فصل اول

خطاها

۱.۱ مقدمه

هدف محاسبات عددی، حل مسائل عددی پیچیده، تنها با استفاده از اعمال ساده حساب به منظور توسعه و ارزیابی روشها برای محاسبه نتایج عددی از اطلاعات معلوم است.روشهای محاسبه، **الگوریتم** نامیده می‌شوند.به خاطر اهداف این کتاب، الگوریتم را به عنوان توصیفی کامل و بدون ابهام از روش ساختن جواب یک مسأله ریاضی تعریف می‌کنیم.هدف ما جستجوی الگوریتمهای محاسباتی است.در حالی که بعضی مسائل دارای چندین الگوریتم برای حل هستند، مسائلی یافت می‌شوند که هنوز الگوریتم رضایت بخشی برای حل ندارند.

هرگاه یک مسأله الگوریتم‌های متفاوتی برای حل داشته باشد، دلایل متفاوتی برای انتخاب یکی از آنها به عنوان الگوریتم بهتر وجود دارد.دو دلیل عمده این انتخاب سرعت و دقت الگوریتم می‌باشد.پیشرفتهای سریع در طراحی کامپیوترهای رقمی تأثیر فراوانی در محاسبات عددی داشته است.هم اینک کامپیوترها میلیونها عمل محاسباتی را درکمتر از یک ثانیه انجام می‌دهند.این بدان

معنی است که انجام محاسبات طولانی و پیچیده امکانپذیر شده، اما در عوض امکان وجود خطا نیز افزایش یافته است.کسانی که الگوریتمهای محاسباتی را طرح و از آنها استفاده می‌کنند، باید در مورد بهتر به کار گرفتن کامپیوترهای رقمی برای انجام محاسبات، اطلاعاتی داشته باشند.

برنامه‌نویسی کامپیوتر اساساً به مسأله به رمز در آوردن الگوریتمها به شکلی مناسب برای کامپیوتر مربوط می‌شود.با توجه به این که روشهای عددی شامل محاسبات زیاد روی اعداد است و انجام این محاسبات با دست امکانپذیر نیست، لازم است محاسبات توسط یک ابزار محاسباتی صورت گیرد.در ماشین حساب و کامپیوتر، اعداد، علی الخصوص اعداد اصم و اعداد گویایی که دارای بسط اعشاری متناهی نیستند، مانند $\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳۰۰۰$ به صورت تقریبی ذخیره می‌شوند. با انجام محاسبه روی این اعداد تقریبی، خطاهای موجود در آنها روی جواب نهایی اثر می‌گذارد، به نحوی که گاهی اوقات نتایج عددی بسیار دور از مقدار واقعی و در نتیجه بی فایده هستند.

۲.۱ خطای مطلق و نسبی

عدد تقریبی a عددی است که مقدارکمی با عدد دقیق A تفاوت داشته و به جای آن در محاسبات به کار برده می‌شود.

تعریف ۱.۱ اگر $a < A$ آن گاه a را **تقریب نقصانی (کوچکتر)** A و چنانچه $a > A$ در آن صورت a را **تقریب اضافی (بزرگتر)** A می‌نامیم.

مثال ۱. در مورد عدد $\sqrt{۲}$ داریم

$$۱/۴۱ < \sqrt{۲} < ۱/۴۲$$

لذا عدد ۱/۴۱ یک تقریب نقصانی و عدد ۱/۴۲ یک تقریب اضافی $\sqrt{۲}$ می‌باشد.

توجه : هر گاه a یک مقدار تقریبی برای عدد A باشد در آن صورت می‌نویسیم :

$$a \simeq A$$

تعریف ۲.۱ خطای مطلق عدد تقریبی a به عنوان یک تقریب از A را با $e(a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{e(a) = |A - a| \qquad (۱)}$$

توجه : برای عدد A دو حالت وجود دارد:

۱- عدد A معلوم است، در این صورت خطای مطلق $e(a)$ از فرمول (۱) بدست می‌آید.

۲- عدد A معلوم نیست، که اغلب چنین است، بنابراین خطای مطلق $e(a)$ از فرمول (۱) قابل محاسبه نخواهد بود.

در اکثر روشها پس از محاسبه a یک حد بالا برای خطای مطلق a قابل محاسبه است.

تعریف ۳.۱ خطای مطلق حدی یک عدد تقریبی a عددی است که از خطای مطلق آن کوچکتر نباشد و آن را با e_a نشان می‌دهیم، بنابراین

$$e(a) \leq e_a$$

توجه : e_a منحصر به فرد نیست در حالی که $e(a)$ منحصر به فرد است.

مثال ۲. برای $A = \frac{۲}{۳}$ یک تقریب اضافی، یک تقریب نقصانی، خطای مطلق این تقریبها و یک خطای مطلق حدی را به دست آورید.

الف) $A = \frac{۲}{۳}, \quad a = ۰/۶۷ \quad , e(a) = |\frac{۲}{۳} - \frac{۶۷}{۱۰۰}| = \frac{۱}{۳۰۰} \quad , e_a = ۰/۰۰۴$

$a = ۰/۶۷$ یک تقریب اضافی A است.

ب) $A = \frac{۲}{۳}, \quad a = ۰/۶۶ \quad , e(a) = |\frac{۲}{۳} - \frac{۶۶}{۱۰۰}| = \frac{۲}{۳۰۰}, \quad e_a = ۰/۰۱$

$a = ۰/۶۶$ یک تقریب نقصانی A است.

مثال ۳. اگر $A = \sqrt{۲}$ آن گاه ۱/۴۱ تقریبی نقصانی و ۱/۴۲ تقریبی اضافی از A است، واضح است که $|A - ۱/۴۱|$ و $|A - ۱/۴۲|$ هر دو اصم هستند، بنابراین خطای مطلق به سادگی قابل

محاسبه نیست، اما داریم :

$$|\sqrt{۲} - ۱/۴۱| < ۰/۰۰۵, \qquad e_a = ۰/۰۰۵$$

$$|\sqrt{۲} - ۱/۴۲| < ۰/۰۰۶, \qquad e_a = ۰/۰۰۶$$

توجه : هرگاه e_a خطای مطلق حدی a به عنوان تقریبی از عدد A باشد، آن گاه

$$|A - a| \leq e_a$$

بنابراین

$$a - e_a \leq A \leq a + e_a$$

بنا بر **قرارداد**، نامساوی اخیر را منحصراً به صورت زیر می‌نویسیم :

$$A = a \pm e_a$$

مثال ۴. اگر $A = ۱/۳۲۴ \pm ۰/۰۰۳$ در این صورت $۱/۳۲۱ \leq A \leq ۱/۳۲۷$

توجه : نامساوی $۱/۳۲۱ \leq A \leq ۱/۳۲۷$ در مثال ۴ نشان می‌دهد که در بسط اعشاری A حتماً ۱/۳۲ موجود است، ولی رقم سوم اعشار یکی از ارقام ۱ تا ۷ می‌باشد. لذا رقم ۴ مشکوک است.

معمولاً خطای مطلق حدی و حتی خطای مطلق برای نشان دادن دقت یک عدد تقریبی کفایت نمی‌کند.

مثال ۵. هرگاه در اندازه‌گیری دو طول برحسب سانتیمتر داشته باشیم :

$$L_۱ = ۲۳۵/۸ \pm ۰/۱$$

$$L_۲ = ۳/۲ \pm ۰/۱$$

علیرغم اینکه خطای مطلق حدی در هر دو مورد با هم برابرند ولی اندازه‌گیری اول بهتر از اندازه‌گیری دوم است زیرا در محاسبه $L_۱$ طول بزرگتری اندازه‌گیری شده است، لذا در اندازه‌گیری $L_۱$ دقت بیشتری انجام گرفته است. بنابراین آنچه دقت یک تقریب را مشخص می‌کند، خطا در واحد آن کمیت است.

تعریف ۴.۱ هرگاه a تقریبی از عدد $A \neq ۰$ باشد کمیت زیر را **خطای نسبی** a می‌نامیم :

$$\boxed{\delta(a) = \frac{|A-a|}{|A|} = \frac{e(a)}{|A|} \qquad (۲)}$$

مثال ۶. هرگاه $A = \frac{۲}{۳}$ و $a = ۰/۶۷$ تقریبی از آن باشد، مطابق آنچه که در مثال ۲ بدست آمد، داریم :

$$\delta(a) = \frac{e(a)}{A} = \frac{۱}{۲۰۰}$$

۳.۱ منابع اصلی خطا

خطاهایی را که در مسائل ریاضی با آنها مواجه می‌شویم عمدتاً به پنج گروه تقسیم می‌شوند:

۱- خطاهایی که درنحوه بیان مسائل وجود دارند.عبارات ریاضی بندرت تصویر دقیقی از پدیده‌های واقعی ارائه داده و دربیشتر موارد صرفاً مدلهایی ایده‌آل هستند.در مطالعه پدیده‌های طبیعی می‌بایست به عنوان یک قاعده، شرایطی را قبول کنیم که باعث ساده شدن مسأله گردند.این خود یکی از منابع خطاست.گاهی اوقات حل مسأله‌ای که دقیقاً فرمولبندی شده است، بسیار مشکل و یا حتی غیر ممکن می‌باشد.در چنین حالتی یک مسأله تقریبی به جای آن در نظر گرفته می‌شود که تا حدودی همان نتایج را به همراه دارد.این خود خطایی را به وجود می‌آورد که **خطای مدل** نامیده می‌شود.

۲- خطاهایی که از وجود عملیات نامتناهی ناشی می‌شوند.توابع به کار رفته در روابط ریاضی معمولاً

به صورت دنباله‌ها یا سریهای نامتناهی بیان می‌گردند، مثلاً

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

به علاوه بسیاری از مسائل ریاضی را تنها می‌توان با تعداد نامتناهی عملیات حل نمود که حل آنها جواب مسأله می‌باشد.به طور کلی از آنجا که یک فرآیند نامتناهی را نمی‌توان طی مراحل متناهی انجام داد، لازم است که دنباله عملیات را در مرحله‌ای قطع کرده و به یک جواب تقریبی مسأله مورد نظر بسنده نماییم.این قطع عملیات در یک مرحله باعث بروز خطا می‌گردد.این خطا را **خطای باقیمانده** و یا **خطای برشی** می‌نامیم.

۳- خطای پارامترهای عددی (مربوط به روابط)که مقادیر آنها از طریق اندازه‌گیری به دست می‌آیند.لذا مقادیر آنها را تنها می‌توان به طور تقریبی یافت، همانند همه ثابتهای فیزیکی.این نوع خطا، **خطای اولیه** یا **خطای داده‌ها** نامیده می‌شود.

۴- به خاطر محدودیت در ذخیره ارقام بسط اعشاری اعداد، تقریباً تمام اعداد اعشاری در وسایل محاسباتی با خطا ذخیره می‌شوند.این خطا،**خطای نمایش اعداد** نامیده می‌شود.

۵- هنگام اجرای محاسبات با اعداد تقریبی، خطاهای مربوط به داده‌های اولیه به نتیجه نهایی منتقل می‌گردند.این نوع خطا، **خطای عملیات** نامیده می‌شود.به عنوان مثال عدد π خود دارای مقدار تقریبی است لذا در محاسبهٔ عبارتی نظیر $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (زمان تناوب یک آونگ فیزیکی) خطای ناشی از مقدار π به نتیجه نهایی منتقل می‌گردد.

طبیعی است که در یک مسأله خاص بعضی از خطاها حذف شده و برخی دیگر اثری ناچیز در نتیجه نهایی داشته باشند.ولی به طور کلی یک تحلیل کامل بایستی هر نوع خطایی را شامل گردد.در ادامه بحث خطاهای مربوط به عملیات را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

توجه : خطای نمایش اعداد گاهی **خطای گردکردن** نامیده می‌شود، روشهای متفاوتی برای گردکردن اعداد اعشاری وجود دارد.در اینجا روش زیر که روش مورد استفاده در ماشین‌های محاسباتی

می‌باشدتوضیح داده می‌شود.هرگاه بخواهیم یک عدد را تا n رقم اعشار گرد کنیم :

" اگر رقم $(n+1)$ام اعشار این عدد کمتر از ۵ باشد،در این صورت رقم $(n+1)$ام اعشار و تمام ارقام بعد از آن را حذف می‌کنیم.اما هرگاه رقم $(n+1)$ام اعشار بیشتر یا مساوی ۵ باشد یک واحد به رقم nام اعشار اضافه نموده و رقم $(n+1)$ام و ارقام بعد از آن را حذف می‌نماییم." بنابر این قانون، خطای گرد کردن همواره کمتر یا مساوی $\frac{1}{2}\times 10^{-n}$ می‌باشد.

مثال ۶. عدد ۲٫۳۷۴۹ را در نظر بگیرید، در این صورت گرد شده این عدد تا دو رقم اعشار عبارت است از ۲٫۳۷ وگرد شده آن تا سه رقم اعشار برابر است با ۲٫۳۷۵ .

توجه : معمولاً تعداد ارقام اعشار یک عدد را با حرف D که تعداد ارقام اعشار عدد قبل از آن آمده است نشان می‌دهیم.

مثال ۷. عبارت $4{,}732(3D)$ یعنی ۴٫۷۳۲ دارای سه رقم اعشار است.

۴.۱ خطای چهار عمل اصلی

الف. خطای حاصل جمع

هرگاه a و b تقریبهایی از A و B و این اعداد همگی مثبت باشند و e_a و e_b به ترتیب خطاهای مطلق حدی a و b باشند و هرگاه e_c خطای مطلق حدی عدد $C = A + B$ باشد، در این صورت

$$e_c \leq e_a + e_b$$

ب. خطای تفاضل

به مفروضات قسمت «الف» هرگاه $C = A - B$ در این صورت

$$e_c \leq e_a + e_b$$

یعنی $e_a + e_b$ یک کران بالا برای خطای مطلق حدی C (در هر دو حالت) می‌باشد.

مثال ۸. هرگاه اعداد $\sqrt{۱۷}$ و $\sqrt{۵}$ را تا سه رقم اعشارگرد کنیم، مطلوبست محاسبه $\sqrt{۱۷} \pm \sqrt{۵}$ و محاسبه حداکثر خطای حاصل جمع و تفاضل.

حل : داریم : $\sqrt{۱۷} = ۴/۱۲۳ + e_۱, \quad \sqrt{۵} = ۲/۲۳۶ + e_۲$

منظور از $e_۱$ و $e_۲$ خطای مرتکب شده در نمایش $\sqrt{۱۷}$ و $\sqrt{۵}$ می‌باشد.چون اعداد تا سه رقم اعشارگرد شده‌اند، پس

$$e_۱ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}, \quad e_۲ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$

داریم : $\sqrt{۱۷} + \sqrt{۵} = (۴/۱۲۳ + ۲/۲۳۶) + e_۳ = ۶/۳۵۹ + e_۳$

و چون $e_۳ \leq e_۱ + e_۲$ لذا $e_۳ \leq ۱۰^{-۳}$.در نتیجه

$$۶/۳۵۹ - ۱۰^{-۳} \leq \sqrt{۱۷} + \sqrt{۵} \leq ۶/۳۵۹ + ۱۰^{-۳}$$

همچنین $\sqrt{۱۷} - \sqrt{۵} = ۱/۸۸۷ + e_۴$ که در اینجا نیز

$$e_۴ \leq e_۱ + e_۲ \leq ۱۰^{-۳}$$

بنابراین $۱/۸۸۷ - ۱۰^{-۳} \leq \sqrt{۱۷} - \sqrt{۵} \leq ۱/۸۸۷ + ۱۰^{-۳}$

مثال ۹. هرگاه اعداد π و $\sqrt{۲}$ را تا چهار رقم اعشارگرد کنیم، مطلوب است محاسبه $\pi \pm \sqrt{۲}$ و محاسبه حداکثر خطای حاصل جمع و تفاضل.

حل : داریم : $\pi = ۳/۱۴۱۶ + e_۱, \quad \sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲ + e_۲$

چون اعداد تا چهار رقم اعشارگرد شده‌اند، پس $e_۱ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}, \quad e_۲ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$

همچنین داریم : $\pi + \sqrt{۲} = (۳/۱۴۱۶ + ۱/۴۱۴۲) + e_۳ = ۴/۵۵۵۸ + e_۳$

که در آن

$$e_۳ \leq e_۱ + e_۲ \Longrightarrow e_۳ \leq ۱۰^{-۴}$$

در نتیجه $۴/۵۵۵۸ - ۱۰^{-۴} \leq \pi + \sqrt{۲} \leq ۴/۵۵۵۸ + ۱۰^{-۴}$ و به طور مشابه

$$\pi - \sqrt{۲} = ۱/۷۲۷۴ + e_۴$$

$$e_۴ \leq ۱۰^{-۴}$$

$$۱/۷۲۷۴ - ۱۰^{-۴} \leq \pi - \sqrt{۲} \leq ۱/۷۲۷۴ + ۱۰^{-۴}$$

$$۱/۷۲۷۳ \leq \pi - \sqrt{۲} \leq ۱/۷۲۷۵$$

پ. خطای حاصل ضرب

با مفروضات قسمت «الف» هرگاه $C = AB$ در این صورت

$$\boxed{e_c \leq ae_b + be_a \qquad (۳)}$$

توجه : در عمل تقسیم معمولاً به گونه‌ای عمل می‌شود که تقسیم تبدیل به عمل ضرب گردد، مثال ۱۱ نشان دهندهٔ این مطلب می‌باشد.

مثال ۱۰. مقدار $\pi\sqrt{۲}$ را با چهار رقم اعشار محاسبه نموده و حداکثر خطای این حاصل ضرب را نیز به دست آورید.

حل : داریم:

$$\pi = ۳/۱۴۱۶ + e_۱$$

$$\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲ + e_۲$$

که در آن مانند مثال ۹ داریم:

$$e_۱ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}, \qquad e_۲ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$\pi\sqrt{۲} = (۳/۱۴۱۶ \times ۱/۴۱۴۲) + e_۳$$

که بنا به رابطه (۳) برای $e_۳$ داریم:

$$e_۳ \leq ۳/۱۴۱۶ e_۲ + ۱/۴۱۴۲ e_۱$$
$$e_۳ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}(۳/۱۴۱۶ + ۱/۴۱۴۲)$$
$$e_۳ \leq ۰/۵ \times ۱۰^{-۴}(۴/۵۵۵۸) = ۲/۲۷۷۹ \times ۱۰^{-۴}$$

اما

$$\pi\sqrt{۲} = ۴/۴۴۲۹ + e'_۳$$

چون حاصل‌ضرب اعداد ۳/۱۴۱۶ و ۱/۴۱۴۲ در محاسبهٔ $\pi\sqrt{۲}$ بیشتر از چهار رقم اعشار دارد، هنگام نمایش حاصل‌ضرب دو عدد مذکور با چهار رقم اعشار خطای دیگری مرتکب شده‌ایم و خطای حدی کل را با $e'_۳$ نشان داده‌ایم. برای $e'_۳$ داریم:

$$e'_۳ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} + e_۳$$
$$e'_۳ \leq ۰/۵ \times ۱۰^{-۴} + ۲/۲۷۷۹ \times ۱۰^{-۴} = ۲/۷۷۷۹ \times ۱۰^{-۴}$$

لذا:

$$۴/۴۴۲۹ - ۲/۷۷۷۹ \times ۱۰^{-۴} \leq \pi\sqrt{۲} \leq ۴/۴۴۲۹ + ۲/۷۷۷۹ \times ۱۰^{-۴}$$
$$۴/۴۴۲۶ \leq \pi\sqrt{۲} \leq ۴/۴۴۳۲$$

توجه : همانطور که مثال ۱۰ نشان می‌دهد، حاصل ضرب دو عدد تقریبی دارای خطای بیشتر از حاصل جمع و یا تفاضل اعداد تقریبی است.رابطه (۳) نشان می‌دهد که این خطا برای a و b بزرگ، می‌تواند مقداری قابل توجه باشد.اما هرگاه اعداد تقریبی که در هم ضرب می‌شوند کمتر یا مساوی یک باشند، خطای حاصل ضرب آنها در حد قابل قبول قرار خواهد داشت.

حداکثر خطا در حاصل ضرب سه عدد تقریبی :

هرگاه a و b و c تقریبهایی از A و B و C بوده و این اعداد همگی مثبت باشند، رابطه زیر برای خطای مطلق حدی حاصل ضرب abc به عنوان تقریبی از مقدار ABC بیان می‌شود :

$$\boxed{e_{abc} \leq abe_c + ace_b + bce_a \qquad (۴)}$$

روابط مشابه برای حاصل ضرب بیشتر از سه عدد تقریبی به راحتی قابل نوشتن است.

مثال ۱۱. هرگاه اعداد را تا سه رقم اعشار گرد کنیم، عبارت $\frac{\pi}{۳\sqrt{۵}}$ را محاسبه نموده و یک خطای مطلق حدی برای این محاسبه بیان نمایید.

حل : قرار می‌دهیم $x = \frac{\pi}{۳\sqrt{۵}}$، لذا

$$x = \pi.\frac{۱}{۳}.\frac{۱}{\sqrt{۵}} = \pi.\frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۵}.\sqrt{۵}$$
$$= \pi.\frac{۱}{۳}.(۰/۲)\sqrt{۵} = (۰/۲)\pi\frac{۱}{۳}\sqrt{۵}$$

مقدار ۰/۲ به طور دقیق مشخص است، چون اعداد را تا سه رقم اعشار نمایش می‌دهیم؛ خواهیم داشت:

$$\pi = ۳/۱۴۲ + e_\pi \quad , \quad e_\pi \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$
$$\sqrt{۵} = ۲/۲۳۶ + e_{\sqrt{۵}} \, , \quad e_{\sqrt{۵}} \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$
$$\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳ + e_{\frac{۱}{۳}} \quad , \quad e_{\frac{۱}{۳}} \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$

و از آن‌ها داریم :

$$x = (۰/۲)۳/۱۴۲ \times ۲/۲۳۶ \times ۰/۳۳۳ + e_x$$
$$x = ۰/۴۶۸ + e'_x$$

توجه داشته باشید که چون حاصل ضرب اعداد فوق بیش از سه رقم اعشار دارد، هنگام نمایش این حاصل ضرب‌ها با سه رقم اعشار، خطای دیگری مرتکب می‌شویم که خطای حدی کل را با

e'_x نشان داده‌ایم.در واقع داریم :

$$e'_x \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳} + e_x$$

بنا به رابطه (۴) برای e_x داریم :

$$e_x \leq ۰/۲[۲/۲۳۶ \times ۰/۳۳۳ e_\pi + ۳/۱۴۲ \times ۰/۳۳۳ e_{\sqrt{۵}} + ۳/۱۴۲ \times ۲/۲۳۶ e_{\frac{۱}{۳}}]$$

$$e_x \leq ۰/۲ \times \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳} \times ۸/۸۱۶$$

$$e_x \leq ۸/۸۱۶ \times ۱۰^{-۴}$$

لذا

$$e'_x \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳} + ۸/۸۱۶ \times ۱۰^{-۴}$$

$$e'_x \leq ۱/۳۸۲ \times ۱۰^{-۳}$$

۵.۱ خطای محاسبه فرمولها و توابع

الف. خطای محاسبه فرمولها

هرگاه تابعی n متغیره به صورت $w = f(x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$ داشته باشیم و بخواهیم مقدار این تابع را در نقاط $A_i = a_i + e_{a_i}$ برای $i = ۱, \cdots, n$ حساب کنیم، در این صورت خواهیم داشت :

$$f(A_۱, A_۲, \cdots, A_n) = f(a_۱, a_۲, \cdots, a_n) + e_f$$

که در آن .

$$e_f \leq e_{a_۱} \frac{\partial f}{\partial x_۱}|_{\mathrm{a}} + e_{a_۲} \frac{\partial f}{\partial x_۲}|_{\mathrm{a}} + \cdots + e_{a_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}|_{\mathrm{a}} \qquad (۵)$$

در رابطه (۵) منظور از $\mathbf{a}$ بردار مقادیر تقریبی a_i یعنی $\mathbf{a} = (a_۱, a_۲, \cdots, a_n)$ می‌باشد، همچنین $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{\mathbf{a}}$ به معنی محاسبه مقدار تابع $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ به ازای بردار $\mathbf{a}$ است.

مثال ۱۲. حجم کره‌ای به شعاع $\frac{۵}{۳}$ متر را حساب کرده و حداکثر خطای این محاسبه را به دست آورید.اعداد را تا چهار رقم اعشار گرد کنید.

حل : داریم : $V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$ و یا $V = xyz^۳$ که در آن

$$x = \frac{۴}{۳} = ۱/۳۳۳۳ + e_x \quad , \quad e_x \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$
$$y = \pi = ۳/۱۴۱۶ + e_y \quad , \quad e_y \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$
$$z = \frac{۵}{۳} = ۱/۶۶۶۷ + e_z \quad , \quad e_z \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

بنابراین

$$V = (۱/۳۳۳۳)(۳/۱۴۱۶)(۱/۶۶۶۷)^۳ + e_V$$
$$V = ۱۹/۳۹۳۳ + e'_V$$

که در آن مشابه مثال ۱۱ داریم :

$$e'_V \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} + e_V$$
$$e_V \le e_x \frac{\partial V}{\partial x} + e_y \frac{\partial V}{\partial y} + e_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

که عبارت سمت راست را بایستی در $(۱/۳۳۳۳, ۳/۱۴۱۶, ۱/۶۶۶۷)$ محاسبه کرد.لذا

$$e_V \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}\{yz^۳ + xz^۳ + ۳xyz^۲\}$$

مقدار سمت راست به ازای $x = ۱/۳۳۳۳$، $y = ۳/۱۴۱۶$ و $z = ۱/۶۶۶۷$ به صورت زیر

خواهد بود :

$$e_V \leq ۵ \times ۱۰^{-۵}\{۱۴/۵۴۵۳ + ۶/۱۷۳۱ + ۳۴/۹۰۷۲\}$$

$$e_V \leq ۰/۰۰۲۸$$

$$e'_V \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} + ۰/۰۰۲۸$$

$$e'_V \leq ۵ \times ۱۰^{-۵} + ۰/۰۰۲۸$$

$$e'_V \leq ۰/۰۰۲۸۵$$

و در نتیجه $V = ۱۹/۳۹۳۳ \pm ۰/۰۰۲۸۵$

ب. خطای محاسبه توابع

در اکثر مسائل محاسبات عددی، نیاز به محاسبه توابعی مانند $\sin x$ و $\sqrt{x}$ و $\ln x$ و $\cdots$ در دامنه تعریف آنها پیش می‌آید.در محاسبهٔ این توابع علاوه بر خطای موجود در نمایش x به شکل اعشاری و با تعدادی متناهی رقم، خطای دیگری نیز وارد می‌شود که ذیلاً آن را بررسی می‌کنیم.فرض کنید می‌خواهیم مقدار $e^{۱/۳}$ را حساب کنیم، می‌دانیم

$$e^x = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

مقدار $e^{۱/۳}$ یعنی مقدار سری واقع در سمت راست تساوی بالا به ازای $x = \frac{۱}{۳}$.چون محاسبهٔ حاصل جمع بینهایت جمله (عدد) عملاً امکانپذیر نیست، معمولاً تعدادی متناهی از جملات نخست این سری، متناسب با دقت لازم، انتخاب و به ازای $x = \frac{۱}{۳}$ یا تقریب مناسبی از $\frac{۱}{۳}$، محاسبه می‌شود.در واقع می‌نویسیم:

$$e^x = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x)$$

که در آن $E_n(x)$ عبارتست از : $$E_n(x) = \frac{x^{n+۱}}{(n+۱)!} + \frac{x^{n+۲}}{(n+۲)!} + \cdots$$

$E_n(x)$ باقیمانده سری یا **خطای برشی** در x نامیده می‌شود، بنابراین برای محاسبهٔ $e^{۱/۳}$، تقریبی

از آن یعنی مقدار $\frac{x^n}{n!} + \cdots + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x}{۱!} + ۱$ را به ازای $x = \frac{۱}{۳}$ حساب می‌کنیم.اما در عمل به جای $\frac{۱}{۳}$ تقریبی از آن را استفاده می‌کنیم که به فرم اعشاری دارای تعدادی متناهی رقم است.مثلاً اگر بخواهیم $e^{۱/۳}$ را با خطای کمتر از $۱۰^{-۳}$ حساب کنیم، قرار می‌دهیم: $|E_n(x)| \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$ (به ضریب $\frac{۱}{۲}$ در سمت راست عبارت فوق توجه نمایید، چون مجبوریم $x = \frac{۱}{۳}$ را به صورت تقریبی بنویسیم که آن هم دارای خطای حدی $\frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$ می‌باشد.)

برای محاسبه n، معمولاً از اولین جمله $E_n(x)$ استفاده می‌شود.یعنی قرار می‌دهیم :

$$E_n(x) \simeq \frac{x^{n+۱}}{(n+۱)!}$$

بنابراین برای محاسبهٔ $e^{۱/۳}$ با خطای کمتر از $۱۰^{-۳}$ قرار می‌دهیم

$$\frac{(\frac{۱}{۳})^{n+۱}}{(n+۱)!} \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳} = ۵ \times ۱۰^{-۴}.$$

برای $n = ۳$ نامساوی فوق برقرار نیست، اما برای $n \geq ۴$ نامساوی برقرار است. لذا باید مقدار زیر را حساب کنیم:

$$۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{\frac{۱}{۹}}{۲} + \frac{\frac{۱}{۲۷}}{۶} + \frac{\frac{۱}{۸۱}}{۲۴}$$

خطای محاسبه این مجموع باید چنان کوچک باشد که در مقایسه با خطای برشی، قابل اغماض یا حداکثر در حدود آن باشد.لذا لازم است قرار دهیم $\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳۳(۴D)$ و عبارت فوق را محاسبه کنیم.پس از انجام محاسبات داریم :

$$\begin{aligned} e^{۱/۳} &\simeq ۱ + ۰/۳۳۳۳ + ۰/۰۵۵۶ + ۰/۰۰۶۲ + ۰/۰۰۰۵ \\ &= ۱/۳۹۵۶ \end{aligned}$$

بنابراین با ۳ رقم اعشار خواهیم داشت :

$$e^{۱/۳} \simeq ۱/۳۹۶ \ (۳D)$$

توجه : همان گونه که در بالا دیده می‌شود، هر چند که نتیجه $e^{۱/۳}$ را با ۳ رقم اعشار می‌خواهیم، اما محاسبات میانی را با ۴ رقم اعشار انجام داده‌ایم که این مطلب را در حالت کلی به صورت قاعدهٔ زیر بیان می‌کنیم :

قاعده : هرگاه نتیجه یک عبارت را تا n رقم اعشار بخواهیم، محاسبات میانی را با $(n+۱)$ رقم اعشار انجام داده و نتیجه نهایی را در آخر کار با n رقم اعشار ارائه می‌نماییم.

مثال ۱۴. مقدار تقریبی تابع $\sin x$ را به ازای $x = \frac{\pi}{۷}$ و با خطای کمتر از $۱۰^{-۳}$ حساب کنید.

حل : داریم

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \cdots + (-۱)^n \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} \pm \cdots$$

در اینجا قرار می‌دهیم $|E_n(x)| = \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$

$$x = \frac{\pi}{۷} = \pi\frac{۱}{۷} = ۳/۱۴۱۶ \times ۰/۱۴۲۹ = ۰/۴۴۸۹$$

بنابراین بایستی n را طوری تعیین کنیم که

$$\frac{(۰/۴۴۸۹)^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳} = ۵ \times ۱۰^{-۴}$$

برای $n \geq ۲$ نامساوی فوق برقرار می‌باشد، در نتیجه

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{۷} &\simeq ۰/۴۴۸۹ - \frac{(۰/۴۴۸۹)^۳}{۳!} + \frac{(۰/۴۴۸۹)^۵}{۵!} \\ &= ۰/۴۴۸۹ - ۰/۰۱۵۱ + ۰/۰۰۰۲ \\ &= ۰/۴۳۴۰ \quad (۴D)\end{aligned}$$

لذا با سه رقم اعشار خواهیم داشت :

$$\sin\frac{\pi}{۷} \simeq ۰/۴۳۴(۳D)$$

مجموعه مسائل فصل اول.

۱- هرگاه a تقریبی از A باشد، خطای مطلق a را به عنوان تقریب A در حالتهای زیر حساب کنید.

الف. $A = \frac{۱}{۳۰۰}$ و $a = ۰/۰۰۳$

ب. $A = ۲/۵۴۷۵$ و $a = ۲/۵۴۸$

پ. $A = ۲/۱۰۰۰۰۷$ و $a = ۲/۱۰۰$

ت. $A = \frac{۱}{۳}$ و $a = ۰/۳۳$

جواب. الف. $\frac{۱}{۳۰۰۰}$ **ب.** $۰/۰۰۰۵$ **پ.** ۷×۱۰^{-۶} **ت.** $\frac{۱}{۳۰۰}$

۲- یک کران خطای حدی را برای تقریب a از عدد A در هر یک از حالتهای مسأله ۱ ارائه نمایید.

جواب. الف . ۵×۱۰^{-۴} **ب.** ۵×۱۰^{-۴} **پ.** ۵×۱۰^{-۵} **ت.** ۵×۱۰^{-۴}

۳- هرگاه π و $\sqrt{۵}$ را تا سه رقم اعشار گرد کرده باشیم، مطلوبست محاسبه $\pi\sqrt{۵}$ و $\frac{\pi}{\sqrt{۵}}$ و محاسبه حداکثر خطای مرتکب شده در هر حالت.

جواب. $\pi\sqrt{۵} \simeq ۷/۰۲۶$ با حداکثر خطای $۰/۰۰۳۲$

$\frac{\pi}{\sqrt{۵}} \simeq ۱/۴۰۵$ با حداکثر خطای $۰/۰۰۲۳$

۴- هرگاه x و y را تا چهار رقم اعشار گرد کرده باشیم، مطلوبست محاسبه حداکثر خطای مرتکب شده در $x \pm y$ و xy که $x = \sqrt{۱۱}$ و $y = \pi$.

جواب. $۱۰^{-۴}$ برای جمع و تفریق و ۴×۱۰^{-۴} برای ضرب .

۵- حجم کره‌ای به شعاع $\frac{۷}{۳}$ متر را حساب کرده و حداکثر خطای آن را بنویسید.(با سه رقم اعشار).

جواب. $V = ۵۳/۱۸۴$ و حداکثر خطا $۰/۰۶۳$.

۶- مقدار تقریبی توابع زیر را به ازای xهای داده شده و با تقریب داده شده ϵ حساب کنید:

الف. $\sin x \quad x = \frac{\pi}{۵}, \quad x = -\frac{۱}{۳}, \quad \epsilon = ۱۰^{-۳}$

ب. $\cos x \quad x = \frac{\pi}{۱۱}, \quad x = \frac{\sqrt{۲}}{۵}, \quad \epsilon = ۱۰^{-۴}$

پ. $e^{-x} \quad x = \frac{۱}{۳}, \quad x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}, \quad \epsilon = ۱۰^{-۳}$

ت. $\ln(۱+x) \quad x = \frac{۱}{۷}, \quad x = -\frac{\sqrt{۲}}{۳}, \quad \epsilon = ۱۰^{-۴}$

ث. $\frac{۱}{۱+x^۲} \quad x = \frac{۱}{۵}, \quad x = \frac{۱}{۷}, \quad \epsilon = ۱۰^{-۴}$

۷ـ ثابت کنید $\delta(a) \leqslant \frac{e(a)}{|a| - e_a}$ و از آنجا نتیجه بگیرید اگر e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد آن گاه

$$\delta(a) \leqslant \frac{e(a)}{|a|}$$

۸ـ اگر a_iها $(۱ \leqslant i \leqslant n)$ همگی اعدادی مثبت باشند نشان دهید

الف. $e(\sum_{i=۱}^{n} a_i) \leqslant \sum_{i=۱}^{n} e(a_i)$

ب. $\delta(\sum_{i=۱}^{n} a_i) \leqslant \max\{\delta(a_۱), \cdots, \delta(a_n)\}$

۹ـ اگر a و b به ترتیب تقریب‌هایی از A و B و این اعداد همگی مثبت باشند ثابت کنید: $e_{ab} \leqslant ae_b + be_a$

۱۰ـ فرض کنید f تابعی n متغیره به صورت $f = f(x_۱, \cdots, x_n)$ باشد. نشان دهید هرگاه نقاط $A = a_i + e_{a_i}$ $(۱ \leqslant i \leqslant n)$ را در تابع قرار دهیم، داریم

$$e_f \leqslant \sum_{i=۱}^{n} e_{a_i} \cdot |\frac{\partial f}{\partial x_i}|(a_۱, \cdots, a_n)$$

۱۱ـ مقدار $f(x) = \frac{۱}{\sqrt{x+۱} - \sqrt{x}}$ را برای xهای بزرگ با $۴D$ به دست آورید و آن را با مقدار $f(x) = \sqrt{x+۱} + \sqrt{x}$ مقایسه کنید و از آن نتیجه بیگرید که تفریق دو عدد نزدیک به هم می‌توانند با خطای زیاد توأم باشد.

۱۲ـ با یک برنامه کامپیوتری مناسب کوچکترین مقدار مثبت ϵ را برای یک کامپیوتر به دست آورید به طوری که هرگاه با عددی مانند ۱ جمع شود حاصل بیشتر از یک باشد. این عدد را اپسیلون ماشین یا eps می‌نامند (یعنی $۱ + \text{eps} > ۱$ و اگر $۰ < \alpha < \text{eps}$ آن گاه $۱ + \alpha \not> ۱$).

فصل دوم

حل عددی معادلات $f(x) = 0$

۱.۲ مقدمه

یکی از مسائلی که اغلب در کارهای مهندسی با آن مواجه می‌شویم، حل معادله‌ای به شکل $f(x) = 0$ است که در آن f یک تابع مفروض است.منظور از حل معادله $f(x) = 0$، یافتن مقادیری از متغیر x است که به ازای آنها مقدار تابع صفر شود.هرگاه $f(\alpha) = 0$، آن گاه α را یک ریشه معادله می‌نامیم و یا می‌گوییم α یک صفر تابع f است.

خواننده با حل تحلیلی معادلاتی مانند معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ و تعیین ریشه‌های آن آشنا می‌باشد.همچنین بعضی معادلات مانند معادلات مثلثاتی، نظیر

$$\sin 2x + 3\cos 2x = 1$$

به روشهای کلاسیک قابل حل هستند.اما معادلاتی مانند معادلات زیر، قابل حل با روشهای تحلیلی

نبوده و برای حل آنها بایستی روشهای تقریبی مورد استفاده قرار گیرد:

$$e^{-x} - \cos x = ۰$$

$$x + \cos x = ۰$$

$$x^{۲} - (۱ - x)^{۵} = ۰$$

معمولاً برای تعیین ریشه‌ای از یک معادله با دقت مورد نظر، لازم است تقریبی از آن ریشه یا فاصله کوچکی را که حاوی آن ریشه باشد، معلوم کرد.به این منظور محدودیتهای زیر را در نظر می‌گیریم :

محدودیت الف: فاصله‌ای موجود باشد که شامل ریشه باشد.

محدودیت ب: بایستی ریشه در فاصله مورد نظر یکتا باشد.

از نظر ریاضی محدودیت «الف» را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

۱- تابع $y = f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته است.

۲- $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامتند، یعنی $f(a)f(b) < ۰$.

در نتیجه بنا به قضیه مقدار میانی، عددی مانند α در فاصلهٔ $[a, b]$ وجود دارد، به طوری که :

$$f(\alpha) = ۰$$

با داشتن شرایط ۱ و ۲، محدودیت «ب» از نظر ریاضی، به صورت زیر بیان می‌شود:

۳- برای هر $x \in [a, b]$:

$$f'(x) \neq ۰$$

۲.۲ تعیین ریشه‌ها با دقت مورد نظر

با مشخص بودن فاصله‌ای که شامل یک ریشهٔ معادله $f(x) = ۰$ است، برای تعیین تقریبی از ریشهٔ مورد نظر با دقت مطلوب، دنباله‌ای از اعداد مانند x_n می‌سازیم به طوری که با افزایش n،

مقدار x_n به α نزدیک شود، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

بنابراین با توجه به تعریف حد، عددی مانند N وجود دارد که

$$x_N \simeq \alpha$$

تعیین Nی که تقریب فوق را بدهد، معیار توقف محاسبهٔ x_nها نامیده می‌شود. در اینجا سه معیار برای توقف ارائه می‌شود. لازم به توضیح است که در یک مسأله پیچیده لزومی ندارد تا استفادهٔ صرف از یکی از این معیارها کافی باشد، و قاعدتاً باید شانس استفاده از هر سه معیار را به طور مناسب در الگوریتم قرار داد.

الف) هرگاه ϵ عددی معلوم و مفروض باشد (مثلاً $\epsilon = 10^{-6}$)، x_nها را تا جایی محاسبه می‌کنیم که $|f(x_N)| < \epsilon$. یعنی به محض اینکه $|f(x_N)| < \epsilon$، عملیات محاسبهٔ x_n را متوقف می‌کنیم و x_N را به عنوان تقریب α می‌پذیریم.

ب) هرگاه اختلاف دو x_n متوالی، مثلاً x_{N-1} و x_N عدد کوچکی شود، یعنی هرگاه برای ϵ معلوم داشته باشیم $|x_N - x_{N-1}| < \epsilon$، در این صورت عملیات را متوقف نموده و x_N را به عنوان تقریب α می‌پذیریم.

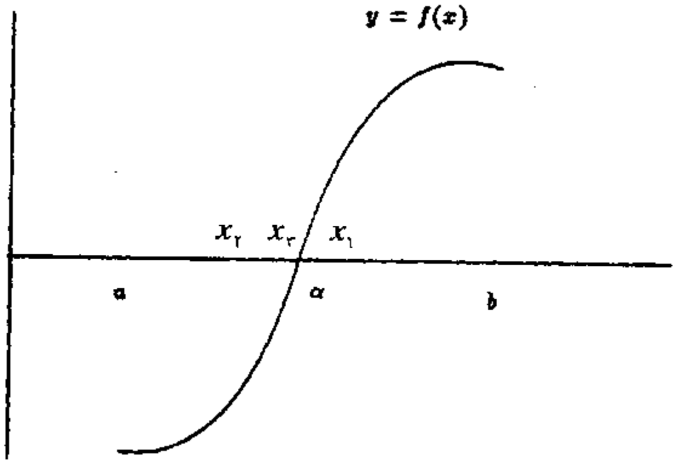
پ) هرگاه تعداد تکرار یا به عبارت دیگر n از یک عدد مشخص بیشتر شود، الگوریتم خاتمه یافته و x_n را به عنوان تقریب α می‌پذیریم.

در قسمت بعد، چند روش عددی را برای تعیین ریشهٔ معادله $f(x) = 0$ معرفی می‌کنیم. در تمام حالتها فرض می‌کنیم محدودیتهای «الف» و «ب» برقرارند.

۳.۲ روش‌های عددی حل معادله $f(x) = 0$

۱.۳.۲ روش دو بخشی یا روش تنصیف

هرگاه شرایط ۱ تا ۳ برقرار بوده و α ریشه معادله $f(x) = 0$ باشد، در این صورت نقطهٔ $(\alpha, 0)$ بر روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار دارد، مطابق شکل زیر :



در روش دو بخشی وسط فاصله $[a, b]$ را به عنوان اولین تقریب α در نظر می‌گیریم، یعنی قرار می‌دهیم :

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

برای x_1 سه حالت وجود دارد:

۱- $f(x_1) = 0$، که در این صورت x_1 ریشه معادله بوده و قرار می‌دهیم $\alpha = x_1$.

۲- $f(a)f(x_1) < 0$ یعنی ریشه بین a و x_1 است، که در این صورت در تکراربعدی فاصله $[a, x_1]$ را برای تعیین ریشه معاد... نظ... می‌گیریم.

۳- $f(a)f(x_1) > 0$، یعنی ... که در این صورت در تکرار بعدی فاصلهٔ $[x_1, b]$ را برای تعیین ریشه مع...

با مقدمه فوق، الگوریتم ا... ...یر خواهیم داشت :

الگوریتم روش دو بخشی.

قدم ۱. قرار دهید $x = \frac{a+b}{2}$.

قدم ۲. اگر $f(a)f(x) < 0$، آن گاه ریشه در فاصله (a, x) است، قرار دهید $b = x$ و مجدداً قدم ۱ را در فاصله جدید $[a, b]$ تکرار کنید.

قدم ۳. اگر $f(a)f(x) > 0$، آن گاه ریشه در فاصله (x, b) است، قرار دهید $a = x$ و مجدداً قدم ۱ را در فاصله جدید $[a, b]$ تکرار کنید.

قدم ۴. اگر $f(a)f(x) = 0$، آن گاه x ریشه است و عملیات خاتمه پیدا می‌کند.

نکته ۱. از آنجا که لزومی ندارد که قدم ۴ اتفاق بیافتد، بنابراین جهت کنترل خطا و پایان الگوریتم باید معیارهای توقف ذکر شده را در الگوریتم به طور مناسب به کار گرفت.

نکته ۲. روش دو بخشی همگرایی تضمین شده دارد، یعنی همواره با دقت مورد نظر به جواب خواهیم رسید.

برنامه روش دو بخشی برای حل معادلهٔ $F(x) = 0$.

در این برنامه تابع $F(x) = x + \cos x$ اختیار شده است.مقادیر a و b و مقدار دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند.با تغییر تابع $F(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد.خروجی برنامه، ریشهٔ مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.

```
c
c       Bisection Method
c
        F(x)=x+cos(x)
        read(*,*) a,b,eps
        x=(a+b)/2
        n=1
10      if (abs(F(x)) .ge. eps) then
           if ( F(x) * F(a) .gt. 0 ) then
              a=x
           else
              b=x
           endif
           x=(a+b)/2
           n=n+1
           goto 10
        else
           write(*,*) "ROOT = ",x
           write(*,*) "ITERATION = ",n
        endif
        end
```

مثال ۱. تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = ۳x - e^{-x} = ۰$ را که در فاصلهٔ $(۰/۲۵, ۰/۲۷)$ قرار دارد، با سه رقم اعشار به دست آورید، به طوری که داشته باشیم؛ $|f(x_n)| < ۰/۰۰۱$ که x_n تقریب ریشه در تکرار nام است.

حل: با توجه به الگوریتم مذکور، جدول زیر را خواهیم داشت :

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{۲}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰٫۲۵	۰٫۲۷	۰٫۲۶	$-$	۰٫۰۰۸۹
۲	۰٫۲۵	۰٫۲۶	۰٫۲۵۵	$+$	$-$۰٫۰۰۹۹
۳	۰٫۲۵۵	۰٫۲۶	۰٫۲۵۷۵	$+$	$-$۰٫۰۰۰۵

چون $|f(x_۳)| = ۰٫۰۰۰۵ < ۰٫۰۰۱$ بنابراین $x_۳$ را به عنوان تقریب ریشه معادله در نظر می‌گیریم.لذا هرگاه α ریشه مورد نظر باشد، با سه رقم اعشار قرار می‌دهیم :

$$\alpha \simeq ۰٫۲۵۸$$

تذکر ۱. با توجه به نکته بیان شده در فصل اول چون در مثال ۱ تقریب را با سه رقم اعشار خواسته‌ایم، محاسبات میانی را با چهار رقم اعشار انجام داده و در نهایت $x_۳$ را تا سه رقم اعشار گرد نموده به عنوان تقریب α قرار داده‌ایم.بدیهی است این تعداد رقم اعشار برای محاسبات میانی لزوماً در هر مسأله مفید نخواهد بود و باید بسته به نوع مسأله، خود استفاده کننده از الگوریتم، در این مورد تصمیم بگیرد.

تذکر ۲. دقت کنید که شرایط ۱ تا ۳ برای معادلهٔ مثال ۱ برقرارند، زیرا داریم :

$$f(a) = f(۰٫۲۵) = -۰٫۰۲۸۸$$

$$f(b) = f(۰٫۲۷) = +۰٫۰۴۶۶$$

پس f در فاصله $(۰٫۲۵, ۰٫۲۷)$ دارای ریشه می‌باشد، همچنین داریم :

$$f'(x) = ۳ + e^{-x} > ۰ \qquad \text{همواره}$$

مثال ۲. تقریبی از ریشه معادله $x^۳ + x - ۱ = ۰$ را که در فاصلهٔ $(۰, ۱)$ قرار دارد، به دست آورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < ۱۰^{-۲}$ که x_n تقریب ریشه در تکرار nام است.تقریب

را با $۴D$ به دست آورید.

حل:

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{۲}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰	۱	۰٫۵	+	−۰٫۳۷۵
۲	۰٫۵	۱	۰٫۷۵	−	۰٫۱۷۱۸۸
۳	۰٫۵	۰٫۷۵	۰٫۶۲۵	+	−۰٫۱۳۰۸۶
۴	۰٫۶۲۵	۰٫۷۵	۰٫۶۸۷۵۰	−	۰٫۰۱۲۴۵
۵	۰٫۶۲۵	۰٫۶۸۷۵	۰٫۶۵۶۲۵	+	−۰٫۰۶۱۱۳
۶	۰٫۶۵۶۲۵	۰٫۶۸۷۵	۰٫۶۷۱۸۸	+	−۰٫۰۲۴۸۳
۷	۰٫۶۷۱۸۸	۰٫۶۸۷۵	۰٫۶۷۹۶۹	+	−۰٫۰۰۶۳۱

چون $|f(x_۷)| = ۰٫۰۰۶۳۱ < ۱۰^{-۲}$ لذا تقریب ریشه با $۴D$ عبارتست از:

$$\alpha \simeq ۰٫۶۷۹۷$$

مثال ۳. تقریبی از ریشه معادله $x^۲ - (۱ - x)^۵ = ۰$ را که در فاصله $(۰, ۱)$ قرار دارد با $۴D$ به دست آورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < ۱۰^{-۲}$ که x_n تقریب ریشه در تکرار nام است.

حل:

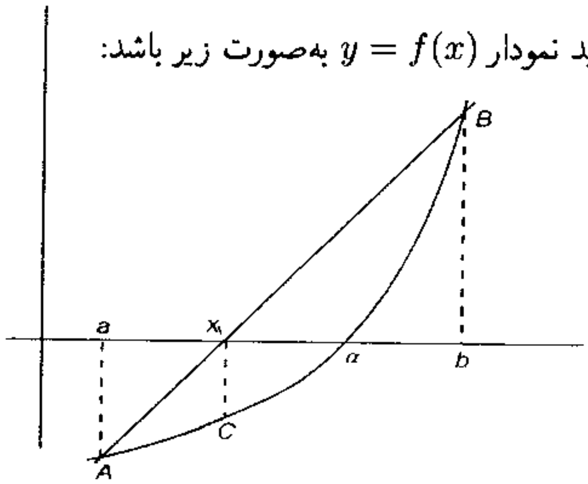
n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{۲}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰	۱	۰٫۵	−	۰٫۲۱۸۷۵
۲	۰	۰٫۵	۰٫۲۵	+	−۰٫۱۷۴۸۰
۳	۰٫۲۵	۰٫۵	۰٫۳۷۵	−	۰٫۰۴۵۲۶
۴	۰٫۲۵	۰٫۳۷۵	۰٫۳۱۲۵۰	+	−۰٫۰۵۵۹۳
۵	۰٫۳۱۲۵۰	۰٫۳۷۵	۰٫۳۴۳۷۵	+	−۰٫۰۰۳۵۵

چون $|f(x_۵)| = ۰٫۰۰۳۵۵ < ۱۰^{-۲}$ بنابراین تقریب ریشه با $۴D$ عبارتست از:

$$\alpha \simeq ۰٫۳۴۳۸$$

۲.۳.۲ روش نابجایی

برای توضیح روش نابجایی، فرض کنید نمودار $y = f(x)$ به‌صورت زیر باشد:



دو نقطه A و B واقع بر منحنی را با یک خط مستقیم به هم وصل می‌کنیم، محل تلاقی این خط با محور xها را به عنوان اولین تقریب α یعنی x_1 در نظر می‌گیریم. حال چون (طبق شکل فوق) ریشه بین x_1 و b است مجداً با یک خط مستقیم دو نقطه B و C بر روی منحنی را به هم وصل می‌کنیم و محل تلاقی این خط با محور xها را x_2 یعنی دومین تقریب ریشه در نظر می‌گیریم. این کار را تا جایی ادامه دهیم که به اندازهٔ کافی به ریشه α نزدیک شویم.

برای تعیین x_1 ابتدا معادله خط AB را می‌نویسیم، این معادله به‌صورت زیر است:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

زیرا مختصات نقاط A و B به ترتیب عبارتند از $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$. چون $(x_1, 0)$ بر روی خط فوق واقع است، لذا خواهیم داشت:

$$\frac{0 - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 - a}{b - a}$$

و از آن

$$x_۱ = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

حال با توجه به اینکه ریشه در فاصلهٔ $[a, x_۱]$ و یا در فاصلهٔ $[x_۱, b]$ قرارگرفته باشد، عمل فوق را در یکی از فاصله‌های مذکور تکرار می‌کنیم بنابراین با توجه به مفروضات روش دو بخشی، در روش نابجایی قرار می‌دهیم :

$$\boxed{x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \qquad (۱)}$$

و حالتهای زیر را بررسی می‌کنیم :

اگر $f(a)f(x) < ۰$ آن گاه ریشه در (a, x) است، لذا قرار می‌دهیم $b = x$ و x جدید را از رابطه (۱) حساب می‌کنیم.

اگر $f(a)f(x) > ۰$ آن گاه ریشه در (x, b) است، لذا قرار می‌دهیم $a = x$ و x جدید را از رابطه (۱) حساب می‌کنیم.

اگر $f(a)f(x) = ۰$ آن گاه ریشه برابر x بوده و کار تمام است.

نکته روش نابجایی نیز مانند روش دو بخشی همگرایی تضمین شده دارد.

برنامه روش نابجایی برای حل معادلهٔ $F(x) = ۰$.

در این برنامه تابع $F(x) = x + \cos x$ اختیار شده است.مقادیر a و b و مقدار دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند.با تغییر تابع $F(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد.خروجی برنامه، ریشهٔ مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.

```
c
c       Regula Falsi Method
c
        F(x)=x+cos(x)
        read(*,*) a,b,eps
        x=(a*F(b)-b*F(a))/(F(b)-F(a))
        n=1
10      if (abs(F(x)) .ge. eps) then
            if ( F(x) * F(a) .gt. 0 ) then
                a=x
            else
                b=x
            endif
            x=(a*F(b)-b*F(a))/(F(b)-F(a))
            n=n+1
            goto 10
        else
                write(*,*) "ROOT = ",x
                write(*,*) "ITERATION = ",n
        endif
        end
```

مثال ۴. تقریبی از ریشه معادله $f(x) = ۳x - e^{-x} = ۰$ را به روش نابجایی با سه رقم اعشار به دست آورید.این ریشه در فاصله $(۰/۲۵, ۰/۲۷)$ قرار دارد.محاسبات را تا جایی ادامه دهید که $|f(x_n)| \geq ۲ \times ۱۰^{-۴}$.

حل: با توجه به رابطه (۱) و اینکه $a = ۰/۲۵$ و $b = ۰/۲۷$ داریم :

$$x_۱ = \frac{۰/۲۵ \times ۰/۰۴۶۶ - ۰/۲۷ \times (-۰/۰۲۸۸)}{۰/۰۴۶۶ - (-۰/۰۲۸۸)} = ۰/۲۵۷۶$$

$$f(x_۱) = -۰/۰۰۰۱$$

لذا $|f(x_۱)| = ۰/۰۰۰۱ < ۲ \times ۱۰^{-۴}$.بنابراین $x_۱$ تقریب ریشه بوده و این تقریب با سه رقم اعشار عبارت است از :

$$\alpha \simeq ۰/۲۵۸$$

(نتیجه را با مثال ۱ مقایسه کنید.)

مثال ۵. تقریبی از ریشه معادله $f(x) = x^۲ - ۲^x = ۰$ را که در فاصله $(-۱, ۰)$ قرار دارد به روش نابجایی با $۴D$ به دست آورید به طوری که $|f(x_n)| < ۱۰^{-۲}$.

حل: هرگاه قرار دهیم $x_n = \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$، جدول زیر را خواهیم داشت :

n	a	b	x_n	$f(a)$	$f(x_n)$	علامت $f(a)f(x_n)$
۱	-۱	۰	$-۰/۶۶۶۶۷$	$۰/۵$	$-۰/۱۸۵۵۲$	$-$
۲	-۱	$-۰/۶۶۶۶۷$	$-۰/۷۵۶۸۸$	$۰/۵$	$-۰/۰۱۸۹۲$	$-$
۳	-۱	$-۰/۷۵۶۸۸$	$-۰/۷۶۵۷۴$	$۰/۵$	$-۰/۰۰۱۷۹$	$-$

چون $|f(x_۳)| = ۰/۰۰۱۷۹ < ۱۰^{-۲}$ پس $x_۳$ تقریب مورد نظر ریشه است.لذا با $۴D$ تقریب ریشه عبارت است از :

$$\alpha \simeq -۰/۷۶۵۷$$

مثال ۶. به روش نابجایی تقریبی از ریشه منفی معادله $f(x) = \sin x - \dfrac{x}{۲} = ۰$ را که در فاصله $(-۲, -۱)$ قرار دارد با $۴D$ به دست آورید، به طوری که $|f(x_n)| < ۱۰^{-۲}$.

حل: برای $x_n = \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$، جدول زیر را خواهیم داشت:

n	a	b	x_n	$f(a)$	$f(x_n)$	علامت $f(a)f(x_n)$
۱	-۲	-۱	$-۱/۷۹۰۱۳$	$۰/۰۹۰۷۰$	$-۰/۰۸۰۹۸$	$-$
۲	-۲	$-۱/۷۹۰۱۳$	$-۱/۸۸۹۱۲$	$۰/۰۹۰۷۰$	$-۰/۰۰۵۲۰$	$-$

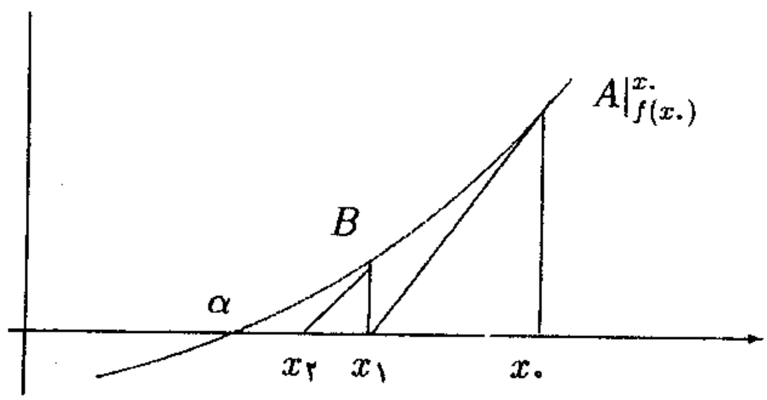
چون $|f(x_۲)| = ۰/۰۰۵۲ < ۱۰^{-۲}$ پس $x_۲$ تقریب مورد نظر از ریشه است. بنابراین با $۴D$ این تقریب عبارت است از :

$$\alpha \simeq -۱/۸۸۹۱$$

توجه: هنگام محاسبه معادلاتی که شامل توابع مثلثاتی هستند، مد (حالت) رادیان ماشین حساب مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳.۳.۲ روش نیوتن-رفسون

برای توضیح این روش، فرض کنید نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر باشد :



همانگونه که شکل فوق نشان می‌دهد α ریشه مورد نظر است. هرگاه $x_۰$ تقریبی از ریشه باشد، از نقطه $A(x_۰, f(x_۰))$ واقع بر منحنی $y = f(x)$ مماس بر منحنی را رسم می‌کنیم .محل تلاقی این مماس را با محور طولها $x_۱$ می‌نامیم.سپس از نقطه $B(x_۱, f(x_۱))$ واقع بر منحنی مماس را

رسم می‌کنیم و محل تلاقی این مماس جدید را با محور طولها x_2 می‌نامیم.این عمل را تا جایی که به تقریب مطلوب برسیم، یعنی x_nها به اندازه کافی به ریشه α نزدیک شوند، ادامه می‌دهیم.

با داشتن x_0 برای تعیین x_1، بایستی معادله خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ را در نقطه $A(x_0, f(x_0))$ بنویسیم و محل تلاقی آن را با محور xها تعیین کنیم. ضریب زاویه این خط مماس $m = f'(x_0)$ است، بنابراین معادله خط مماس عبارت است از :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

محل تلاقی این خط با محور طولها را $(x_1, 0)$ می‌گیریم، لذا

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

که اگر $f'(x_0) \neq 0$ خواهیم داشت :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

بنابراین در حالت کلی با در دست داشتن x_n خواهیم داشت :

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (۲)}$$

رابطه (۲) فرمول تکرار روش نیوتن-رفسون یا به اختصار روش تکرار نیوتن نامیده می‌شود.

نکته: روش نیوتن تضمین همگرایی ندارد، اما به محض قرار گرفتن در مسیر همگرایی می‌توان نشان داد x_nها سریع به جواب مورد نظر میل می‌کند.

برنامه روش نیوتن برای حل معادلهٔ $F(x) = 0$.

در این برنامه تابع $F(x) = x - \cos x$ اختیار شده است.مشتق تابع $\mathrm{Fprime}(x) = 1 + \sin x$ به برنامه داده شده است.مقدار x_0 و دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند.با تغییر تابع $F(x)$ و مشتق آن و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست

آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد.خروجی برنامه ریشهٔ مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.

```
c
c       Newton's Method
c
        F(x)=x-cos(x)
        Fprime(x)=1+sin(x)
        read(*,*) x0,eps
        x=x0 - F(x0) / Fprime(x0)
        n=1
10      if (abs(F(x)) .lt. eps ) goto 20
        x0=x
        x=x0 - F(x0) / Fprime(x0)
        n=n+1
        goto 10
20      write(*,*) "ROOT = ",x
        write(*,*) "ITERATION = ",n
        end
```

مثال ۷. ریشه معادلهٔ $f(x) = x - \cos x = 0$ را که در فاصلهٔ $[0, 1]$ قرار دارد به روش نیوتن با چهار رقم اعشار به دست آورید به طوری که $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ که x_n تقریب ریشه مورد نظر در تکرار nام است.قرار دهید $x_0 = 0/5$.

حل: داریم $f(x)=x-\cos x$ و $f'(x)=1+\sin x$، لذا از رابطه (۲) خواهیم داشت :

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-\cos x_n}{1+\sin x_n}$$

با قرار دادن $x_0=0/5$ داریم :

$$x_1=0/75522$$

$$x_2=0/73914$$

$$x_3=0/73909$$

چون $|x_3-x_2|=5\times10^{-5}<10^{-4}$ لذا x_3 تقریب ریشه مورد نظر است و با $4D$ این تقریب عبارتست از :

$$\alpha\simeq0/7391$$

مثال ۸. به روش نیوتن تقریبی از ریشه معادلهٔ $f(x)=\sin x-\frac{x}{2}$ را که در فاصله $[1/5,2]$ قرار دارد با چهار رقم اعشار به دست آورید، به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)|<10^{-4}$.قرار دهید $x_0=1/75$.

حل: داریم $f(x)=\sin x-\frac{x}{2}$ و $f'(x)=\cos x-\frac{1}{2}$، لذا رابطه زیر را برای محاسبه x_nها خواهیم داشت:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\sin x_n-\frac{x_n}{2}}{\cos x_n-0/5}$$

$$x_0=1/75$$

$$x_1=1/91069$$

$$x_2=1/89563$$

$$f(x_2)=-0/00011$$

چون $|f(x_۲)| < ۱۰^{-۳}$ لذا $x_۲$ تقریبی از ریشه مورد نظر است و با $۴D$ این تقریب عبارتست از:

$$\alpha \simeq ۱/۸۹۵۶$$

توجه. همانگونه که مثالهای ۷ و ۸ نشان می‌دهند، تعداد تکرارهای لازم برای محاسبه ریشه یک معادله به روش نیوتن کمتر از این تعداد به روشهای قبلی است. همچنین هرگاه در مثال ۷ پس از محاسبه $x_۳$ تکرارها را ادامه دهیم خواهیم داشت:

$$x_۳ = \circ/۷۳۹\circ۹$$

$$x_۴ = \circ/۷۳۹\circ۹$$

$$x_۵ = \circ/۷۳۹\circ۹$$

$$\vdots$$

به طور مشابه هرگاه در مثال ۸ پس از محاسبه $x_۲$ تکرارها را ادامه دهیم، خواهیم داشت:

$$x_۲ = ۱/۸۹۵۶۳$$

$$x_۳ = ۱/۸۹۵۴۹$$

$$x_۴ = ۱/۸۹۵۴۹$$

$$\vdots$$

مثال ۹. به روش نیوتن تقریبی از ریشه معادله $f(x) = ۳e^x - \frac{۱}{x} = \circ$ را که در فاصله $(\circ/۲, \circ/۳)$ قرار دارد با چهار رقم اعشار به دست آورید. قرار دهید $x_\circ = \circ/۲۵$.

حل: داریم $f(x)=3e^x-\frac{1}{x}$ و $f'(x)=3e^x+\frac{1}{x^2}$، لذا:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{3e^{x_n}-\frac{1}{x_n}}{3e^{x_n}+\frac{1}{x_n^2}}$$

$$x_0=0{,}25$$

$$x_1=0{,}25745$$

$$x_2=0{,}25763$$

$$x_3=0{,}25763$$

$$\vdots$$

بنابراین $\alpha\simeq 0{,}2576$ تقریب ریشه با چهار رقم اعشار است.

مثال ۱۰. با ارائه روند تکراری نیوتن-رفسون ریشهٔ kام یک عدد مثبت c را حساب کنید و از آنجا تقریبی برای $\sqrt{2}$ بیابید.

حل: معادله $f(x)=x^k-c=0$ را در نظر می‌گیریم لذا برای یافتن ریشه kام c بایستی ریشهٔ معادله $f(x)=0$ را به دست آوریم. طبق روش تکراری نیوتن-رفسون با داشتن x_0 داریم:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^k-c}{kx_n^{k-1}}=\frac{kx_n^k-x_n^k+c}{kx_n^{k-1}}$$
$$x_{n+1}=\frac{(k-1)x_n^k+c}{kx_n^{k-1}}$$
$$x_{n+1}=\frac{1}{k}\left((k-1)x_n+\frac{c}{x_n^{k-1}}\right)$$

لذا برای یافتن تقریبی از $\sqrt{2}$ داریم:

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$$

اگر $x_\circ = ۱$ در این صورت :

$$x_۱ = ۱/۵\circ\circ\circ\circ\circ\circ \qquad x_۲ = ۱/۴۱۶۶۶۶۷ \qquad x_۳ = ۱/۴۱۴۲۱۵۷$$

$$x_۴ = ۱/۴۱۴۲۱۳۶ \qquad x_۵ = ۱/۴۱۴۲۱۳۶ \qquad \cdots$$

لذا ۱/۴۱۴۲۱۳۶ را به عنوان تقریبی از $\sqrt{۲}$ بر می‌گزینیم.

۴.۳.۲ روش وتری

می‌دانیم

$$\lim_{x \to x_n} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = f'(x_n)$$

لذا هرگاه x مقداری نزدیک x_n باشد، مثلاً $x_{n-۱}$، در این صورت

$$\boxed{\frac{f(x_n) - f(x_{n-۱})}{x_n - x_{n-۱}} \simeq f'(x_n) \qquad (۳)}$$

بنابراین هرگاه در فرمول نیوتن، یعنی رابطه (۲) به جای $f'(x_n)$ مقدار تقریبی آن را از رابطه (۳) قرار دهیم به دست می‌آوریم :

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-۱})}{x_n - x_{n-۱}}}$$

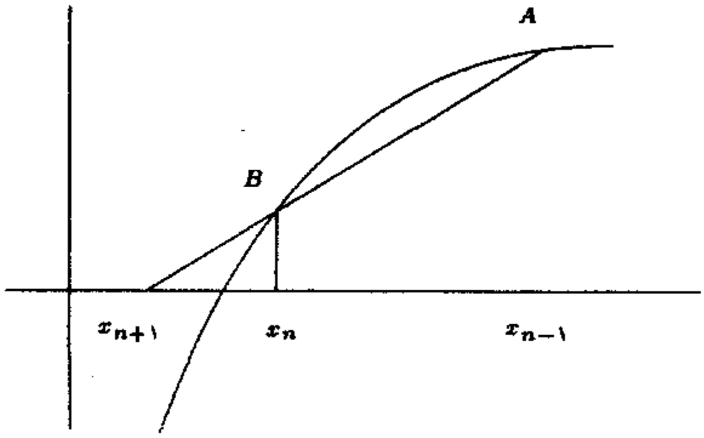
و یا

$$\boxed{x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-۱})}{f(x_n) - f(x_{n-۱})} \qquad (۴)}$$

رابطه (۴) فرمول روش وتری برای به دست آوردن ریشهٔ معادله $f(x) = \circ$ نامیده می‌شود. برای محاسبه تقریب‌های ریشه یعنی برای محاسبه x_nها از فرمول وتری به دو مقدار اولیه $x_\circ$ و $x_۱$ نیاز داریم.

علت اینکه این روش را وتری نامند، آن است که در مرحلهٔ nام $x_{n+۱}$ از محل برخورد خط (وتر)

وصل نقاط $A|_{f(x_{n-1})}^{x_{n-1}}$ و $B|_{f(x_n)}^{x_n}$ با محور xها به دست می‌آید.به شکل زیر توجه کنید :



نکته: تفاوت عمده روش وتری با روش نابجایی در این است که در روش نابجایی در هر مرحله بررسی می‌شود و فاصله‌ای در نظر گرفته می‌شود که تابع در آن تغییر علامت می‌دهد.در حالی که در روش وتری صرفاً زیر فاصلهٔ آخر که نقاط انتهایی آن در تکرار اخیر به دست آمده‌اند، جهت تکرار روش به کار برده می‌شود و به همین دلیل روش وتری تضمین همگرایی ندارد، اما می‌توان نشان داد که سرعت همگرایی روش وتری (در صورت همگرایی) بیشتر از روش نابجایی است.

برنامه روش وتری برای حل معادلهٔ $F(x) = ۰$.

در این برنامه تابع $F(x) = x^۳ + x - ۱$ اختیار شده است و مقادیر اولیه $x_۰$ و $x_۱$ و مقدار دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند.با تغییر تابع $F(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد.خروجی برنامه، ریشهٔ مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.

```
c
c  Secant Method
c
      F(x)= x**3 + x - 1
      read(*,*) x0,x1,eps
```

```
      x=x1-(F(x1)*(x1-x0))/(F(x1)-F(x0))
      n=1
10    if (abs(F(x)) .lt. eps ) goto 20
      x0=x1
      x1=x
      x=x1-(F(x [illegible] F(x1)-F(
      n=n+1
      goto 10
20    write(*,*) "ROOT = ",x
      write(*,*) "ITERATION = ",n
      end
```

مثال ۱۱. با استفاده از روش وتری ریشه معادله $x^۳ + x - ۱ = ۰$ را با سه رقم اعشار به دست آورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < ۰/۰۰۱$. قرار دهید $x_۰ = ۰$ و $x_۱ = ۱$.

حل: با استفاده از رابطه (۴) و $x_۰ = ۰$ و $x_۱ = ۱$ خواهیم داشت :

$$x_۲ = ۰/۵$$

$$x_۳ = ۰/۶۳۶۴ \qquad f(x_۳) = -۰/۱۰۵۹$$

$$x_۴ = ۰/۶۹۰۱ \qquad f(x_۴) = ۰/۰۱۸۸$$

$$x_۵ = ۰/۶۸۲۰, \qquad f(x_۵) = -۰/۰۰۰۸$$

چون $|f(x_۵)| < ۰/۰۰۱$ پس

$$\alpha \simeq ۰/۶۸۲ \qquad (۳D)$$

۵.۳.۲ روش تکرار ساده

در این روش پس از آزمون شرایط موجود بودن ریشه برای معادله $f(x) = 0$ در فاصله $[a, b]$، معادله $f(x) = 0$ پس از دستکاریهایی به صورت $x = g(x)$ نوشته می‌شود.به طوری که α ریشهٔ هر دو معادله باشد، یعنی :

$$f(\alpha) = 0 \quad \& \quad \alpha = g(\alpha)$$

توجه ۱. معمولاً از روی یک معادله $f(x) = 0$ به صورتهای مختلفی می‌توان به شکل $x = g(x)$ رسید.

مثال ۱۲. معادله $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ را در نظر بگیرید، در این صورت برای تابع $g(x)$ انتخابهای زیر وجود دارد :

الف. $g(x) = x^2 - 2$

ب. $g(x) = \sqrt{x + 2}$

پ. $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$

توجه ۲. بدیهی‌ترین صورتهای ممکن برای تبدیل معادله $f(x) = 0$ به صورت $x = g(x)$ عبارتند از :

$$x = x - f(x)$$

$$x = x + f(x)$$

پس از نوشتن معادله $f(x) = 0$ به صورت $x = g(x)$، هرگاه x_0 تقریبی از α، ریشه معادله باشد x_nها به طریق زیر ساخته می شوند :

$$x_1 = g(x_0)$$
$$x_2 = g(x_1)$$
$$x_3 = g(x_2)$$
$$\vdots$$

و به طور کلی با در دست داشتن x_n قرار می‌دهیم :

$$\boxed{x_{n+1} = g(x_n), \qquad n = 0, 1, 2\cdots \qquad (5)}$$

رابطه (۵) فرمول روش تکرار ساده برای به دست آوردن α، ریشه معادله $f(x) = 0$، نامیده می‌شود.

شرط کافی برای همگرایی روش تکرار ساده :

برای اطمینان از اینکه x_nهایی که از رابطه (۵) محاسبه می‌شوند، به ریشه α از معادله $f(x) = 0$ میل می‌کنند یا خیر، دو شرط زیر را به عنوان شرط کافی همگرایی دنباله $\{x_n\}$ بیان می‌کنیم :

۱- برای $x \in [a, b]$ داشته باشیم $g(x) \in [a, b]$

۲- برای $x \in [a, b]$ داشته باشیم $|g'(x)| < 1$.

توجه: شرایط فوق شرایط کافی هستند، بنابراین هرگاه تابع $g(x)$ دارای دو شرط فوق باشد x_nها به α میل می‌کنند.لذا پس از تشکیل معادله $x = g(x)$، ابتدا شرایط فوق را بررسی می‌کنیم هرگاه $g(x)$ در هر دو شرط صدق کرد با داشتن x_0 مقادیر x_n را از رابطه (۵) محاسبه می‌کنیم، و اگر $g(x)$ حداقل یکی از شرایط را نداشت، یک g دیگر انتخاب می‌کنیم.

برنامه روش تکرار ساده برای حل معادلهٔ $F(x) = 0$.

این برنامه برای به دست آوردن ریشه معادلهٔ $F(x) = e^{-x} - \sin x = 0$ مورد استفاده قرار گرفته است.تابع $G(x)$ به صورت $G(x) = x + e^{-x} - \sin x$ اختیار شده است. مقدار x_0 و

دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند.با تغییر تابع $F(x)$ و $G(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد.خروجی برنامه، ریشهٔ مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.

```
c
c       Fixed Point Iteration Method
c
c       This program solves the equation EXP(-X)-SIN(X)=0
c       by fixed point iteration, using the iteration function
c       G(X)=X+EXP(-X)-SIN(X)
c
        F(x)= exp(-x) - sin(x)
        G(x)=x+exp(-x)-sin(x)
        read(*,*) x0,eps
        x=G(x0)
        n=1
10      if (abs(F(x)) .lt. eps ) goto 20
        x0=x
        x=G(x0)
        n=n+1
        goto 10
20      write(*,*) "ROOT = ",x
        write(*,*) "ITERATION = ",n
        end
```

مثال ۱۳. برای تعیین تقریب ریشه معادله $f(x) = ۳xe^x - ۱ = ۰$ که در فاصله $(۰, ۱)$ قرار دارد از روش تکرار ساده استفاده کنید.قرار دهید $x_۰ = ۰/۵$ و تقریب را با $۳D$ به دست آورید.

حل: معادله را به شکل $x = \frac{e^{-x}}{۳}$ می‌نویسیم و قرار می‌دهیم

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{۳}$$

برای نشان دادن دارا بودن شرایط ۱ و ۲ برای تابع g به صورت زیر عمل می‌کنیم، چون $x \in (۰, ۱)$ پس

$$۰ < x < ۱$$

$$-۱ < -x < ۰$$

$$e^{-۱} < e^{-x} < e^{۰}$$

$$\frac{۱}{۳e} < \frac{e^{-x}}{۳} < \frac{۱}{۳}$$

$$\frac{۱}{۳e} < g(x) < \frac{۱}{۳}$$

چون $\frac{۱}{۳e} = ۰/۱۲$، بنابراین $۰ < ۰/۱۲ < g(x) < \frac{۱}{۳} < ۱$

لذا برای $x \in (۰, ۱)$ داریم : $g(x) \in (۰, ۱)$.در ضمن

$$g'(x) = \frac{-e^{-x}}{۳}$$

و اگر $x \in (۰, ۱)$ خواهیم داشت :

$$|g'(x)| = \frac{e^{-x}}{۳} < \frac{e^{۰}}{۳} = \frac{۱}{۳} < ۱$$

بنابراین $g(x)$ مناسب است.با استفاده از $x_۰ = ۰/۵$ و از رابطه

$$x_{n+۱} = \frac{e^{-x_n}}{۳}$$

داریم :

$$x_۱ = ۰/۲۰۲۲ \quad (۴D)$$

$$x_۲ = ۰/۲۷۲۳$$

$$x_۳ = ۰/۲۵۳۹$$

$$x_۴ = ۰/۲۵۸۶$$

$$x_۵ = ۰/۲۵۷۴$$

$$x_۶ = ۰/۲۵۷۷$$

$$x_۷ = ۰/۲۵۷۶$$

$$x_۸ = ۰/۲۵۷۶$$

$$x_۹ = ۰/۲۵۷۶$$

لذا

$$\alpha \simeq ۰/۲۵۸ \quad (۳D)$$

مثال ۱۴. تقریبی از ریشهٔ معادله $f(x) = x - \cos x = ۰$ را که در فاصلهٔ $[۰, ۱]$ قرار دارد با سه رقم اعشار به دست آورید، به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < ۱۰^{-۲}$. قرار دهید $x_۰ = ۰/۵$.

حل: داریم $x = \cos x$ لذا قرار می‌دهیم $g(x) = \cos x$، برای $x \in [۰, ۱]$ نشان می‌دهیم $g(x) \in [۰, ۱]$:

$$۰ \leq x \leq ۱$$

چون تابع کسینوس بر $[۰, ۱]$ تابعی نزولی است، پس

$$\cos ۱ \leq \cos x \leq \cos ۰$$

$$۰/۵۴۰۳ \leq \cos x \leq ۱$$

همچنین داریم $g'(x) = -\sin x$ و بایستی نشان دهیم $|\sin x| = |g'(x)| < ۱$ برای $x \in [۰, ۱]$ چون تابع سینوس روی $[۰, ۱]$ تابعی صعودی است، پس برای $۰ \leq x \leq ۱$ خواهیم داشت:

$$\sin ۰ \leq \sin x \leq \sin ۱$$

$$۰ \leq \sin x \leq ۰/۸۴۱۵ < ۱$$

بنابراین $|g'(x)| < ۱$ در نتیجه $g(x)$ مناسب است.برای $x_۰ = ۱$ و $x_{n+۱} = \cos x_n$ داریم :

$$x_۱ = ۰/۵۴۰۳$$

$$x_۲ = ۰/۸۵۷۶$$

$$x_۳ = ۰/۶۵۴۳$$

$$x_۴ = ۰/۷۹۳۵$$

$$x_۵ = ۰/۷۰۱۴$$

$$x_۶ = ۰/۷۶۴۰$$

$$x_۷ = ۰/۷۲۲۱$$

$$x_۸ = ۰/۷۵۰۴$$

$$x_۹ = ۰/۷۳۱۴$$

$$x_{۱۰} = ۰/۷۴۴۲, \qquad f(x_{۱۰}) = ۰/۰۰۸۶$$

چون $|f(x_{۱۰})| < ۱۰^{-۲}$ لذا $(۳D)$ $\qquad \alpha \simeq ۰/۷۴۴$

توجه. گاهی به جای بیان اینکه " تقریب ریشه را طوری به دست آورید که $|f(x_n)| < \epsilon$ می‌گوییم " ریشه را با تقریب ϵ به دست آورید ".

مجموعه مسائل فصل دوم

۱- تقریبی از ریشه معادلات زیر را به روش دو بخشی حساب کنید، به طوری که $|f(x_n)| < \epsilon$، (a، b و ϵ داده شده‌اند) تقریب‌ها را با $۴D$ به دست آورید.

الف . $x - \cos x = ۰ \quad , a = ۰ \quad , b = ۱ \quad , \epsilon = ۱۰^{-۳}$

ب . $x^۲ - ۳ = ۰ \quad , a = ۱ \quad , b = ۲ \quad , \epsilon = ۱۰^{-۳}$

پ . $x^۲ + x - ۱ = ۰ \quad , a = ۰ \quad , b = ۱ \quad , \epsilon = ۱۰^{-۲}$

جواب.

الف . $\alpha \simeq ۰/۷۳۹۳ \quad , x_{۱۰} = ۰/۷۳۹۲۷$

ب . $\alpha \simeq ۱/۷۳۲۰ \quad , x_{۱۱} = ۱/۷۳۱۹۵$

پ . $\alpha \simeq ۰/۶۱۷۲ \quad , x_{۷} = ۰/۶۱۷۱۹$

۲- به روش دو بخشی تقریبی از ریشه معادلات زیر را با تقریب ϵ به دست آورید، نتایج را با $۴D$ به دست آورید. (a، b و ϵ داده شده‌اند)

الف . $\sin x - \frac{x}{۲} = ۰ \quad , a = ۱ \quad , b = ۳ \quad , \epsilon = ۰/۰۰۳$

ب . $x \sin x - ۱ = ۰ \quad , a = ۱ \quad , b = ۱/۵ \quad , \epsilon = ۰/۰۳$

پ . $x^۳ + ۴x^۲ - ۱۰ = ۰ \quad , a = ۱ \quad , b = ۲ \quad , \epsilon = ۰/۰۰۴$

جواب.

الف . $\alpha \simeq ۱/۸۹۸۴ \quad , x_{۸} = ۱/۸۹۸۴۴$

ب . $\alpha \simeq ۱/۱۲۵ \quad , x_{۲} = ۱/۱۲۵۰۰$

پ . $\alpha \simeq ۱/۳۶۵۲ \quad , x_{۹} = ۱/۳۶۵۲۳$

۳- با روش نابجایی معادلات زیر را با تقریب ϵ با $۴D$ به دست آورید.(a،b و ϵ داده شده‌اند)

الف . $۲\sin x + x - ۲ = ۰ \quad , a = ۰/۶ \quad , b = ۰/۸ \quad \epsilon = ۱۰^{-۲}$

ب . $۳\sin x - x - \frac{۱}{x} = ۰ \quad , a = ۰/۷ \quad , b = ۰/۹ \quad \epsilon = ۵ \times ۱۰^{-۵}$

پ . $x + \cos x = ۰ \quad , a = -۰/۷۵ \quad , b = -۰/۷۳ \ , \epsilon = ۳ \times ۱۰^{-۵}$

جواب.

الف. $\alpha \simeq ۰/۷۰۴۶$ ب. $\alpha \simeq ۰/۷۶۳۱$ پ. $\alpha \simeq -۰/۷۳۹۱$

۴- ریشه معادله $f(x) = x - ۰/۲\sin x - ۰/۵$ را که در فاصله $[۰/۵, ۱]$ قرار دارد به روش نیوتن به دست آورید.

جواب. $x_۲ = ۰/۶۱۵۴۶۸۱۶$

۵- به روش نیوتن تقریبی از ریشه معادلهٔ $e^{-x} = \sin x$ را که در فاصله $(۰, ۱/۲)$ قرار دارد با $۷D$ به دست آورید به طوری که داشته باشیم $|x_n - x_{n-۱}| < ۱۰^{-۴}$.(قرار دهید $x_۰ = ۰/۶$)

جواب. $x_۲ = ۰/۵۸۸۵۳۲۷۴$ و $\alpha \simeq ۰/۵۸۸۵۳۲۷$

۶- به روش نیوتن تقریبی از ریشه معادلهٔ $x^۲ - ۳ = ۰$ را که در فاصله $[۱, ۲]$ قرار دارد با $۳D$ به دست آورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < ۱۰^{-۳}$.(قرار دهید $x_۰ = ۲$)

جواب. $x_۲ = ۱/۷۳۲۱$ و $\alpha \simeq ۱/۷۳۲$

۷- به روش وتری تقریبی از ریشه معادلهٔ $f(x) = x^۳ - ۰/۲x^۲ - ۰/۲x - ۱/۲$ را که در فاصله $(۱, ۲)$ قرار دارد با تقریب ۰٫۰۰۲ و با $۳D$ به دست آورید.(قرار دهید $x_۰ = ۱$ و $x_۱ = ۱/۵$)

جواب. $\alpha \simeq ۱/۱۹۸$

۸- با استفاده از روش نیوتن کوچکترین ریشه معادله $\tan x = x$ را با تقریب ۰٫۰۰۰۱ پیدا کنید.(این ریشه در فاصله $(\pi, \frac{۳\pi}{۲})$ قرار دارد.) قرار دهید $x_۰ = \frac{۳\pi}{۲}$ و ریشه را با $۵D$ به دست آورید.

راهنمایی. معادله را به صورت $f(x) = \sin x - x\cos x = ۰$ باز نویسی کنید.

جواب. $\alpha \simeq ۴/۴۹۳۴۱$

۹- با روش تکرار ساده تقریبی از ریشه معادلهٔ $f(x) = x - \sin x - ۰/۲۵ = ۰$ را که در فاصله $(۱/۱, ۱/۳)$ قرار دارد به دست آورید، به طوری که $|f(x_n)| < ۱۰^{-۳}$ (جواب را با $۳D$ به دست آورید.)

جواب. برای $g(x) = \sin x + ۰/۲۵$ و $x_۰ = ۱/۲$ داریم $\alpha \simeq ۱/۱۷۱$

۱۰- معادله $f(x) = x^{۲}e^{x} - ۱ = ۰$ ریشه‌ای در $[۰, ۱]$ دارد.برای تعیین تقریبی از این ریشه به روش تکرار ساده $g(x)$ مناسب ارائه دهید و با فرض $x_۰ = ۰/۷$ تقریبی از ریشه چنان حساب کنید که داشته باشیم $|f(x_n)| < ۰/۰۰۰۱$.(جواب با $۴D$)

جواب. $g(x) = \sqrt{e^{-x}}$ و $\alpha \simeq ۰/۷۰۳۵$

۱۱- معادلهٔ $f(x) = e^{x} - ۴x^{۲} = ۰$ دارای ریشه‌ای در فاصلهٔ $[۰, ۱]$ است.با قرار دادن $x = \frac{۱}{۲}e^{x/۲}$ و انتخاب $x_۰ = ۰$ این ریشه را با تقریب $۰/۰۰۱$ حساب کنید.(جواب با $۴D$)

جواب. $x_۸ = ۰/۷۱۴۶۶$ و $\alpha \simeq ۰/۷۱۴۷$