=$ ماتریس ثابت‌ها

$\longrightarrow$ $[A_j]=$ ماتریسی است که ستون ثابت‌ها به جای ستون jام $[A]$ قرار می‌گیرد

$$\Rightarrow x_j=\frac{\det A_j}{\det A}$$

موضوع: .... تاریخ: / /

مثال: با روش کرامر دستگاه مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 3x+6y-z=0 \\ x-y-4z=3 \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A=-32$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x=\frac{1}{-32}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}=2 \quad , \quad y=\frac{1}{-32}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}=-1$$

$$z=\frac{1}{-32}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

روش چهارم (روش حذفی گاوس): هر دستگاه معادلات را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\underbrace{A}_{\text{ضرایب}}\ \underbrace{X}_{\text{مجهولات}} = \underbrace{B}_{\text{ثابت‌ها}}$$

سپس با اعمال سطری مقدماتی ماتریس‌ها روی ماتریس $[A \,\vdots\, B]$ می‌توانیم ماتریس A را به شکل بالا مثلثی تبدیل کرده و سپس با روش حذفی به سادگی مقادیر مجهولات بدست می‌آید.

مثال: دستگاه مقابل را با روش حذفی گاوس حل کنید؟

$$\begin{cases} x+y-z=5 \\ x+2y-3z=8 \\ y-2z=1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$0z=1$ و این یعنی غیرممکن پس دستگاه دارای جواب نمی‌باشد.

روش سوم (روش گاوس جردن): در این روش همان ماتریس $[A \vdots B]$ را به یک ماتریس قطری با درایه‌های ۱ تبدیل می‌کنیم.

مثال: دستگاه مقابل را به روش گاوس جردن حل کنید؟

$$\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ 4x+5y+6z=24 \\ 3x+y-2z=4 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}$$

$$\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-4R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -R_3 \end{array} \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 11 & 23 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3-5R_2]{R_1-2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2-2R_3]{R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow x=4,\ y=-2,\ z=3$$

تمرین: دستگاه معادلات زیر را به روش گفته شده حل کنید؟

1) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ (ماتریس معکوس)

2) $\begin{cases} x+2y-z=6 \\ 2x-y+2z=-2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ (کرامر)

3) $\begin{cases} x+2y+2z=5 \\ x-3y+2z=-5 \\ 2x-y+z=-3 \end{cases}$ (حذفی گاوس)

4) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+4z=8 \\ x+3y+9z=27 \end{cases}$ (گاوس جردن)

5) همه موارد را به روش حذفی معمولی هم حل کنید؟

هرگاه متغیر y به متغیر مستقل بنام x وابسته باشد بطوری که y تابعی از x باشد
به آن تابع یک متغیره $y = f(x)$ می‌گویند.

مثال: مساحت مربع یک تابع یک متغیره برحسب ضلع مربع می‌باشد
$S = x^2$

در برخی موارد کمیت‌های فراوانی هستند که به دو یا چند متغیر مستقل وابسته‌اند
که به آنها توابع چند متغیره می‌گویند.

مثال: حجم یک استوانه به شعاع r و ارتفاع h: $V = f(r,h) = \pi r^2 h$ دو متغیره

مساحت کل یک مکعب مستطیل با ابعاد a, b, c: $S = 2(ab+ac+bc)$ سه متغیره

دامنه توابع چند متغیره:

همانند توابع یک متغیره، منظور از دامنه یک تابع چند متغیره، بزرگترین مجموعه‌ای از نقاط $(x_1,\dots,x_n)$ می‌باشد که به ازای آنها تابع $f(x_1,\dots,x_n)$ یک عدد حقیقی باشد.

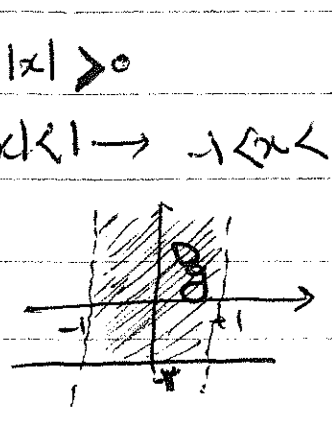
مثال: (1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$ $\qquad x^2+y^2-9\geq 0 \Rightarrow x^2+y^2\geq 9$

پس نقاط (x,y) هایی که $x^2+y^2\geq 9$ باشد یعنی خارج دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز $(0,0)$ می‌باشد.

(2) $g(x,y)=\dfrac{\sqrt{y+2}}{\sqrt{1-|x|}}$ $\qquad y+2\geq 0\ ,\ 1-|x|>0$

$y\geq -2\ ,\ |x|<1 \rightarrow -1<x<1$

$\Rightarrow D_g=\{(x,y):\ y\geq -2,\ -1<x<1\}$



تذکر: برای رسم منحنی ها $z=f(x,y)$ (تابع دو متغیره) و یا بیشتر از

دو متغیر های ما رفتن سطح تراز برای z ها مختلف می باشد

که در این جا از بیان بیشتر صرف نظر می کنم.

تحقیق. نمودار های $z=f(x,y)=x^2+y^2$ و $z=f(x,y)=Ln(x^2+y^2)$

و $w=f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

را رسم کنید؟

تمرین: دامنه توابع زیر را بیابید؟

الف) $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ ب) $f(x,y)=\sqrt{y^2-x}$

حد و پیوستگی توابع چند متغیره:

همانند توابع تک متغیره تعاریف حد و پیوستگی نیز در اینجا کاربرد

دارد. به طور مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(3,2)} (4x+y^2)=4(3)+2^2=16$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{x^2y}{x+y}=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{3},2)} y\sin\left(\frac{x}{y}\right) =$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \sqrt{9-x^2-y^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(e,1)} \ln(x^2y^3) =$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-xy}{x^3-y^3} =$$

تذکر: روش‌های رفع ابهام هم برای حدهای دو متغیره به بالا وجود دارد که از ارائه‌ی بحث گسترده‌ی آن صرف‌نظر می‌کنیم.

سؤال: آیا تابع $f(x,y)=\frac{x^2+2y}{x+y^2}$ در $(0,1)$ پیوسته است؟

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+2y}{x+y^2} = 2 \quad , \quad f(0,1)=2$$

پس تابع فوق در $(0,1)$ پیوسته است؟

تمرین: حد تابع $f(x,y)=\dfrac{3x^2-y^2+5}{x^2+y^2+2}$ در $(0,1)$ و

حد تابع $f(x,y)=\dfrac{x+y}{\sqrt{y}}$ در $(0,4)$ بدست آورید؟

تمرین: پیوستگی توابع $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^4}{x^2-y^2}$ در $(-1,1)$ و

$f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ در $(0,\sqrt{5})$ بررسی کنید؟

مشتق توابع چند متغیره:

در تابع n متغیره، به جز یکی بقیه متغیرها را می‌توان ثابت در نظر گرفت

و نسبت به آن متغیر ثابت مشتق گرفت، که به این عمل مشتق گیری جزئی

می‌گویند و برای تمایز با نماد d که مشتق معمولی را نمایش می‌داد با

نماد ∂ (رُند) نمایش می‌دهیم.

به عنوان مثال، مشتق تابع $f(x,y)=x^2y^3+2xy-2$

نسبت به متغیر x، می‌شود:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy^3+2y$$

یا

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^2+2x$$

تمرین:

1) $f(x,y)=x^2 \sin y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=? \quad , \frac{\partial f}{\partial y}=?$

2) $f(x,y)=\frac{x}{y+x^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=? \quad , \frac{\partial f}{\partial y}=?$

3) $f(x,y,z)=x^2+\ln(yz) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=? \quad , \frac{\partial f}{\partial y}=? \quad , \frac{\partial f}{\partial z}=?$

مشتقات جزئی مراتب بالاتر:

اگر $z=f(x,y)$ آن‌گاه نمادهای زیر را این چنین تعریف می‌کنیم:

$\frac{\partial z}{\partial x}$ = مشتق مرتبه اول نسبت به x = f_x

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ = مشتق جزئی است ابتدا نسبت به x سپس نسبت به y = f_{xy}

به همین ترتیب مشتقات جزئی با متغیرهای گوناگون و مراتب بالاتر تعریف می‌گردند.

مثال: مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم $f(x,y)=x^3y^4$ را بیابید؟

$f_x=3x^2y^4 \longrightarrow f_{xy}=12x^2y^3$

$f_y=4x^3y^3 \longrightarrow f_{yx}=12x^2y^3$

$\longrightarrow f_{xx}=?$

$\longrightarrow f_{yy}=?$

تمرین: مشتقات جزئی مراتب اول و دوم توابع زیر را بیابید؟

الف) $f(x,y)=\cos y+ye^x$ ج) $f(x,y)=\ln(2x-3y)$

ب) $f(x,y)=x^3y^2$ د) $f(x,y)=xe^y-ye^x$

تذکر: معادله لاپلاس: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$

معادله موج: $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

سؤال: با توجه به تذکر گفته شده ثابت کنید توابع

$f(x,y,z)=2z^3-3(x^2+y^2)z$ و $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ و

موضوع: تاریخ: / /

$f(x,y,z)=e^{3x+4y}\cos 5z$ در معادله لاپلاس و

توابع $w=\sin(x+ct)$ و $w=\tan(2x-2ct)$، $w=\ln(2x+2ct)$

در معادله موج صدق می‌کنند؟

مشتق گیری ضمنی:

در بحث توابع یک متغیره، به سادگی با مشتق گیری ضمنی آشنا شدیم.
ولی گاهی اوقات برای توابع چند متغیره نمی‌توان به سادگی توابع را
به صورت اجتماعی از چند تابع یک متغیره نوشت لذا برای یافتن
مشتق ضمنی آنها همانند مثال حل شده زیر عمل کرده و به عنوان یک
الگو می‌توان به بقیه مسائل تعمیم داد.

1) $x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2x}{2z}=-\dfrac{x}{z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2y}{2z}=-\dfrac{x}{z} \end{cases}$

2) $xz+y\ln z=x^2+y \Rightarrow xz+y\ln z-x^2-y=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{z-2x}{x+\frac{y}{z}} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\ln z-1}{x+\frac{y}{z}} \end{cases}$$

مشتق گیری به روش قاعده زنجیره‌ای:

الف) اگر $Z=f(x,y)$ که x و y توابع مشتق پذیر برحسب متغیر t باشند

آنگاه Z تابعی مشتق پذیر از t است:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}$$

ب) اگر $w=f(x,y,z)$ مشتق پذیر بوده و x و y، z هم

توابعی مشتق پذیر از جنس t باشند آنگاه مشتق w نسبت به t:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\times\frac{dz}{dt}$$

ج) اگر $Z=f(x,y)$ که $x=g(r,s)$ ، $y=h(r,s)$ آنگاه

مشتقات جزئی Z نسبت به r و S به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial s}$$

مثال: اگر $z=\sin(x^2y)$, $x=\sqrt{t}$, $y=t^2$ آنگاه $\frac{dz}{dt}$ را بیابید؟

$$\frac{dz}{dt}=\left(2xy\cos(x^2y)\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)+\left(x^2\cos(x^2y)(2t)\right)$$

مثال: اگر $w=xy+2z$, $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$ آنگاه
به کمک قاعده‌ی زنجیره‌ای $\frac{dw}{dt}$ را در $t=0$ بیابید؟

$$\frac{dw}{dt}=(y)(-\sin t)+(x)(\cos t)+(2)(1)\overset{t=0}{=\!=}3$$

مثال: اگر $y=r^2+\ln s$, $x=\frac{r}{s}$, $z=x^2+2y$ آنگاه به کمک
قاعده‌ی زنجیره‌ای $\frac{\partial z}{\partial s}$ را برحسب r و s بیابید؟

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$=(2x)\left(-\frac{r}{s^2}\right)+(2)\left(2r+\frac{1}{s}\right)\underset{y=r^2+\ln s}{\overset{x=\frac{r}{s}}{=\!=}}\frac{2s^2-2r^2}{s^3}$$

تمرین: $\frac{\partial z}{\partial r}=?$

تمرین: در توابع ضمنی زیر $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را بیابید؟

1) $x^2+y^2+3z^2=4x$

2) $xz+y\ln x-z^2y=4$

3) $xy+x^2z^2=4-2yz$

4) $e^{2x+yz}+z^3xy=1$

تمرین: در موارد زیر مشتق خواسته شده را به کمک قاعده‌ی زنجیره‌ای محاسبه کنید؟

1) $z=e^x\ln y,\quad x=2t+s,\ y=t+s^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial t}=?,\ \frac{\partial z}{\partial s}=?$

2) $w=z-\sin(x^2y),\quad x=2t^2,\ y=t^3,\ z=e^t \longrightarrow \frac{dw}{dt}=?$

تمرین: اگر $z=x^2y+4x^3y^2$ و x و y توابعی مشتق‌پذیر از t و

در نقطه $(x,y)=(2,1)$ داشته باشیم: $\frac{dx}{dt}=2,\ \frac{dy}{dt}=3$

مطلوب است $\frac{dz}{dt}$؟

تمرین: ابعاد یک مکعب مستطیل x و y و z است. طول x با سرعت $2\%/s$ و طول y با

سرعت $1\%/s$ در حال افزایش و طول z با سرعت $3\%/s$ در حال کاهش است.

سرعت تغییر حجم این مکعب در لحظه $(x_0,y_0,z_0)=(5,1,4)$ را بیابید؟

تحقیق: مشتق جهتی برای تابع دو متغیره را با یک مثال بیان کنید؟

خطا، تقریب و دیفرانسیل

هرگاه $z=f(x,y)$ یک تابع دو متغیره که در اطراف (x_0,y_0) مشتق پذیر باشد نمو تابع f به صورت زیر تعریف می کنیم،

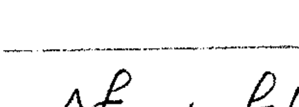
$$\Delta f = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

که به سادگی می توان ثابت کرد اگر Δx و Δy مقادیر کوچکی باشند داریم:

$$\Delta f \cong f_x(x_0,y_0)\,\Delta x + f_y(x_0,y_0)\,\Delta y$$

از این فرمول برای یافتن خطا یا مقدار تقریبی بعضی از عبارات عددی استفاده کرد.

مثال) طول و عرض مستطیلی به ترتیب 40^m و 30^m با خطای اندازه گیری برای طول 0.2^m بیشتر و برای عرض 0.1 متر کمتر مفروض است. در اندازه گیری طول قطر این زمین احتمال چقدر خطا وجود دارد؟



قطر $D = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \to f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

با فرض $(x_0,y_0)=(40,30)$, $\Delta x = 0.2$, $\Delta y = -0.1$

$\Delta D \cong f_x(40,30)\,\Delta x + f_y(40,30)\,\Delta y = \frac{4}{5}\times 0.2 + \frac{3}{5}\times -0.1 = 0.1^m$ بیشتر

مثال: مقدار تقریبی $\sin 32^\circ . \cos 29^\circ$ را بیابید؟

$f(x,y)=\sin x . \cos y \longrightarrow f_x=\cos x . \cos y \ , \ f_y=-\sin x . \sin y$

$(x,y)=(30^\circ,30^\circ) \ , \ \Delta x=+2^\circ=\frac{2\pi}{180} \ , \ \Delta y=-1^\circ=\frac{-\pi}{180}$

$\Delta f \cong \frac{3}{4}\times\frac{2\pi}{180}+\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{\pi}{180}\right)=\frac{7\pi}{720}$

$\Rightarrow \sin 32^\circ \cos 29^\circ \cong \sin 30 \cos 30+\Delta f=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{7\pi}{720}$

دیفرانسیل کل:

تعریف: هرگاه $z=f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد، دیفرانسیل کل تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$df_{(x,y)}=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$$

که برای توابع سه متغیره به بالا هم می‌توان تعمیم داد.

مثال: در هر یک از موارد زیر دیفرانسیل کل توابع سمت چپ محاسبه شده است.

1) $z=e^{xy} \longrightarrow dz=ye^{xy}dx+xe^{xy}dy$

2) $w=2z+\sin xy \longrightarrow dw=y\cos xy\,dx+x\cos xy\,dy+2dz$

تمرین: مقدار تقریبی توابع زیر را در نقطه داده شده کمک دیفرانسیل بیابید؟

1) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $(1.9 , 1.8 , 1.1)$

2) $f(x,y)=x\,e^{y+x^2}$, $(2.05 , -3.92)$

3) $f(x,y)=\sqrt{2x^2+e^{2y}}$, $(2.2 , -0.2)$

4) $\sqrt{(4.05)^2+(2.93)^2}$, 5) $\cos(59^\circ) \cdot \tan(47^\circ)$

تمرین: دیفرانسیل توابع زیر را بدست آورید:

1) $z=x^3+x^2y^2-y^4$ 2) $z=\mathrm{Ln}(x^2y^3)$ 3) $z=\dfrac{x^2}{x+y}$

4) $w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 5) $w=\mathrm{Ln}(xy)+e^{2z}+x^2e^{3y}$

تحقیق: اکسترمم ها (نقاط ماکزیمم یا مینیمم) توابع $f(x,y)=x^2-2xy+\frac{1}{3}y^3-3y$

و $f(x,y)=2xy-5y^2+4x-2x^2+4y-4$

را بدست آورید؟

فصل چهارم - ۷. انتگرال‌های دوگانه مدرس: محمدعلی ...

با عنایت و توجه به قواعد انتگرال معین و نامعین توابع یک متغیره، محاسبه انتگرال‌های دوگانه و حتی بالاتر هم همانند آنها می‌باشد.

تذکر: دانستن کلیه‌ی قواعد انتگرال‌های معمولی توابع یک متغیره و بکارگیری آنها در این جا بسیار لازم می‌باشد.

مثال: انتگرال‌های زیر را بدست آورید:

$$1)\ \int_0^{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}(\sin x+\cos y)\,dy}_{\text{ابتدا حل این انتگرال}}\,dx$$

مرحله (۱) $\displaystyle\int_0^{\pi}(\sin x+\cos y)\,dy=\Big[y\sin x+\sin y\Big]_0^{\pi}=\pi\sin x$

مرحله (۲) $\displaystyle\Rightarrow\int_0^{\pi}(\pi\sin x)\,dx=\Big[-\pi\cos x\Big]_{x=0}^{x=\pi}=2\pi$

$$2)\ \int_0^1\underbrace{\int_x^{x^2}(x-2y)\,dy}_{\text{مرحله اول}}\,dx$$

مرحله (۱) $\displaystyle\longrightarrow\int_x^{x^2}(x-2y)\,dy=\Big[xy-y^2\Big]_{y=x}^{y=x^2}=x^3-x^4-x^2+x^2=x^3-x^4$

مرحله (۲) $\displaystyle\longrightarrow\int_0^1(x^3-x^4)\,dx=\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\Big]_0^1=\frac{1}{20}$

۳) $\int_0^3 \underbrace{\int_x^0 e^{x^2}\,dy}_{\text{مرحله (۱)}}\,dx$ — مرحله (۲)

مرحله (۱) $\rightarrow$ $\int_x^0 e^{x^2}dy = \left[ye^{x^2}\right]_{y=x}^{y=0} = -xe^{x^2}$

مرحله (۲) $\rightarrow$ $\int_0^3 (-xe^{x^2})\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^3 = -\frac{1}{2}(e^9-1)$

۴) $\int_1^{\ln 5}\int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dx\,dy =$ (تکلیف)

۵) ناحیه محدود به خطوط $y=x$ و $y=2x$ ، $x=1$ و $x=2$

۶) $\int_1^2\int_0^x 2x^2y^2\,dy\,dx$

۷) $\int_0^1\int_0^{y^2}(2x+y^2)\,dx\,dy$

۸) $\int_0^1\int_x^{x^2}\int_z^0 (y-2)\,dy\,dz\,dx$

تحقیق: تبدیل لاپلاس توابع پیوسته را به همراه حل دو مثال نشان دهید.