

## گزاره ها و علامت گذاری (Statements And Notation)

گزاره یک جمله‌ی خبری ساده است که بدون هیچ‌گونه ابهام و بدون کمک از هیچ اطلاع دیگری، به جز آنچه که در خود جمله بیان شده است، بتوان راست یا دروغ بودن آن را تشخیص داد. (هر چند که فعلاً راست یا دروغ بودن آن برای ما معلوم نباشد)

مثلاً «تهران پایتخت کنونی ایران است»، «هر عدد زوج بر ۲ بخش پذیر است»: هر دو گزاره راست هستند!

«اصفهان پایتخت کنونی ایران است» و «عدد ۴ از ۳ کوچکتر است» هر دو گزاره دروغ هستند!

«در کره‌ی مریخ موجودات ذره‌بینی زندگی می‌کنند» یک جمله خبری و گزاره است هر چند که راست یا دروغ بودن آن فعلاً بر ما معلوم نیست ولی روزی معلوم خواهد شد که این جمله راست است یا دروغ است و جز این نخواهد بود.

ولی هیچ‌یک از جملات زیر گزاره نیستند:

«دوستم حسن مرد حسودی است»، زیرا حسود بودن نسبی است.

«علی در را ببند!»، زیرا یک جمله‌ی امری است.

بنابراین O.L. (Object Language) تنها شامل جملات خبری ساده است که فقط دارای یکی از دو ارزش راست (True) و یا دروغ (False) باشد.

\* در منطق سمبولیک گزاره‌ها را با یکی از حروف بزرگ انگلیسی به غیر از T و F نمایش می‌دهند.

## لفظهای پیوند دهنده (Connectives)

گزاره‌ها بر دو نوع‌اند. گزاره‌های ساده (Primitive Statement)، گزاره‌های مرکب (Compound Statement).

گزاره ساده یک جمله‌ی خبری ساده است که به جملات ساده‌تر قابل تجزیه نمی‌باشد و شامل هیچ لفظ پیوند دهنده‌ای نیست ولی گزاره مرکب را می‌توان از ترکیب گزاره‌های ساده و لفظهای پیوند دهنده و پرانتزها بوجود آورد. بنابراین در زیر چند لفظ پیوند دهنده مورد استفاده معرفی گردیده است؛

### نفی (Negation) (1.1)

اگر P یک گزاره‌ی دلخواه باشد، گزاره‌ی را که P را انکار کند، نفی P گویند و به صورت "¬P" یا "P~" نشان می‌دهند و «نفی P» یا «چنین نیست که P» می‌خوانند.

هر گاه P راست باشد، ¬P دروغ خواهد بود و بالعکس. جدول درستی این عملگر یگانی (Unary Operation) به شکل زیر

P	¬P
T	F
F	T

است؛

### ترکیب عطفی یا AND (Conjunction) ( $\wedge$ )

گزاره‌ی مرکب حاصل از ترکیب عطفی دو گزاره‌ی دلخواه P و Q را به صورت  $P \wedge Q$  نشان می‌دهند و آن را «ترکیب عطفی P و Q» یا «P و Q» می‌خوانند. جدول درستی این ترکیب، (Binary Operation) به شکل زیر است؛

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

### ترکیب فصلی یا OR (Disjunction) ( $\vee$ )

گزاره‌ی حاصل از ترکیب فصلی دو گزاره‌ی دلخواه P و Q را به صورت  $P \vee Q$  نشان می‌دهند و آن را «ترکیب فصلی P و Q» و یا «P یا Q» می‌خوانند. جدول درستی این ترکیب به شکل زیر است؛

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

## فرمول گزاره‌ای و جدول ارزش (Statement Formula And Truth Table)

هنگامی که گزاره‌های دلخواه را به طور مجرد در نظر بگیریم و آن‌ها را با استفاده از وسیله‌ی لفظ‌های پیوند دهنده با نظمی خاص کنار هم قرار دهیم، آنچه را که بدست می‌آید فرمول گزاره‌ای و هر یک از گزاره‌های ساده‌ی بکار رفته را یک مؤلفه گویند.

### جدول ارزش (Truth Table)

جدولی که ارزش فرمول گزاره‌ای را به ازای تمام ترکیبات ارزش ممکن برای مؤلفه‌ها نمایش دهد، جدول ارزش آن فرمول گویند. اگر فرمول گزاره‌ای شامل  $n$  متغیر گزاره‌ای متمایز باشد، آنگاه جدول ارزش آن شامل  $2^n$  ترکیبات ارزش متمایز خواهد بود.

مثال) جدول ارزش فرمول گزاره‌ای  $(P \vee Q) \vee \sim P$  را تشکیل دهید؛

P	Q	$P \vee Q$	$\sim P$	$(P \vee Q) \vee \sim P$
T	T	T	F	T
T	F	T	F	T
F	T	T	T	T
F	F	F	T	T

\* این مثال یک tautology است که در ادامه به تعریف آن خواهیم پرداخت

### ترکیب شرطی (Conditional Statement) ( $\rightarrow$ )

ترکیب شرطی دو گزاره‌ی دلخواه P و Q را به صورت  $P \rightarrow Q$  نشان می‌دهند و آنرا «اگر P آنگاه Q» می‌خوانند، در گزاره‌ی شرطی  $P \rightarrow Q$  مؤلفه‌ی P را شرط (مقدم، Antecedent) و Q را جواب شرط (تالی، Consequent) گویند. ارزش گزاره‌ی  $P \rightarrow Q$  فقط هنگامی دروغ است که مقدم آن دارای ارزش T و تالی آن دارای ارزش F باشد. ترکیب شرطی در زبان فارسی به صورت زیر بیان می‌شود:

Q شرط لازم برای P است.

P شرط کافی برای Q است.

Q اگر P

P فقط اگر Q

جدول درستی این ترکیب به شکل روبرو است؛

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

باید توجه نمود در گزاره‌ی  $P \rightarrow Q$  هیچ‌گونه مفهوم شرط وجود ندارد و تنها یک نامگذاری است. هم‌چنین وجود هیچ رابطه‌ای بین P و Q ضروری نیست.

مثال ۱) گزاره‌ی  $P \rightarrow Q$  که در آن، P: امروز هوا آفتابی است و Q:  $2+7 \geq 4$ ، دو گزاره معین هستند را به صورت جمله‌ی فارسی بیان کنید؛

پاسخ: اگر امروز هوا آفتابی باشد، آنگاه  $2+7 \geq 4$  خواهد بود.

مثال ۲) گزاره‌ی زیر را بصورت سمبلیک بنویسید:

«اگر علی درس جبر را انتخاب کند یا رامین درس جغرافی را انتخاب کند، آنگاه حسن درس منطق را انتخاب خواهد کرد.»

پاسخ: با فرض P: علی درس جبر را انتخاب کند، Q: رامین درس جغرافی را انتخاب کند، L: حسن درس منطق را انتخاب می‌کند، داریم؛

$$(P \vee Q) \rightarrow L$$

### ترکیب دو شرطی (Biconditional) ( $\leftrightarrow$ , $\Leftrightarrow$ )

اگر P و Q دو گزاره‌ی دلخواه باشند، گزاره‌ی  $P \leftrightarrow Q$  («P اگر و فقط اگر Q» می‌خوانند) را گزاره‌ی ترکیب دو شرطی گویند و گاهی به صورت اختصاری «P iff Q» نیز نشان می‌دهند. گزاره‌ی ترکیب دو شرطی  $P \leftrightarrow Q$  فقط هنگامی ارزش T دارد که P و Q هر دو دارای ارزش یکسان باشند. در زبان فارسی گزاره‌ی ترکیب دو شرطی را به صورت «P شرط لازم و کافی برای Q است» بیان می‌کنند. جدول درستی این ترکیب به صورت زیر است؛

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

مثال) جدول زیر ارزش فرمول گزاره‌ای  $\sim(P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$  را تشکیل می‌دهد.

P	Q	$P \wedge Q$	$\sim(P \wedge Q)$	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \vee \sim Q$	$\sim(P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

با توجه به جدول معلوم می‌شود که ارزش فرمول مستقل از دو متغیر P و Q می‌باشد. یعنی فرمول به ازای تمام ارزشهای ممکن برای متغیرهای P و Q دارای ارزش T می‌باشد.

### فرمول گزاره‌ای همیشه راست (Tautology)

فرمول گزاره‌ای را که مستقل از ارزش گزاره‌های معینی که جایگزین متغیرهای آن می‌شوند دارای ارزش راست باشد، فرمول گزاره‌ای همیشه راست (Taut) گویند. به عبارت دیگر جدول درستی این فرمولها در همه‌ی حالتها خروجی T دارد. مثال) فرمول  $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$  یک فرمول گزاره‌ای همیشه راست است.

### فرمول گزاره‌ای همیشه دروغ (Contradiction)

تعریف فرمول Cont دقیقاً بر خلاف فرمول Taut است و خروجی جدول درستی آن در همه حالتها F است. مثال) فرمول  $P \wedge \sim P$  یک فرمول گزاره‌ای همیشه دروغ است.

## فرمول‌های هم‌ارز (Equivalence of Formulas) ( $\Leftrightarrow, \equiv$ )

فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو فرمول گزاره‌ای و  $P_1, P_2, \dots, P_n$  همه‌ی متغیرهای ظاهر شده در  $A$  و  $B$  باشند اگر به ازای هر یک از  $2^n$  ترکیبات ارزش ممکن برای متغیرها، ارزش دو فرمول  $A$  و  $B$  یکسان باشد آنگاه گوییم  $A$  و  $B$  هم‌ارزند و آن را به صورت " $A \Leftrightarrow B$ " نشان می‌دهند.

(مثال)

$\sim \sim P$  با  $P$  هم‌ارز است.  $P \vee P$  با  $P$  هم‌ارز است.  $(P \wedge \sim P) \vee Q$  با  $Q$  هم‌ارز است.

### طریقه‌ی تشخیص هم‌ارزی دو فرمول $A$ و $B$ :

۱- تشکیل جدول ارزش دو فرمول  $A$  و  $B$  و مقایسه‌ی داراییه‌های ستون آخر آنها.

۲- استفاده از جدول ارزش ترکیب دو شرطی  $A \leftrightarrow B$ ، در صورتی که دو فرمول  $A$  و  $B$  هم‌ارز باشند باید  $A \leftrightarrow B$  یک  $T$  باشد. در صورتی که دو فرمول  $A$  و  $B$  هم‌ارز باشند آن را به صورت « $A \Leftrightarrow B$ » نشان می‌دهند که « $A \Leftrightarrow B$ » یک گزاره نیست. یعنی علامت  $\Leftrightarrow$  لفظ پیوند دهنده نیست و از اعمال آن بر روی گزاره‌ها، گزاره‌ی جدیدی بوجود نمی‌آید.

### فرمولهای هم‌ارزی مهم

$P \vee P \Leftrightarrow P$	قانون خود توانی	$P \wedge P \Leftrightarrow P$
$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	شرکت پذیری	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	جابجایی	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	توزیع پذیری	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
$P \vee F \Leftrightarrow P$	همانی (عضو خنثی)	$P \wedge T \Leftrightarrow P$
$P \vee T \Leftrightarrow T$	عضو صفر	$P \wedge F \Leftrightarrow F$
$P \vee \sim P \Leftrightarrow T$	مکمل (عضو وارون)	$P \wedge \sim P \Leftrightarrow F$
$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$	جذب	$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
$\sim(P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$	دمورگان	$\sim(P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$
$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q$ $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P$ $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R \Leftrightarrow Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow (\sim P \vee Q) \wedge (\sim Q \vee P)$		

مثال) نشان دهید که فرمولهای زیر باهم هم ارز هستند؛

$$(\sim P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow \sim Q \Leftrightarrow Q \rightarrow P$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} & (\sim P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow \sim Q \\ \Leftrightarrow & (\sim P \wedge (\sim P \vee Q)) \rightarrow \sim Q \\ \Leftrightarrow & \sim P \rightarrow \sim Q \\ \Leftrightarrow & Q \rightarrow P \end{aligned}$$

### استلزام منطقی (Tautological Implication)

بر خلاف لفظهای پیوند دهنده عطفی، فصلی و دو شرطی که دارای تقارن (Symmetric) هستند، ترکیب شرطی این خاصیت را دارا نمی باشد و برای بررسی نمودن درست بودن یک عبارت که دارای ترکیب های شرطی است از استلزامها استفاده می شود. (خاصیت تقارن یعنی:  $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ )

### قواعد مهم در استلزام

- |                                                           |                             |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------|
| $P, P \rightarrow Q \vdash Q$                             | ۱- قاعده استنتاج یا استثناء |
| $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$ | ۲- قاعده تعدی               |
| $P \vee Q \vdash Q, P \vdash P \vee Q$                    | ۳- قاعده فصلی               |
| $Q \vdash P \vee Q, P, Q \vdash P \wedge Q$               | ۴- قاعده عطفی               |
| $P \wedge Q \vdash P \mid Q$                              | ۵- قاعده تخصیص              |
| $P \rightarrow Q, \sim Q \vdash \sim P$                   | ۶- قاعده معکوس (عکس)        |

\* قاعده ۶ به این مفهوم است که اگر P به نتیجه F منجر شود، آنگاه خود P، نادرست است.

\* استدلال غلط، استدلالی است در برخی حالات که همه فرض های آن صحیح است، تالی غلط باشد.

مثال) اگر علی در امتحان گسسته نمره الف بگیرد، پدرش برای او یک هدیه می گیرد. پدر علی هدیه را گرفته است؛ آیا می توان نتیجه گرفت نمره ی علی الف شده باشد؟

پاسخ: P: علی در درس ساختمان گسسته نمره ی الف بگیرد. Q: پدر علی هدیه را خریده است.

آیا می توان نتیجه گرفت که علی نمره الف گرفته؟  $(P \rightarrow Q) \wedge Q$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge Q$	$((P \rightarrow Q) \wedge Q) \rightarrow P$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

مثال ۱) با استفاده از روش مستقیم (قواعد استنتاج) ثابت کنید عبارت زیر یک عبارت همیشه راست است!

$$[(P \rightarrow Q) \wedge (\sim R \rightarrow \sim Q) \wedge \sim R] \rightarrow \sim P$$

شماره	گزاره	قانون مورد استفاده
1	$P \rightarrow Q$	فرض ۱
2	$\sim Q \rightarrow \sim P$	هم ارزی ۱
3	$\sim R \rightarrow \sim Q$	فرض ۲
4	$\sim R \rightarrow \sim P$	از شماره ۲ و ۳ و قانون تعدی
5	$\sim R$	فرض ۳
6	$\sim P$	از شماره ۴ و ۵ و قاعده استنتاج

\* دقت شود که هر چیزی در ستون وسط جدول فوق ظاهر می شود حتماً درست (Taut) است که ظاهر گردیده است و ترکیب عطفی آنها همواره T است!

مثال ۲) نشان دهید که  $R \wedge (P \vee Q)$  نتیجهی معتبری از فرضهای زیر است؛

$$P \vee Q, \quad Q \rightarrow R, \quad P \rightarrow S, \quad \sim S$$

شماره	گزاره	قانون مورد استفاده
1	$P \rightarrow S$	فرض ۱
2	$\sim S$	فرض ۲
3	$\sim P$	از شماره ۱ و ۲ و قاعده عکس
4	$P \vee Q$	فرض ۳
5	$\sim P \rightarrow Q$	هم ارزی ۴
6	$Q$	شماره ۳ و ۵ و قاعده استنتاج
7	$Q \rightarrow R$	فرض ۴
8	$R$	شماره ۶ و ۷ و قاعده استنتاج

## اثبات غیر مستقیم

در این روش از نتیجه به فرض می‌رسیم که درست است یا نه! برای مثال در زیر اگر نقیض Q نتیجه دهد نقیض P را پس حتماً  $P \rightarrow Q$  درست است.

$$P \rightarrow Q \equiv \sim Q \rightarrow \sim P$$

(مثال) ثابت کنید:

$$\text{if } n^2 \text{ فرد} \rightarrow n \text{ فرد}$$

پاسخ:

$$n \text{ زوج باشد} = 2k \rightarrow n^2 (2k^2) = 4k^2 = 2(2k^2) \rightarrow 2m$$

## اثبات به روش برهان خلف

بر پایه‌ی قاعده عکس استوار است. زمانی که بخواهیم به این روش نشان دهیم که عبارت Q به طور منطقی از  $P_n, \dots, P_2, P_1$  نتیجه می‌شود، برهان خلف به این صورت بیان می‌شود که فرض می‌کنیم نقیض Q به عنوان یک فرض اضافی به فرض‌های مسئله افزوده شده و همچنین فرض‌های  $P_n, \dots, P_2, P_1$  True هستند؛ اگر فرض‌های افزایش یافته به یک Contradiction یا تناقض دچار شوند، در این صورت دست کم یکی از فرض‌ها باید True یا False باشد و از آنجا که  $P_n, \dots, P_2, P_1$  True هستند آنگاه  $\sim Q$  False است؛ در نتیجه Q، True است.

$$P \rightarrow Q, \sim Q \vdash \sim P, \quad P_1, P_2, \dots, P_n \rightarrow Q, \quad P_1, P_2, \dots, P_n, \sim Q \rightarrow F$$

$$\sim Q \text{ is False}, \quad Q \text{ is True}$$

(مثال) با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید عبارت زیر درست است؛

$$P \vee Q, \sim Q \vee R \vdash P \vee R$$

پاسخ: ابتدا جمله  $P \vee R$  را نقیض کرده و به فرض‌ها اضافه می‌کنیم که فرمول گزاره‌ای زیر حاصل می‌شود:

$$P \vee Q, \sim Q \vee R, \sim P \wedge \sim R$$

$$R \wedge \sim R = F$$

شماره	گزاره	قانون مورد استفاده
1	$\sim P \wedge \sim R$	فرض ۱
2	$\sim P$	شماره ۱ و قاعده تخصیص
3	$\sim R$	شماره ۱ و قاعده تخصیص
4	$P \vee Q$	فرض ۲
5	$\sim P \rightarrow Q$	هم ارزی ۴
6	$Q$	شماره ۲ و ۵ و قاعده استنتاج
7	$\sim Q \vee R$	فرض ۳
8	$Q \rightarrow R$	شماره ۷ و هم‌ارزی
9	$R$	شماره ۶ و ۸ و قاعده استنتاج



## گذاره‌ی معتبر

هر مقداری یا هر  $n$  مقداری که به جای متغیر قرار گیرد و گزاره ارضا گردد، گزاره‌ی معتبر است. به عبارتی دیگر در صورتی که یک  $n$  تایی موجود باشد که بتواند یک گزاره‌نمای  $n$  مکانی را تبدیل به یک گزاره درست نماید، گفته می‌شود که این  $n$  تایی گزاره‌نما را ارضا می‌کند. در صورتی که تمام  $n$  تایی‌های موجود موجب ارضای یک گزاره‌نما شوند، گزاره‌نمای مذکور را معتبر خواهیم گفت؛

## سور

سور جهانی  $\forall$  (هر) یعنی همه مقادیر  $a, b, c$  مسور جهانی نام می‌گیرند. (تمامی مقادیر)

$$\forall a, b, c \rightarrow a+(b+c) = (a+b)+c$$

سور وجودی  $\exists$  (وجود دارد).  $b$  مسور وجودی (حداقل وجود دارد)

مثال آیا رابطه‌های روبرو باهم برابرند؟

$$\forall a \quad \exists b \quad S(a,b)$$

$$\exists b \quad \forall a \quad S(a,b)$$

پاسخ: در عبارت اول به ازای هر  $a$  مقداری برای  $b$  وجود دارد، به طوری که  $S(a,b)$  درست است. در حالی که تغییر دادن جای سورها باعث خواهد شد تا معنی جمله تغییر کند و به این شکل تغییر شود که مقداری برای  $b$  وجود دارد که با انتخاب آن گزاره‌نمای  $S$  صرف نظر از مقداری که برای  $a$  انتخاب می‌شود می‌تواند به یک گزاره درست تبدیل شود.

رابطه‌های زیر را تعبیر کنید:

$$\forall x \quad P(x) \quad , \quad \exists x \quad P(x)$$

## نقیض گزاره‌های سوردار

$$\exists x \quad \sim P(x) \equiv \sim [\forall x \quad P(x)]$$

$$\forall x \quad \sim P(x) \equiv \sim [\exists x \quad P(x)]$$

## استقرای ریاضی

$$P(n_0), \quad k \geq n_0 \quad [P(k) \rightarrow P(k+1)] \vdash \forall n (Pn)$$

۱- مبنای استقرا: به ازای مقدار اولیه برقرار است.  $P(n_0)$  یا  $P(1)$

۲- فرض استقرا: فرض کنید  $P(k)$  درست است.  $K \geq n_0$  یا  $k \geq 1$

۳- مرحله استقرا: از فرض  $P(k)$  صحیح است به  $P(k+1)$  صحیح است برسید.

مثال) نشان دهید مجموع اولین  $n$  عدد فرد برابر با  $n^2$  است؛

$$S(n) = \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

$$S(1) = \sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 1 \quad \text{مبنای استقرا}$$

$$S(k) = \sum_{i=1}^k (2i - 1) = k^2 \quad \text{فرض استقرا}$$

$$S(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) = \sum_{i=1}^k (2i - 1) + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \quad \text{مرحله استقرا}$$

$$(k+1) \rightarrow \sum_{i=1}^k 2(k+1) - 1 \rightarrow 2k + 2 - 1 = 2k + 1$$

مثال) بوسیله‌ی استقرای ریاضی نشان دهید که برای هر عدد صحیح مثبت  $n \geq 1$ ، عدد  $6^{n+2} + 7^{2n+1}$  بر 43 بخش پذیر است؛

$$6^{1+2} + 7^{2 \cdot 1 + 1} = 6^3 + 7^3 = 559 \xrightarrow{\text{تقسیم}} 43 * 13$$

$$k \rightarrow 6^{k+2} + 7^{2k+1} = 43m$$

$$\begin{aligned} k+1 \rightarrow 6^{k+3} + 7^{2k+3} &= 6(6^{k+2}) + 7^{2k+1}(7^2) = 6(6^{k+2} + 7^{2k+1}) + 43 * 7^{2k+1} \\ &= 6 * 43m + 43 * 7^{2k+1} = 43(n) \end{aligned}$$

$$7^2 \rightarrow 43 + 6$$

## نظریه‌ی مجموعه‌ها (روابط)

رابطه‌ی  $R$  بین دو مجموعه‌ی غیر تهی  $A, B$ ، زیر مجموعه‌ای از حاصلضرب دکارتی  $A \times B$  است؛ اگر  $R \subseteq A \times B$  و  $x, y \in R$  باشند می‌گوییم  $x R y$  یا  $x \xrightarrow{R} y$ ، از طریق رابطه‌ی  $R$  به  $y$  مرتبط است.  $(R \rightarrow x \in A, y \in B)$ . و در صورتی که  $x, y$  با هم مرتبط نباشند به شکل  $x \not R y$  یا  $x \not\xrightarrow{R} y$  نشان می‌دهیم.

اگر رابطه‌ی  $R$  فقط در یک مجموعه باشد مانند  $A$  می‌گوییم،  $R$  رابطه‌ای در  $A$  است.

## ماتریس روابط

اگر مجموعه‌ی  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  و  $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_m\}$  دو مجموعه‌ی متناهی به ترتیب با  $n$  عضو و  $m$  عضو باشند و  $R$  یک رابطه از  $A$  به  $B$  باشد می‌توان آنرا بصورت یک ماتریس  $n \times m$  مانند  $M_R = [R_{ij}]$  نشان داد، که در آن هر گاه  $(a_i, b_j) \in R$  باشد، مقدار  $1$  و در غیر اینصورت مقدار صفر لحاظ می‌شود. به ماتریسی که فقط مقادیر صفر و یک دارد ماتریس بولی گویند.

(مثال)  $A = \{a, b, c\}$  و  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  ؛  $R = \{(a, 2), (b, 1), (b, 3), (b, 4), (c, 4)\}$

	1	2	3	4
a	0	1	0	0
b	1	0	1	1
c	0	0	0	1

**تعریف:** اگر  $R$  یک رابطه از  $A$  به  $B$  باشد آنگاه مجموعه‌ی نسبی  $x$  نسبت به  $R$  که با  $R(x)$  نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد؛

$$R(x) = \{y \mid y \in B, x R y\}$$

به طریق مشابه اگر  $A_1$  زیر مجموعه‌ی  $A$  باشد در اینصورت  $R(A_1)$  مجموعه‌ی نسبی  $A_1$  نسبت به  $R$  به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\text{if } A_1 \subseteq A \quad R(A_1) = \{y \mid y \in B, x R y \quad A_1 \text{ به } x \text{ متعلق به}\}$$

\* دقت شود  $x$  در  $R(x)$  یک عضو است و  $A_1$  در  $R(A_1)$  یک مجموعه است!

مثال) اگر  $A=B=\{a,b,c,d\}$  و رابطه‌ی  $R=\{(a,a), (a,b), (b,c), (c,a), (d,c), (c,b)\}$  آنگاه؛

$$R(A)=\{a,b\}$$

نکته:  $(a,b) \neq (b,a)$

و اگر  $A_1$  که زیر مجموعه‌ای از  $A$  است  $(A_1 \subseteq A)$  برابر با  $A_1=\{c,d\}$  باشد، خواهیم داشت؛

$$R(A_1)=\{a,b,c\}$$

**قضیه:** اگر  $R$  رابطه‌ای از  $A$  به  $B$  باشد و  $A_1$  و  $A_2$  زیر مجموعه‌ای از  $A$  باشند در این صورت روابط زیر برقرار است؛

$$\text{الف) اگر } A_1 \subseteq A_2 \text{ آنگاه: } R(A_1) \subseteq R(A_2)$$

$$\text{ب) } R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) \cup R(A_2)$$

$$\text{ج) } R(A_1 \cap A_2) \subseteq R(A_1) \cap R(A_2)$$

تمرین) با مثال نشان دهید که  $R(A_1 \cap A_2) \subseteq R(A_1) \cap R(A_2)$  صحیح است و نمی‌تواند مساوی باشد:

$A_1$  و  $A_2$  زیر مجموعه  $A$

$$A=\{a,b,c,d\}$$

$$A_1=\{a,b\}$$

$$A_2=\{b,c\}$$

$$R=\{(a,a)(a,b)(b,c)(c,a)(d,c)(c,b)\}$$

$$F_1=A_1 \cap A_2 \rightarrow \{b\}$$

$$R(F_1)=\{c\}$$

$$R(A_1) \rightarrow \{a,b,c\} \quad R(A_2) \rightarrow \{a,b,c\}$$

$$\{a,b,c\} \cap \{a,b,c\} = \{a,b,c\}$$

$$\{c\} \subseteq \{a,b,c\} \quad \text{و} \quad \{c\} \neq \{a,b,c\}$$

تعداد روابط از A به B برابر است با تعداد زیر مجموعه‌های  $A*B$  ،  $2^{|A*B|}$

از آنجا که هر رابطه‌ای به صورت مجموعه تعریف می‌شود، می‌توان اعمال مجموعه‌ها را در روابط اعمال کرد.

$$x (R \cup S) y \rightarrow x R y \vee x S y \quad \text{اجتماع}$$

$$x (R \cap S) y \rightarrow x R y \wedge x S y \rightarrow (x,y) \in R \wedge (x,y) \in S \quad \text{اشتراک}$$

$$x (R - S) y \rightarrow x R y , x \notin S y \rightarrow (x,y) \in R \wedge (x,y) \notin S \quad \text{تفاضل}$$

$$x \bar{R} y \quad \text{یا} \quad x \sim R y \rightarrow x \notin R y \rightarrow (x,y) \notin R , (x,y) \in \bar{R} \quad \text{متمم}$$

$$x R^{-1} y \rightarrow y R x \quad \text{وارون}$$

مثال) در صورتی که مجموعه‌ی A و روابط R, S به صورت زیر باشند، کلیه اعمال روی مجموعه‌ها را بر روی رابطه‌ی R, S اعمال کنید؛

$$A = \{1,2,3\}$$

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,1)\}$$

$$S = \{(1,2), (2,1), (1,1), (3,3)\}$$

$$R \cup S: \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,1), (2,1), (3,3)\}$$

$$R \cap S: \{(1,1), (1,2)\}$$

$$\bar{R}: \{(2,1), (2,3), (3,2), (3,3)\}$$

$$A*A = 3*3 \rightarrow 9-5=4$$

$$R^{-1}: \{(1,1), (2,1), (3,1), (2,2), (1,3)\}$$

## خواص رابطه‌ها

۱- بازتابی (Reflexive):

$$\forall x \in A : (x,x) \in R \quad \text{or} \quad x R x$$

(مثال)

$A=\{1,2,3\}$        $R_1=\{(1,1), (2,2), (3,3), \dots\}$       دقت شود هر سه عضو باید در مجموعه باشند تا بازتابی صورت گیرد

۲- ضد بازتابی (Irreflexive):

$$\forall x \in A : (x,x) \notin R \quad \text{or} \quad x \not R x \quad \equiv \quad \nexists x \in A : x R x$$

(مثال)

$A=\{1,2,3\}$        $R_2=\{(1,2), (3,1), (2,3)\}$       \* رابطه روبرو نه بازتابی و نه ضد بازتابی است!  $\{(1,1), (3,3), (1,2), (3,1)\}$

۳- تقارنی (Symmetric):

$$\forall x,y \in A : x R y \rightarrow y R x$$

(مثال)

$A=\{1,2,3\}$        $R_3=\{(1,1), (2,1), (1,2)\}$

۴- پادتقارنی (ضد تقارن، AntiSymmetric):

$$\forall x,y \in A : x R y, y R x \rightarrow x=y$$

یعنی اگر هر دو وجود داشتند باهم برابر باشند

(مثال)

$A=\{1,2,3\}$        $R_4=\{(1,1), (3,1), (2,3)\}$

تعریف پادتقارن در مثال فوق یعنی اینکه اگر (1,2) باشد، (2,1) وجود نداشته باشد!

۵- تعدی (ترایابی، Transitive):

$$\forall x,y,z \in A : x R y, y R z \rightarrow x R z$$

(مثال)

$A=\{1,2,3\}$        $R_5=\{(1,2), (2,1), (1,1), (2,2)\}$

\* در مثال فوق حتماً باید (1,1) و (2,2) باهم وجود داشته باشند چرا که دو مورد اول را می توان از چپ به راست و از راست به چپ خواند!

مثال) برای مجموعه‌ی روبرو روابط زیر را بنویسید؛  $A=\{1,2,3\}$

الف) فقط دارای رابطه بازتابی باشد؛

$$\{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (3,2)\}$$

ب) فقط دارای خاصیت تقارنی باشد؛

$$\{(1,2), (2,1), (3,3)\}$$

ج) دارای خاصیت متقارن و متعدی باشد؛

$$\{(1,2), (2,1), (1,1), (2,2)\}$$

د) دارای خاصیت پادتقارن و متعدی باشد؛

$$\{(3,1), (3,3)\}$$

ه) دارای خاصیت متقارن، پادمتقارن و بازتاب باشد ولی متعدی نباشد؛

چنین مجموعه‌ای وجود ندارد، چرا که هر رابطه‌ای که متقارن و پادمتقارن و بازتاب باشد، حتماً متعدی است!

$$\Delta = \{(1,1), (2,2), (3,3)\} \leftarrow \text{رابطه تساوی}$$

\* رابطه‌ای بازتابی است که به ازای هر عضو مجموعه‌ی مورد نظر تمامی زوج‌های مرتب  $x$  و  $x$  را شامل شود.

\* رابطه‌ای ضدبازتابی است که هیچ زوج مرتب  $x, x$  در رابطه وجود نداشته باشد.

\* رابطه‌ای دارای خاصیت تقارن است که اگر  $x, y$  در رابطه وجود دارد  $y, x$  نیز در رابطه وجود داشته باشد.

\* خاصیت پادتقارن، رابطه‌ای که در صورت وجود زوج مرتب  $x, y$ ، زوج مرتب  $y, x$  در آن وجود نداشته باشد.

\* رابطه‌ای که در صورت وجود زوج مرتب  $x, y$  و زوج مرتب  $y, z$ ، زوج مرتب  $x, z$  وجود داشته باشد.

نکته ۱: رابطه‌ای دارای خاصیت بازتابی، تقارنی و پادتقارنی باشد، قطعاً دارای خاصیت متعدی خواهد بود.

نکته ۲: رابطه‌ای بازتاب است اگر و اگر  $\Delta$  (تساوی) زیر مجموعه  $R$  باشد.  $\Delta \subseteq R$

نکته ۳: یک رابطه متقارن است در صورتی که  $R=R^{-1}$

نکته ۴: یک رابطه دارای خاصیت تعدی است اگر و فقط اگر  $R^2 \subseteq R$

نکته ۵: یک رابطه دارای خاصیت پادتقارن است اگر و فقط اگر  $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$

## ماتریس روابط و خواص رابطه‌ها

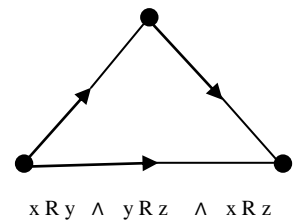
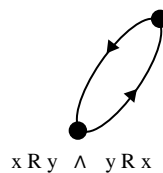
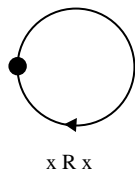
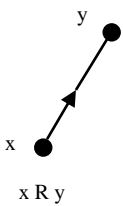
- ۱- بازتابی: در صورتی که عناصر قطر اصلی همگی یک باشند (در ماتریس) رابطه دارای خاصیت بازتابی است.
- ۲- ضدبازتابی: در صورتی که عناصر قطر اصلی همگی صفر باشند، رابطه دارای خاصیت ضدبازتابی است.
- ۳- تقارنی: در صورتی که  $M=M^t$ ، (ماتریس برابر با ترانهاد آن باشد)، رابطه دارای خاصیت تقارنی است.
- ۴- ضدتقارنی: در صورتی که به ازای وجود زوج مرتب  $x, y$ ، زوج مرتب  $y, x$  وجود نداشته باشد، رابطه دارای خاصیت ضدتقارنی است.
- ۵- تعدی: در صورتی که  $M_{R^2} \leq M_R$  باشد (یعنی ضرب ماتریس در خودش کوچکتر از خود ماتریس باشد) رابطه دارای خاصیت تعدی است.

یادآوری: برای ضرب دو ماتریس خانه اول در ستون اول ضرب شده و مقادیر باهم جمع می‌گردد و در خانه اول نتیجه قرار می‌گیرد و به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کند!

\* در صورتی که رابطه‌ای دارای سه خاصیت بازتابی، تقارنی و تعدی باشد، این رابطه را یک رابطه‌ی هم‌ارزی گوئیم.

$$A=\{1,2,3\}$$

$$R=\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$





## رابطه‌ی هم‌نهشتی

$$a \equiv b \pmod{n} \rightarrow \left\lfloor \frac{n}{(a-b)} \right\rfloor$$

جمله فوق  $a$  هم‌نهشت است با  $b$  به پیمانه‌ی  $n$  یا  $a-b$  بخش پذیر است بر  $n$  را بیان می‌کند!

آیا رابطه‌ی فوق هم ارزی است یا خیر؟

برای اینکار بازتابی، تقارن و تعدی را بررسی می‌کنیم؛

$$a \equiv b \pmod{2} \rightarrow \left\lfloor \frac{2}{(a-b)} \right\rfloor \rightarrow (a-b) = 2k$$

بررسی بازتاب:

$$a \equiv a \pmod{2} \quad a - a = 0 = 2 \cdot 0$$

بررسی تقارن:

$$a \equiv b \pmod{2} \quad (a-b)=2k \rightarrow *(-1) \rightarrow b-a = 2(-k) \rightarrow b \equiv a \pmod{2}$$

بررسی تعدی:

$$a \equiv b \pmod{2}, \quad b \equiv c \pmod{2} \rightarrow (a-b)=2k, \quad b-c=2k' \quad \text{جگری+نارنجی}$$

$$\rightarrow a-c=2(k+k') \quad a \equiv c \pmod{2}$$

مثال) ثابت کنید روابط زیر هم‌ارزی هستند؛

$$A) (a,b) R (c,d) \leftrightarrow a+d = b+c$$

برای اینکار سه حالت بازتابی، تقارن و تعدی را بررسی می‌کنیم، اگر سه حالت خروجی درست ارائه کردند رابطه هم‌ارزی است.

$$\text{بازتابی} = (a,b) R (a,b) \rightarrow a+b = b+a \quad \checkmark$$

$$\text{تقارنی} = (a,b) R (c,d) \rightarrow (c,d) R (a,b) \rightarrow a+d = b+c, \quad c+b = d+a \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \text{تعدی} = (a,b) R (c,d) &\rightarrow a+d = b+c \rightarrow a+\underline{d}+\underline{c}+f = b+\underline{c}+\underline{d}+e \rightarrow a+f = b+e \rightarrow (a,b) R (e,f) \quad \checkmark \\ (c,d) R (e,f) &\rightarrow c+f = d+e \end{aligned}$$

$$B) (a,b) S (c,d) \leftrightarrow a+b = c+d$$

$$\text{بازتابی} = (a,b) S (a,b) \rightarrow a+b = a+b \quad \checkmark$$

$$\text{تقارنی} = (a,b) S (c,d) \rightarrow (c,d) S (a,b) \rightarrow a+b = c+d, \quad c+d = a+b \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \text{تعدی} = (a,b) S (c,d) &\rightarrow a+b = c+d \rightarrow a+\underline{b} = e+f \rightarrow (a,b) S (e,f) \quad \checkmark \\ (c,d) S (e,f) &\rightarrow c+d = e+f \end{aligned}$$

## افراز

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = A \quad -1$$

$$\forall i,j \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad -2$$

$$\nexists A_i | A_i = \emptyset \quad -3$$

\*  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  را یک افراز (Partition) از مجموعه‌ی  $A$  گویند.

مثال) برای مجموعه A همه افرازها را بنویسید؛

$$A = \{1, 2, 3\}$$

- 1)  $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$  بزرگترین افراز  
 2)  $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$   
 3)  $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$   
 4)  $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$   
 5)  $\{\{1, 2, 3\}\}$  کوچکترین افراز

\* به هر زیر مجموعه یک کلاس یا بلوک گویند.

\* برای هر افراز می توان رابطه‌ای نوشت که هم ارز می‌باشند مانند R، که این رابطه به صورت زیر تعریف می‌شود:  
 $a R b$  اگر و تنها اگر a, b عضو یک کلاس باشند.

مثال رابطه‌ای زیر برای افرازهای ۲ و ۵

$$R_2 = \{(1,2) (2,1) (1,1) (2,2) (3,3)\}, \quad R_5 = \{(1,2) (1,1) (1,3) (3,2) (2,1) (2,3) (3,3) (3,1) (3,2)\}$$

\* تعداد روابط هم‌ارزی در مجموعه ای مانند A برابر است با تعداد افرازهای آن مجموعه

اگر A و B دو زیر مجموعه‌ی غیرتهی از مجموعه‌ای مانند X باشند که اشتراک آنها غیرتهی باشد، آنگاه در صورتی که مجموعه‌های  $I_0$  تا  $I_3$  را به صورت زیر تعریف کنیم، این ۴ مجموعه یک افراز برای مجموعه‌ی X خواهد بود.

$$I_0 = A \cap B \quad I_1 = \bar{A} \cap B \quad I_2 = \bar{B} \cap A \quad I_3 = \bar{A} \cap \bar{B}$$

افراز  $\{I_0, I_1, I_2, I_3\}$

\* به هر کدام از  $I_0$  تا  $I_3$  اشتراک متمم‌ها یا مینترها گویند.

## کلاس هم‌ارزی

$$R = \{(x, a) \in R \mid [a]_R = [x]_R\}$$

مثال) رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید؛  $a=1$  را بدست بیاورید

$$R = \{(1,2) (1,1) (1,3) (3,2) (2,1) (2,3) (3,3) (3,1) (3,2)\}$$

$$[1] = ? \rightarrow (x, 1)$$

$$[1] = \{1, 2, 3\}$$

\* به طور کلی هر رابطه هم‌ارزی بر روی یک مجموعه افرازهایی منحصر بفرد از آن مجموعه را بوجود می‌آورد.

اثبات  $Z$  (اعداد صحیح) با هم‌نهشتی ۴

$$a \equiv b^4$$

$$[0] = \{ x \mid x = 4k \} = \{ \dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots \}$$

$$[1] = \{ x \mid x = 4k+1 \} = \{ \dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots \}$$

$$[2] = \{ x \mid x = 4k+2 \} = \{ \dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots \}$$

$$[3] = \{ x \mid x = 4k+3 \} = \{ \dots, -5, -1, 3, 7, \dots \}$$

\* اگر  $R$  رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۴ باشد که بر روی مجموعه‌ی اعداد صحیح تعریف شده، این رابطه یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و  $Z$  را به ۴ کلاس هم‌ارزی افراز می‌کند که این ۴ کلاس 0, 1, 2, 3 هستند.

مثال (۱) کلاس هم‌ارزی برای  $a+d = b+c \iff (a,b) R (c,d)$  را بنویسید؛

$$[(a,b)] = \{ (x,y) \mid (x,y) R (a,b) \}$$
$$x+b = y+a$$

$$\text{if } a=b=0 \rightarrow x=y$$
$$\text{if } a=1, b=2 \rightarrow y=x+1$$

$$* y = x+b-1 \quad (\text{معادله خط (شیب خط } x))$$

\* این کلاس هم‌ارزی صفحه‌ی مختصات را به خطوط موازی با شیب (۱) افراز می‌کند.

مثال (۲) کلاس هم‌ارزی برای  $a+b = c+d \iff (a,b) S (c,d)$  را بنویسید؛

$$[(a,b)] = \{ (x,y) \mid (x,y) S (a,b) \}$$
$$x+y = a+b$$

$$* y = a+b-x \quad (\text{معادله خط (شیب خط } -x))$$

\* این کلاس هم‌ارزی صفحه‌ی مختصات را به خطوط موازی با شیب (-۱) افراز می‌کند.

## بستارها

**بستار بازتاب:** برای رابطه‌ی  $R$  بر روی مجموعه‌ی  $A$ ، کوچکترین مجموعه که شامل رابطه‌ی  $R$  باشد و بازتاب باشد را بستار بازتاب  $R$  گویند؛

$$\begin{aligned} \text{مثال)} \quad & A = \{1, 2, 3, 4\} \quad R = \{(1, 1) (2, 3) (3, 2) (1, 4)\} \\ & \{(1, 1) (2, 3) (3, 2) (1, 4) (2, 2) (3, 3) (4, 4)\} \end{aligned}$$

**بستار متقارن:** برای رابطه‌ی  $R$  بر روی مجموعه‌ی  $A$ ، کوچکترین مجموعه که شامل رابطه‌ی  $R$  باشد و متقارن باشد را بستار متقارن  $R$  گویند؛

$$\begin{aligned} \text{مثال)} \quad & A = \{1, 2, 3, 4\} \quad R = \{(1, 1) (2, 3) (3, 2) (1, 4)\} \\ & \{(1, 1) (2, 3) (3, 2) (1, 4) (4, 1)\} \end{aligned}$$

**بستار متعدی:** برای رابطه‌ی  $R$  بر روی مجموعه‌ی  $A$ ، کوچکترین مجموعه که شامل رابطه‌ی  $R$  باشد و متعدی باشد را بستار متعدی  $R$  گویند؛

$$\begin{aligned} \text{مثال)} \quad & A = \{1, 2, 3, 4\} \quad R = \{(1, 1) (2, 3) (3, 2) (1, 4)\} \\ & \{(1, 1) (2, 3) (3, 2) (1, 4) (2, 2)\} \end{aligned}$$

## روابط و گرافها

هر رابطه‌ای مانند  $S$  که بر روی مجموعه‌ای مانند  $A$  تعریف شود را می‌توان با استفاده از یک گراف نمایش داد، می‌توان خواص رابطه‌ها را از روی گراف یک رابطه تشخیص داد.

الف) خاصیت بازتابی: گراف رابطه‌ی بازتابی دارای یک حلقه یا سیکل برای هر یک از رؤس می‌باشد.

ب) خاصیت ضدبازتابی: گرافی ضدبازتابی است که هیچ رأسی دارای حلقه یا سیکل نباشد.

ج) تقارنی: اگر از  $A$  به  $B$  یال وجود دارد، از  $B$  به  $A$  نیز وجود داشته باشد.

د) پادتقارنی: در گراف نباید هیچ یالی به صورت دو طرفه باشد.

ه) تعدی: در صورتی که بین دو رأس مثل  $a$  و  $c$  مسیری به طول دو وجود دارد، باید بین آنها مسیری به طول یک وجود داشته باشد.

مثال) بر روی مجموعه ی  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  است، مشخص کنید؛

الف) چند رابطه وجود دارد؟

\* به ازای  $n$  عضو،  $n^2$  زوج مرتب دارد.  $(4^2)$

\* و در هر رابطه آن زوج می تواند وجود داشته یا وجود نداشته باشد که در این صورت دو حالت بوجود می آید،

پس؛  $2^{4^2}$  رابطه وجود دارد!

ب) چند رابطه ی بازتابی وجود دارد؟

\* رابطه بازتابی بر اساس ماتریس ها یعنی قطر اصلی ماتریس

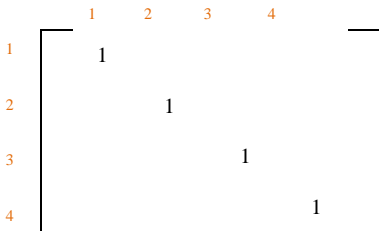
و از آنجا که قطر اصلی اکنون ۴ عضو دارد و سایر خانه ها دو طرف نیز در نظر گرفته می شود

پس؛  $4 \times 4 = 16$  (کل خانه ها) و ۴ عضو قطر اصلی که ثابت است از آن کم می شود؛

$16 - 4 = 12$  و هر خانه دو حالت خواهد داشت؛

رابطه بازتابی:  $2^{12}$  خواهد بود.

شکل کلی فرمول برای بدست آوردن رابطه بازگشتی:  $2^{n^2-n}$



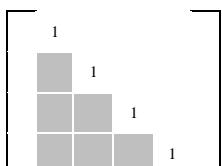
ج) چند رابطه ی متقارن وجود دارد؟

شکل کلی فرمول برای بدست آوردن رابطه ی متقارن:  $2^n \times 2^{\frac{n^2-n}{2}}$

\* ابتدا قطر اصلی را جدا می نویسیم ( $2^4$ ) سپس یک نیمه از ماتریس را محاسبه می کنیم چرا که نیمه ی دوم بر اساس نیمه ی اول خواهد بود که

۴ خانه ثابت قطر اصلی را از کل خانه ها کم و تقسیم بر دو می کنیم:  $2^{\frac{16-4}{2}}$

پس در نهایت:  $2^4 * 2^6 = 2^{10}$



د) چند رابطه ی پادمتقارن وجود دارد؟

شکل کلی فرمول برای بدست آوردن رابطه ی پادمتقارن:  $2^n \times 3^{\frac{n^2-n}{2}}$

\* ابتدا قطر اصلی را جدا کرده ( $2^4$ )، در حالت پاد متقارن یا یک خانه از یک نیمه از ماتریس صفر و نیمه ی دیگر یک و یا بالعکس و یا دو طرف

صفر خواهد بود پس سه حالت بوجود می آید که عدد پایه ۳ خواهد شد.

در نتیجه:  $2^4 * 3^6$



ه) چند رابطه وجود دارد که هم دارای خاصیت بازتابی و هم متقارن وجود دارد؟

شکل کلی فرمول:  $2^{\frac{n^2-n}{2}}$

پس در نتیجه:  $2^6$

\*  $2^4$  ( قطر اصلی) حذف می شود چرا که در این حالت حتماً فقط (1) است و حالت دیگری ندارد!

و) چند رابطه وجود دارد که هم دارای خاصیت بازتابی و پادمتقارن وجود دارد؟

شکل کلی فرمول:  $3^{\frac{n^2-n}{2}}$

پس در نتیجه:  $3^6$

\*  $2^4$  ( قطر اصلی) حذف می شود چرا که در این حالت حتماً فقط (1) است و حالت دیگری ندارد!

ز) چند رابطه وجود دارد که هم دارای خاصیت متقارن و هم پادمتقارن باشد؟

\* خاصیت متقارن و پادمتقارن یعنی به غیر از قطر اصلی سایر خانه های ماتریس صفر باشند و تک حالت هستند!

پس در نهایت:  $2^4$