مقدمه

- ارتفاع زیاد باشد محیط ناپیوسته است. ستاره ها ناپیوسته است اما در آن ها مکانیک کوانتوم وجود دارد.
- ردیف های یک کلاس ناپیوسته است اما در صورتی که با سرعت بسیار زیاد حرکت کنند امکان دارد به پیوسته تبدیل شود.
- فاصله بین اتم‌ها (الکترون و پروتون) بسیار کم است پس مکانیک سیالات نیست و مکانیک کوانتوم
- پس در محیط های کم و زیاد مکانیک کوانتوم داریم.

حال می خواهیم وجود اجسام و حرکت آن ها را در یک لوله بررسی کنیم و یا وارد کردن نیرو چه تأثیری دارد بر سیال ما

- مکانیک سیالات در درس رئولوژی ... کاربرد دارد.

$f = m.a$ نیرو

$f.t = ma.t \longrightarrow f.t = m.v$ ضربه/تکانه

ما دو سیستم محاسباتی SI و مهندسی (انگلیسی) داریم:

کمیت های اصلی	SI MKS	CGS	English	
طول	m	cm	ft	in
جرم	Kg	g	lbm	
زمان	s	s	s	s
دما	c°		f°	f°

$\frac{1}{12} ft = in$ $1m = 100 cm$ $1kg = 1000 gr$ $1K = 1C + 273$

$1 ft = 12 in$ $1R = 1f^\circ + 460$ $1.8T(c) + 32 = T(f^\circ)$

$1 in = 2.54 cm \longrightarrow 1 ft = ? \longrightarrow 30.5$

کمیت های فرعی	MKS
مساحت	m^2
حجم	m^3
سرعت	m/s
دانسیته	kg/m^3
نیرو	$kg\,m/s^2$

$g = 10 \longrightarrow 1kg\,m/s^2 = 10 N$

فشار

برای بررسی تغییرشکل ما به سراغ نیرو نمی رویم بلکه از نیرو، فشار را محاسبه می کنیم.
تبدیل نیرو به کمیت ای که سطح اعمال نیرو را هم در نظر بگیرد.

stress   تنش

بعضی کمیت ها اسکالر (فقط مقدار دارد) و برخی دیگر برداری است و جهت نیز دارد علاوه بر مقدار

دانسیته، جرم، دما ⟵ اسکالر

نیرو، سرعت ⟵ برداری

در فضا	در صفحه
	$f = 80\,N \angle 30^\circ$ ⟵ در صفحه
$f = 5i + 7j + 3k$	$f = 80\cos 30\, i + 80 \sin 30\, j$

نیرو یک مقدار دارد و سه جهت هر کمیت برداری سه تا کمیت (سه متغیر) اصلی دارد.
نیرو یک متغیر وابسته و سه متغیر اصلی دارد.
مساحت یک کمیت برداری است.
صفحه یک کمیت برداری است (چراکه واحد آن m^2 است و ما با یک نیروی دیگر این را نگه داشته ایم
جهت صفحه را با بردار نرمال آن نمایش می دهیم.

$\boxed{\text{صفحه}}$

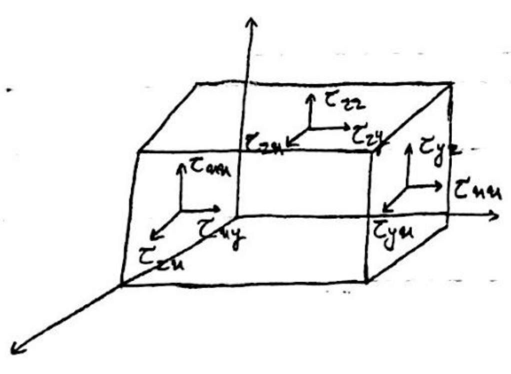
بردار نرمال (به صفحه وارد می شود)

صفحه $\sigma = 14\hat{i} + 7\hat{j} - 5\hat{k}$

مقدار صفحه = مساحت $S = \sqrt{14^2 + 7^2 + (-5)^2}$

ما به صفحه سه نوع نیرو می توانیم وارد کنیم (عمودی، برشی، (موازی))

عملکرد F_x:
- روی صفحه x، تنش عمودی τ_{xx}
- روی صفحه y اعمال شود به ما تنش برشی τ_{yx} می دهد
- روی صفحه z اعمال شود، تنش برشی τ_{zx} می دهد.



$\left.\begin{matrix}\tau_{zz}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{matrix}\right\} \leftarrow f_z$ $\left.\begin{matrix}\tau_{xy}\\ \tau_{yy}\\ \tau_{zy}\end{matrix}\right\} \leftarrow f_y$

$\swarrow \tau_{zz}$

$$\tau = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{vmatrix}$$

Normal stress تنش های عمودی ، چراکه نیرو عمود بر صفحه است.

τ_{xz} shear stress (تنش های برشی)

$$\tau_{ij} = \frac{F_i}{A_j}$$

واحدهای تنش:

$$pa = N/m^2 \quad , \quad psi = \frac{lbf}{in^2}$$

فشارجو (فشار هیدرواستاتیک) از جنس تنش عمودی است.

$$p = 100 \ kpa \quad , \quad p = \frac{f}{A} \longrightarrow f = pA$$

مثال: نیروی وارد بر کف دست را محاسبه کنید در اثر فشارجو؟

$$A = 10 \ cm \times 20 \ cm = 200 \ cm^2$$

$$A = 200 \ cm^2 \times \left(\frac{1m}{100 cm}\right)^2 = 0/02 \ m^2$$

$$p = 100 \ kpa \times \left(\frac{1000 pa}{1 kpa}\right)\left(\frac{1 N/m^2}{1 pa}\right) = 100,000 \ N/m^2$$

$$f = pA = 100000 \ N/m^2 \times 0/02 \ m^2 = 2000 \ N$$

تنش در حالت کلی:

$$\text{تنش} \ \sigma_{ij} = \tau_{in} + \delta_{in} p$$

$$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \sigma = \begin{bmatrix} \tau_{11} + P_0 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} + p & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} + p \end{bmatrix}$$

$$\delta_{11} = 1 \quad \delta_{22} = 1 \quad \delta_{33} = 1 \quad \delta_{12} = 0 \quad \delta_{13} = 0 \quad \delta_{21} = 0 \quad \delta_{23} = 0$$

ما دو نوع فشار مطلق و فشار نسبی داریم.

Absolote pressure $= P_{abs}$ فشار مطلق

gage pressure $= P_{gage}$ فشار نسبی

$$P_{abs} = P_{gage} + P_{atm}$$

خواص سیالات

از بعد مکانیکی : سنگین یا سبک بودن (چگالی و دانسیته)

دانسیته ی هر ماده نسبت به دانسیته آب را چگالی می گویند.

$\rho = \frac{m}{V}$ (kg/m^3) دانسیته

$S = \frac{\rho_{\text{ماده}}}{\rho_{\text{آب}}}$ چگالی

تفاوت ویسکوزیته، غلظت و چسبندگی:

غلظت را معمولاً در مایعات و محلول ها ، به کار می بریم.

هرچه غلظت $\uparrow$ ، ویسکوزیته $\uparrow$

در یک ماده مانند اتانول، فقط ویسکوزیته دارد و غلظت ندارد.

گرانروی Viscosity:

مقاومت در برابر حرکت را ویسکوزیته می گویند. $1cP = 1mPa.s$ (سانتی پوآز) $\mu\ (Pa.s)$

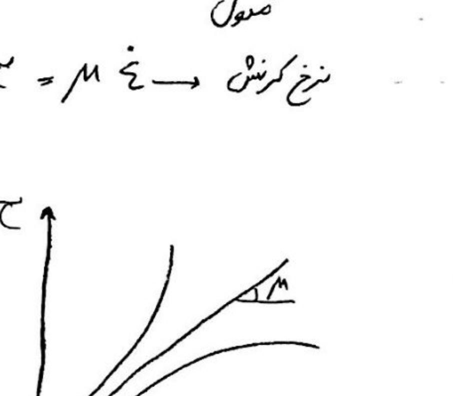
$\tau = E\,\varepsilon \rightarrow$ (کرنش) تغییر شکل ، E مدول ، τ تنش (جامد)

$\tau = \mu\,\dot{\varepsilon} \rightarrow$ نرخ کرنش $\qquad \dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$

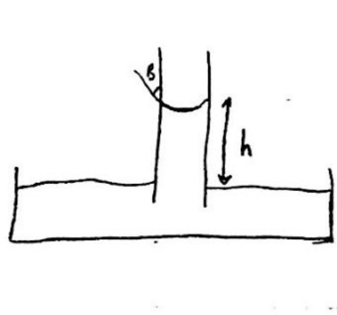
نمودار تنش برحسب نرخ کرنش:

(پلیمرها اکثراً کمتر از سیال نیوتونی هستند)

با افزایش نرخ کرنش ویسکوزیته آن ها کمتر می شود.



کشش سطحی:



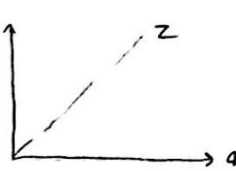
$$h = \frac{4\,\overset{\text{کشش سطحی}}{\sigma}\,\underset{}{\cos\beta}}{\underset{\text{دانسیته}}{\rho}\, g\, \underset{\text{قطر لوله}}{D}}$$

$\cos\beta \rightarrow$ زاویه تماس

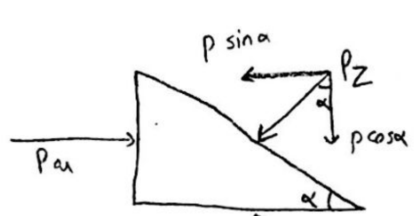
فصل ۲

- فشار در یک نقطه تابع جهت نیست.

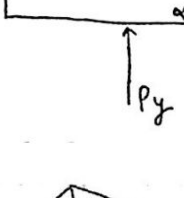
$$\begin{cases}\sum f_x = m\,a_x \\ \sum f_y = m(a_y+g) \\ \sum f_z = m\cdot a_z\end{cases}$$



$$m=\rho V=\rho\,\overbrace{\frac{\Delta y\,\Delta x}{2}}^{\text{مساحت قاعده}}\;\overbrace{\Delta z}^{\text{ارتفاع}}$$

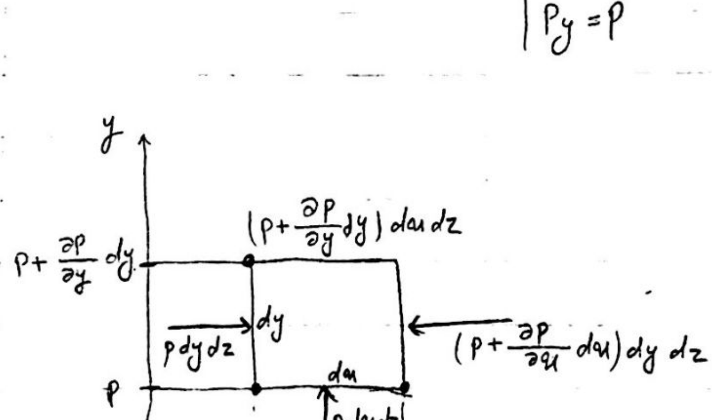


$$\begin{cases}P_x * \Delta y * \Delta z - p\,\underbrace{\sin\alpha\,\Delta S}_{\Delta y}\,\Delta z = m\cdot a_x \\ \qquad\qquad m = \frac{\rho}{2}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \\ P_y\,\Delta x\,\Delta z - P\,\underbrace{\cos\alpha\,\Delta S}_{\Delta x}\,\Delta z = m\cdot(a_y+g)\end{cases}$$



$$\begin{cases}P_x - P = \frac{\rho}{2}\,\Delta x\,a_x \\ P_y - P = \frac{\rho}{2}\,\Delta y\,(a_y+g)\end{cases}\xrightarrow[\Delta x\to 0\;\;\Delta y\to 0]{\text{اگر } \Delta x \text{ , } \Delta y \text{ به صفر میل کنند}}$$

$$\begin{cases}P_x = P \\ P_y = P\end{cases}$$



$$\begin{cases}x: p\,\underline{dy}\,\underline{dz} - (p+\frac{\partial p}{\partial x}dx)\,\underline{dy}\,\underline{dz} = \rho\,dx\,\underline{dy}\,\underline{dz}\,a_x \\ y: p\,\underline{dx}\,\underline{dz} - (p+\frac{\partial p}{\partial y}dy)\,\underline{dx}\,\underline{dz} = \rho\,\underline{dx}\,dy\,\underline{dz}\,(a_y+g)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cancel{p}-\cancel{p}-\frac{\partial p}{\partial x}dx = \rho\,dx\,a_x \\ \cancel{p}-\cancel{p}-\frac{\partial p}{\partial y}dy = \rho\,dy\,(a_y+g)\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}-\frac{\partial p}{\partial x}\underline{dx} = \rho\,\underline{dx}\,a_x \\ -\frac{\partial p}{\partial y}\underline{dy} = \rho\,\underline{dy}\,(a_y+g)\end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\rho\, a_x & \ast \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial y} = -\rho(a_y+g) \;,\; \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho\, a_z & \ast \end{cases}$$

برای حساب کردن اختلاف فشار بین دو نقطه از رابطه ی زیر استفاده می کنیم.

$$A(x,y) \qquad dA = \frac{\partial A}{\partial x}\,dx + \frac{\partial A}{\partial y}\,dy$$

با استفاده از ستاره ها: $\ast$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz$$

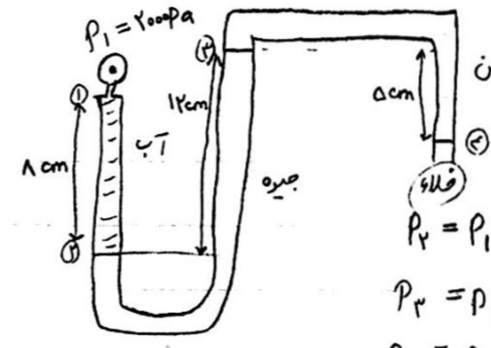
$$\boxed{dp = -\rho\, a_x\, dx - \rho(a_y+g)\,dy - \rho\, a_z\, dz}$$

در حالت خاص که $a_x = a_y = a_z = 0$

$$dp = -\rho g\, dy$$

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_0^h \rho g\, dy \qquad p_2 - p_1 = -\rho g h \longrightarrow p_2 = p_1 - \rho g h$$

مثال: برای فرمول بالا



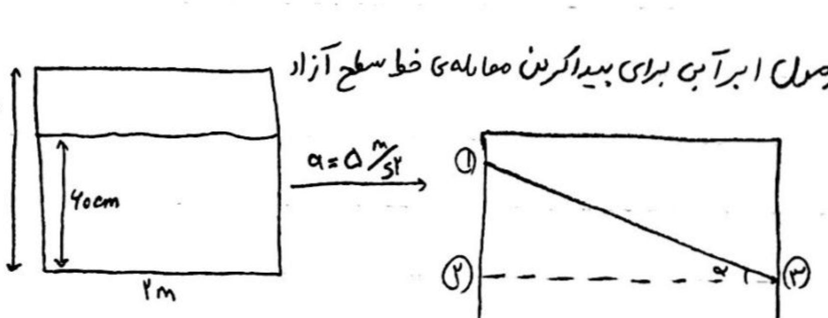
$\rho = ۰/۹\ g/cc$ روغن

$$P_2 = P_1 - \rho_w g h_w = ۲۰۰۰ - ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times (-۰/۰۸) = ۲۸۰۰$$

$$P_3 = P_2 - \rho_{Hg} g h_{Hg} = ۱۲۰۰۰ - ۱۳۶۰۰ \times ۱۰ \times (۰/۱۲) = -۱۳۵۲$$

$$P_4 = P_3 - \rho_{oil} g h_{oil} = -۱۳۵۲۰ - ۹۰۰ \times ۱۰ \times (-۰/۰۵) = -۱۳۰۷۰$$

مثال: مثال برای فرمول ابرآبی برای پیدا کردن معادله ی خط سطح آزاد



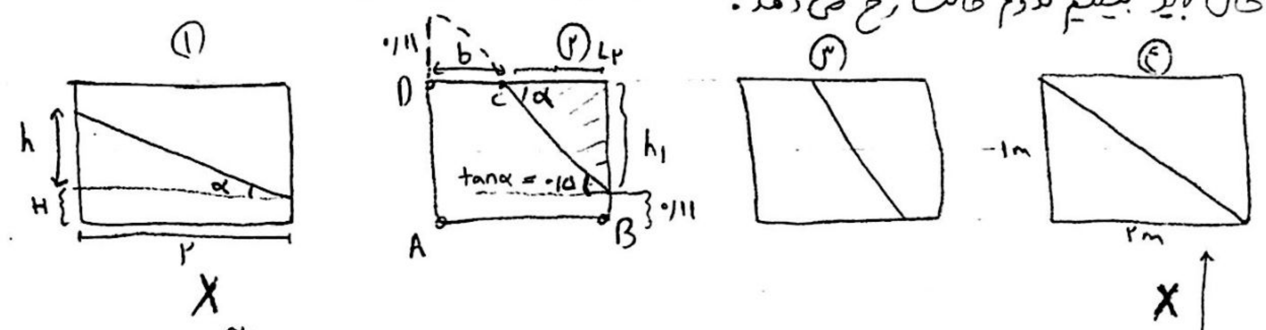
$$
\begin{cases}
(1),(2) & dp = -\rho (a_y + g)\, dy \\
(3),(4) & dp = -\rho\, a_x\, dx
\end{cases}
$$

روی سطح آب فشار نسبی صفر است. $P_1 = P_3 = 0$

$$
\begin{cases}
P_2 - \cancel{P_1}^{0} = -\rho(\cancel{a_y}^{0} + g)(y_2 - y_1) \\
P_2 - \cancel{P_3}^{0} = -\rho\, a_x (x_2 - x_3)
\end{cases}
\Rightarrow \rho g (y_2 - y_1) = \rho\, a_x (x_2 - x_3)
$$

$$
\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_3} = \frac{a_x}{g} \longrightarrow \tan\alpha = \frac{a_x}{a_y + g}
$$

حال باید ببینیم کدوم حالت رخ می‌دهد.



$$\tan\alpha = \frac{a_x}{g} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$h = 2 \times \tan\alpha = 1$ ع ق ق $\leftarrow \frac{h}{L} = \tan\alpha$

$$
\boxed{\begin{gathered} V_{\text{بعد}} = V_{\text{قبل}} \\ 2 \times 0.6 = \frac{2 \times 1}{2} \\ 1.2 \neq 1 \end{gathered}}
$$

شکل (4) نمی‌شود شکل مربع نیست

برای این کار حجم‌ها را کنترل می‌کنیم

شکل (1) هم نمی‌شود چون $h=1$ شد و بعد به اضافه H از یک بیشتر می‌شود.

شکل (2)

روش اول

$$V_{\text{هوا بعد}} = V_{\text{هوا قبل}}$$

$$2 \times 0.4 = h_1 \times L_2$$

$$0.8 = \frac{2 h_1^2}{2} \longrightarrow h_1 = \sqrt{0.8}$$

$$\frac{h_1}{L_2} = \tan\alpha = 0.5 \longrightarrow L_2 = 2 h_1$$

روش دوم

$$P_A = P_D + P_C + \rho g(1)$$

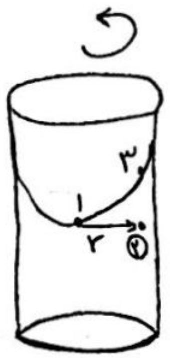
$$P_A = \rho g(1.11) = \rho \times 11.1$$

$$P_D = P_C + \rho a_x \Delta x \qquad P_B = \rho g(0.11)$$

$$P_A = \rho a_x \Delta x + \rho g(1) = \rho(5)(0.22) + \rho g(1)$$

$$P_A = \rho(5 \times 0.22 + 10 \times 1) = \rho \times (11.1)$$

مخزن دوار



$$\begin{cases} p_2 - \cancel{p_1} = -\rho \overset{r\Omega^2}{a_x}\, \overset{r}{dx} \\ p_2 - \cancel{p_3} = -2\rho g \underset{h}{dy} \end{cases}$$

$$r\Omega^2 = r = 2gh \longrightarrow h = \frac{r^2\Omega^2}{2g} \longrightarrow h = \frac{(r_2^2 - r_1^2)\Omega^2}{2g}$$

فصل سوم　　سیال در حرکت

توصیف لاگرانژی Lagrangiam disscription

مطالعه‌ی یک ذره‌ی مشخص　$a(x_0, y_0, z_0, t)$　$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt$

در اینجا دستگاه مختصات تغییر می‌کند با حرکت

توصیف اویلری　Euleriam discription

مطالعه‌ی همه‌ی ذرات سیال　$a(x, y, z, t)$

در اینجا دستگاه مختصات تغییر نمی‌کند　$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz + \frac{\partial V}{\partial t}dt$

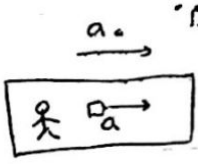
مشتق‌گیری بیشتر می‌شود

شتاب　acceleration

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t}\overset{1}{\left(\frac{dt}{dt}\right)} + \frac{\partial V}{\partial x}\overset{u}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} + \frac{\partial V}{\partial y}\overset{v}{\left(\frac{dy}{dt}\right)} + \frac{\partial V}{\partial z}\overset{w}{\left(\frac{dz}{dt}\right)}$$

یعنی شتاب فقط به سرعت بستگی ندارد به مؤلفه های دیگر هم بستگی دارد ممکن ما سرعت نداشته باشیم ولی شتاب داشته باشیم.

$$a = \underbrace{\frac{\partial V}{dt}}_{\substack{\text{local}\\ \text{acceleration}\\ \text{شتاب محلی}}} + \underbrace{u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} + w\frac{\partial V}{\partial z}}_{\substack{\text{convective}\\ \text{acceleration}\\ \text{شتاب انتقالی}}}$$



$a + a_0$

مثال: در $V = 2xy\,\hat{i} + 4tz^2\hat{j} - yz\hat{k}$ شتاب را محاسبه کنید در نقطه $(2,-1,1)$ ، $t=10$ ؟

$a=?$

$$a = \frac{dV}{dt} = 4z^2\hat{j} + \overset{2\times2\times(-1)}{u}\,2y\hat{i} + \overset{4\times10\times1}{v}\,(2x\hat{i} - z\hat{k}) + \overset{1\times1}{w}\,(8tz\hat{j} - y\hat{k})$$

$$(\overset{x}{2}, \overset{y}{-1}, \overset{z}{1}) \quad , t = 10$$

$$a = 4\times1\,\hat{j} + (-4)\times2\times(-1)\,\hat{i} + 40\,(4i - 1k) + 1\,(8\times10\times1\,j + 1\hat{k})$$

$$a = 4\hat{j} + 8\hat{i} + 160\hat{i} - 40\hat{k} + 80\hat{j} + 1\hat{k} =$$

$$168\hat{i} + 84\hat{j} - 39\hat{k}$$

حل کلاس:

$$a = 4z^2\hat{j} + 2xy(2y)\hat{i} + 4tz^2(2x\hat{i} - z\hat{k}) + (-y\hat{z})(8tz\hat{j} - y\hat{k})$$

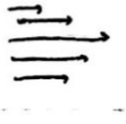
$$a = (4xy^2 + 8txz^2)\hat{i} + (4z^2 - 8tyz^2)\hat{j} + (-4tz^3 + y^2z)\hat{k}$$

جریان پایدار: steady state flow

در جریان پایدار ما شتاب نداریم. $\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ یا $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

جریان یکنواخت: uniform

جریان غیر یکنواخت: Non uniform



جریان یک بعدی : $V = (U , 0 , 0)$

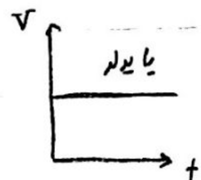
دو بعدی : $V = (U , V , 0)$

سه بعدی : $V = (U , V , W)$

$V = (0 , V , 0)$

جریان آرام : Laminar

هرچه ویسکوزیته



جریان متلاطم : turbulent

هرچه سرعت بیشتر ↑

هرچه دانسیته بیشتر ↑ ← جریان متلاطم‌تر می‌شود

هرچه قطر بیشتر ↑

ویسکوزیته کمتر باشد تلاطم بیشتر می‌شود.

لوله معمولی $Re < 2000$ آرام

لوله خیلی صاف $Re < 40000$ آرام

* عدد رینولدز Reynold number

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

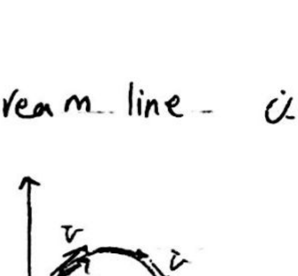
ما سه مسیر برای

path line مسیری که یک ذره مشخص طی می‌کند.

streak line مسیری که ذرات گذرنده از یک نقطه‌ی مشخص طی کرده‌اند.

stream line مسیر جریان مسیری که ذرات هم سرعت عبور می‌کنند.

ضرب خارجی صفر شود یعنی ۲ بردار هم جهت‌اند.



$$V \, dr \sin\hat{\theta} = 0$$

$$V \times dr = 0$$

$$dr = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$

مثال: اگر $V = \overbrace{2yt}^{u}\hat{i} + \overbrace{x}^{v}\hat{j}$ پیداکنید stream line در نقطه $(6,3)$ و $t=10$ ؟

حل خودم: X

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2yt & x & 0 \\ 1 & 2t & 0 \end{vmatrix} = (x \times 0) - (2t \times 0)\,\hat{i} - (0)-(0)\,\hat{j} + (2y + \times 2t) - (x)\,\hat{k}$$

$$+ 2 \times 3 \times 10 \times 2 \times 10 - 6 = 1200 - 6 = 1194\,\hat{k}$$

حل کلاس:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \qquad (v\,dz - w\,dy)\hat{i} + (w\,dx - v\,dz)\,\hat{j} + (u\,dy - v\,dx)\,k = 0$$

$$(x\,dz - 0\,dy)\,\hat{i} + (0\,dx - 2yt\,dz) + (2yt\,dy - x\,dx) = 0$$

$$x\,dz\,\hat{i} - 2yt\,dz\,\hat{j} + (2yt\,dy - x\,dx)\,\hat{k} = 0$$

$$x \neq x(z) \qquad y = y(z)$$

$$\int 2y(10)\,dy = \int x\,dx + C \longrightarrow 20\,\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}x^2 + C \rightarrow y^2 = \frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{10}C$$

کاربردهای Dell oprator

Dell oprator $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

①

گرادیان grad $\underset{\text{اسکالر}}{\phi} = \underset{\text{بردار}}{\nabla\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k}$

مثال: گرادیان دما $\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}$

② div

دیورجانس $A = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$

$$\underset{\text{بردار}}{\operatorname{div}\vec{A}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \underbrace{\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}}_{\text{اسکالر}}$$

curl ③

$$\operatorname{div} V = \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

cvr $\quad \operatorname{curl} A = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$

Olio

$$\operatorname{curl} V = \nabla\times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

vorticity vector

$$w = \operatorname{curl} V = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k}$$

مثال: بردار گردابی را برای $V = \overbrace{2xy}^{u}\,\hat{i} + \overbrace{4tz^2}^{v}\,\hat{j} + \overbrace{yz}^{w}\,\hat{k}$ در نقطه (۲،-۱،۱) و زمان $t=2$ ثانیه بدست آورید؟

$$w = (-z - 8tz)\,\hat{i} + (0-0)\,\hat{j} + (0-2x)\,\hat{k}$$

$$w = (-1-16)\,\hat{i} + 0\,\hat{j} + (-4)\,\hat{k}$$

$$w = \underbrace{-17\hat{i}}_{w_x} - \underbrace{4\hat{k}}_{w_z} \qquad w = (-17, 0, -4)$$

$\frac{\partial u}{\partial y} \gg 0 \leftarrow$ viscous flow جریان ویسکوز

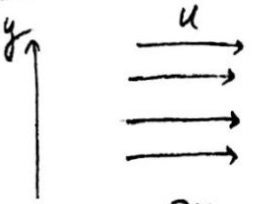
$\frac{\partial u}{\partial y} \simeq 0 \leftarrow$ invisid flow جریان غیرویسکوز

تنش = ویسکوزیته × تغییر سرعت ← $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$

$$\tau_{xy} = \mu\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{\dot{\gamma}_{xy}}$$

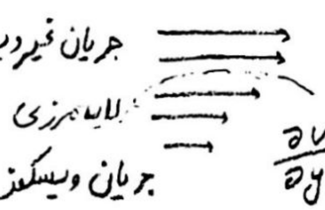
$$\tau_{xz} = \mu\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)}_{\dot{\gamma}_{xz}}$$

$$\tau_{xx} = 2\mu\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xx}}$$



$$\frac{\partial u}{\partial y} \simeq 0$$

inviside

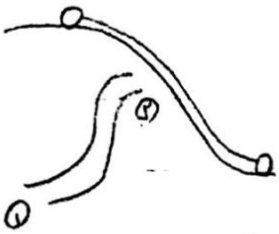


$$\frac{\partial u}{\partial y} \simeq 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \gg 0$$

معادله ی برنولی : (بقای انرژی)

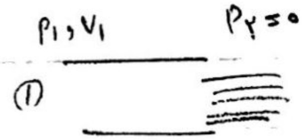
مسائل حل شده
۱
۵
۶



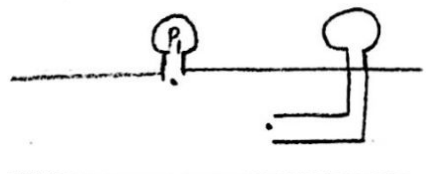
$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + h_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + h_2$$

$$0 + \frac{P_1}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g}$$

۱۱
۵
۱۲
۳۶، ۳۷



$$V_2^2 = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho} \quad \text{یا} \quad V_2 = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}$$



فصل چهارم

معادلات جریان (شکل انتگرالی)

۱- معادله‌ی بقای جرم

۲- معادله‌ی بقای انرژی (قانون اول ترمودینامیک)

۳- معادله بقای مومنتوم (اندازه حرکت) (تکانه) (قانون دوم نیوتون)

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + V \cdot \nabla \alpha$$

مشتق مادی

① $\boxed{\text{معادله‌ی بقای جرم}}$ (معادله‌ی پیوستگی)

$$① \quad \frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u\frac{\partial \alpha}{\partial x} + v\frac{\partial \alpha}{\partial y} + w\frac{\partial \alpha}{\partial z} \qquad \underbrace{(u \cdot v \ w)}_{V \text{ سرعت}}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} \ \frac{\partial}{\partial y} \ \frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\nabla}\alpha$$

$V \cdot \nabla \alpha \rightarrow \int_{sys} \rho \, dv$

تئوری استوکس

$$② \quad \iiint_{CV} \nabla \alpha \, dV = \iint_{CS} n \cdot \alpha \cdot dA$$

انتگرال سه‌گانه — حجم کنترل — سطح کنترل

$$m = \rho V = \int \rho \, dV$$

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 \longrightarrow \frac{D}{Dt}\int_{CV} \rho \, dV = 0 \xrightarrow{①} \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho \, dV + V \cdot \nabla \int_{CV} \rho \, dV = 0$$

$$\xrightarrow{②} \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho \, dV + \int_{CS} \rho \, \overbrace{n \cdot V}^{\nabla} \, dA = 0$$

شکل انتگرالی معادله‌ی بقای جرم

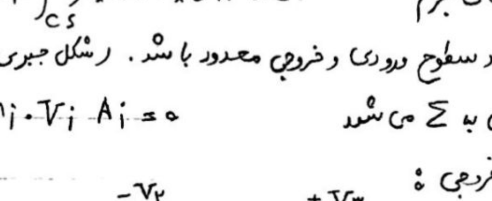
مورد‌ی دوم: اگر تعداد سطوح ورودی و خروجی محدود باشد. (شکل جبری)

در اینجا انتگرال تبدیل به Σ می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho \, dV + \overset{\text{تجمع}}{} \sum \overset{\text{برای ورودی‌ها و خروجی‌ها}}{\rho_i \, n_i \cdot V_i \, A_i} = 0$$

فرض دو ورودی و یک خروجی:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho \, dV + \rho_1 \underbrace{\overbrace{n_1 \cdot V_1}^{-V}}_{\text{ضرب داخلی}} A_1 + \rho_2 \overbrace{n_2 \cdot V_2}^{-V_2} A_2 + \rho_3 \overbrace{n_3 \cdot V_3}^{+V_3} A_3 = 0$$



$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho \, dV = \rho_1 V_1 A_1 + \rho_2 V_2 A_2 - \rho_3 A_3 V_3$$

تجمع = مجموع ورودیها − مجموع خروجی

$\dot{m} = \rho V A$ دبی جرم و دبی حجم $Q = AV$

همواره $Q_{\text{ورودی ها}} = Q_{\text{خروجی ها}}$, $\Sigma \dot{m}_i = \Sigma \dot{m}_o$

فرض ۱ : جریان پایدار

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV}$$

خروجی‌ها = ورودی‌ها

$$\rho_1 A_1 V_1 + \rho_2 A_2 V_2 = \rho_3 V_3 A_3$$

برای یک ورودی

$\dot m$ $\frac{kg}{s}$ ثابت است.

$$\overbrace{\rho_1 V_1 A_1}^{\dot m_1} = \overbrace{\rho_2 V_2 A_2}^{\dot m_2}$$ دبی جرمی، سرعت جرمی

A_1 A_2

فرض ۲ : دانسیته ثابت است $\rho_1 = \rho_2$

$$\underbrace{A_1 V_1}_{Q_1} = \underbrace{A_2 V_2}_{Q_2} \quad \left(\frac{m^3}{s}\right)$$

دبی حجمی Q_1 ، Q_2 دبی حجمی

مثال : آب به لوله‌ای با قطر ۲۰cm وارد شده از طرف دیگر به قطر ۴cm خارج می‌شود. اگر دبی حجمی $Q = 1 \frac{m^3}{s}$ سرعت ورودی، خروجی را حساب کنید؟

$V_1 = ?$ $\quad Q_2 = ?$

$V_2 = ?$ $\quad \dot m = ?$

$Q_1 = 1$

$$1 = \pi \times \frac{0/2^2}{4} \times V_1 \longrightarrow V_1 = 32$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{1}{\pi \times \frac{0/04^2}{4}} = \frac{10000}{4\pi} = \frac{2500}{\pi} = 796$$

$$\dot m = \rho A V \longrightarrow \dot m = 1000 \times 1 = 1000 \frac{kg}{s} \qquad \dot m_1 = \dot m_2$$

$\boxed{\text{بقای انرژی}}$:

$$\frac{D}{Dt}\int \rho e\, d\forall = \dot Q - \dot W$$

$e \; \frac{J}{kg}$ انرژی ذخیره

مشتق مادی

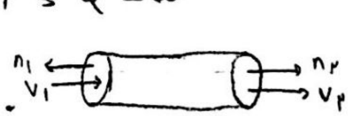
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho e\, d\forall + V\cdot\nabla\int_{cv} \rho e\, d\forall = \dot Q - \dot W$$

تئوری استوکس

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho e\, d\forall + \int_{cs} \rho e\, n\cdot V\, dA = \dot Q - \dot W$$

تبدیل انتگرال به Σ

$$\overset{\text{تجمع انرژی}}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho e\, d\forall} + \rho_1 e_1 \overbrace{n_1\cdot V_1}^{-V_1} A_1 + \rho_2 e_2 \overbrace{n_2\cdot V_2}^{+V_2} A_2 = \dot Q - \dot W$$



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho e\, dV - \rho_1 e_1 V_1 A_1 + \rho_2 e_2 V_2 A_2 = \dot Q - \dot W$$

* تجمع = Σ ورودی‌ها - Σ خروجی‌ها

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho e\, dv = \text{تجمع}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho e\, d\forall = \overbrace{\rho_1 e_1 V_1 A_1 + \dot{Q}}^{\text{ورودی ها}} - \overbrace{(\rho_2 e_2 V_2 A_2 + \dot{w})}^{\text{خروجی ها}}$$

فرض اول : steady state جریان پایدار
Flow

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho e\, dV}$$

$$\dot{Q} - \dot{w} = \underbrace{\rho_2 e_2 V_2 A_2}_{\dot{m}_2} - \underbrace{\rho_1 e_1 V_1 A_1}_{\dot{m}_1} = \dot{m}(e_2 - e_1)$$

تبدیل معادله به شکل سیالاتی (کمیت های سیالاتی)

e : مجموع انرژی های داخل و جنبشی و پتانسیل

$e = mu + \frac{1}{2}mV^2 + gzm$ $\quad$ $e = u + \frac{1}{2}V^2 + gz$

انرژی داخلی

$$\dot{w} = \rho_2 \underbrace{V_2 A_2}_{Q} - \rho_1 \underbrace{V_1 A_1}_{Q} + \dot{w}_s$$

$\dot{w}_s$: کار مصرفی (پمپ ، توربین)

$$\frac{\rho \forall}{t} = \rho Q = \rho \hat{V} A$$

سرعت

$$\dot{m}(e_2 - e_1) = \dot{Q} - \dot{w}$$

$$\boxed{h_L = \frac{u_2 - u_1}{g} + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}g}}$$

Head loss هد اتلافی

$$\cancel{h_L = u_1 - u_2 + \dot{Q}}$$

برای جریان یکنواخت

$$h_L = k\frac{V^2}{2g}$$

ضریب اتلاف

$$\frac{-\dot{w}_s}{\dot{m}g} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + z_2 - \frac{V_1^2}{2g} - \frac{P_1}{\rho g} - z_1 + h_L$$

رابطه ی کاربردی بقای انرژی

کار محیط روی سیستم ← $\boxed{\text{پمپ } \dot{w}_s = -H_p \dot{m} g = -\eta_p \dot{w}_p}$

هد پمپ ، راندمان پمپ

کار سیستم روی محیط ← $\boxed{\text{توربین } \dot{w}_s = H_T \dot{m} g = \frac{\dot{w}_T}{\eta_T}}$

راندمان توربین

۲۵

اگر جریان یکنواخت نبود، جریان آرام پاراپولیک

$$\alpha \frac{\bar{V}_1^2}{2g} \quad \text{یا} \quad \alpha \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$$

که در لوله $\alpha = 2$ — در صفحات موازی $\alpha = 1.5$

$$\boxed{-\frac{\dot{w}_s}{\dot{m}g} = \alpha \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + z_2 - \alpha \frac{V_1^2}{2g} - \frac{P_1}{\rho g} - z_1 + h_L}$$

قانون بقای مومنتوم: (تکانه)

* برای حالت steady state

$$f_t = mV$$

$$f = \frac{m}{t} V \longrightarrow f = \dot{m} V = \rho Q V = \rho A.V V$$

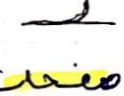
$$\frac{d}{dt}\int_{CV} d(\dot{m}V) = \Sigma f \longrightarrow \frac{d}{dt}\int \rho V \underbrace{n}_{\text{بردار نرمال بر سطح}} . V\, dA = \Sigma f \longrightarrow$$

$$\rho_1 V_1 \underbrace{n_1 \cdot V_1}_{-V_1} A_1 + \rho_2 V_2 \underbrace{n_2 \cdot V_2}_{+V_2} A_2 = \Sigma f \longrightarrow \boxed{\Sigma f = \overbrace{\rho_2 V_2 A_2}^{\dot{m}_2} V_2 - \overbrace{\rho_1 V_1 A_1}^{\dot{m}_1} V_1}$$

$$\Sigma f = \dot{m}(V_2 - V_1) \Rightarrow \begin{cases} \Sigma f_x = \dot{m}(V_{2x} - V_{1x}) \\ \Sigma f_y = \dot{m}(V_{2y} - V_{1y}) \\ \Sigma f_z = \dot{m}(V_{2z} - V_{1z}) \end{cases}$$

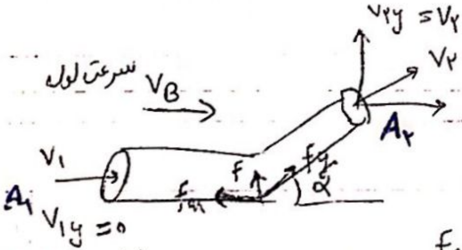
* اگر سرعت یکنواخت نباشد:

$$\Sigma f = \dot{m}(\beta_2 V_2 - \beta_1 V_1) \longrightarrow \begin{cases} \beta = 1 & \text{جریان یکنواخت یا متلاطم} \\ \beta = 1.33 & \text{جریان پاراپولیک در لوله} \\ \beta = 1.2 & \text{جریان پاراپولیک بین ۲ صفحه هم لولی} \end{cases}$$



صفحات موازی

نمونه:



$$V_{2y} = V_2 \sin\alpha = \frac{A_1}{A_2} V_1$$

$$V_{2x} = V_2 \cos\alpha = \frac{A_1}{A_2} V_1 \cos\alpha$$

$$f_x = \dot{m}\left(\frac{A_1}{A_2} V_1 \cos\alpha - V_1\right) = \dot{m} V_1 \left(\frac{A_1}{A_2}\cos\alpha - 1\right)$$

$$f_y = \dot{m}\left(\frac{A_1}{A_2} V_1 \sin\alpha - 0\right) = \dot{m} V_1 \frac{A_1}{A_2} \sin\alpha$$

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

$$\boxed{\begin{gathered} A_1 \neq A_2 \\ \Downarrow \\ V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 \end{gathered}}$$

٩ ٤٩
١٠
٤٥
٤٧

اگر خود لوله هم در حال حرکت باشد با سرعت V_B از سرعت نسبی V_r باید استفاده کنیم.

$V_r = V_1 - V_B$

مثال: F را پیدا کنید

$\alpha = 37 \quad D_1 = 20\,cm \quad D_2 = 8\,cm \quad V_1 = 100\,m/s$

$V_B = 20\,m/s \quad \rho_{آب} = 1000 \quad \dot m = \rho A V = 1000\,(100-20) \times \frac{\pi d^2}{4}$

$$F_x = \dot m \left(\frac{A_1}{A_2} V_1 \cos\alpha - V_1\right) = \dot m V_1 \left(\frac{A_1}{A_2}\cos\alpha - 1\right) = 800\pi\,(80)\,\cancel{\left(\left(\frac{20}{8}\right)^2 \cos 37 - 1\right)}^{4} =$$
$256000\pi\ N$

$$F_y = \dot m \left(\frac{A_1}{A_2} V_1 \sin\alpha - 0\right) = \dot m V_1 \frac{A_1}{A_2} \sin\alpha = 800\pi\,(80)\left(\frac{20}{8}\right)^2 (0.6) =$$
$240000\pi\ N$

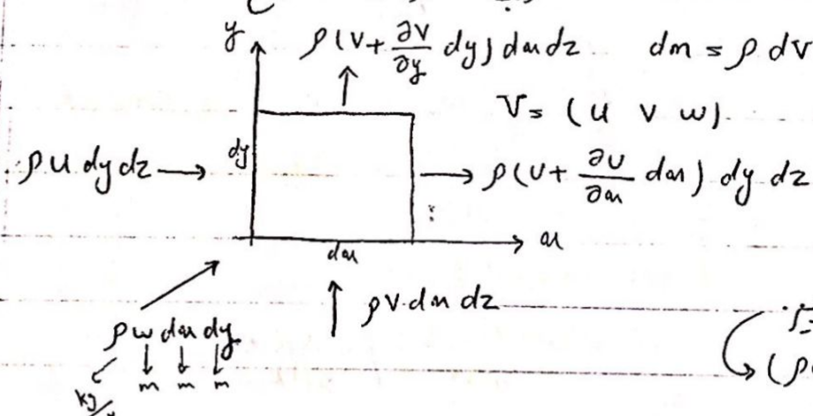
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(256000\pi)^2 + (240000\pi)^2}$$

فصل پنجم

قانون بقای جرم به شکل دیفرانسیلی

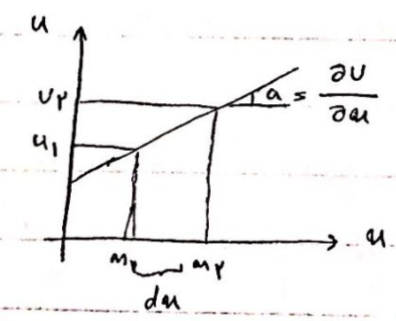
تجمع = ورودی − خروجی

$dm = \rho\, dV = \rho\, dx\, dy\, dz$



اگر ρ ثابت نباشد باید از کل مشتق بگیریم.

$(\rho w + \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz)\, dx\, dy$



$y = b + ax$

$u_2 = u_1 + a(x_2 - x_1) = u_1 + \frac{\partial u}{\partial x} dx$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx\,dy\,dz = \rho u\, dy\,dz + \rho v\, dx\,dz + \rho w\, dx\,dy - \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx\right) dy\,dz$$

$$- \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy\right) dx\,dz - \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz\right) dx\,dy =$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx\,dy\,dz = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx\,dy\,dz - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy\,dx\,dz - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz\,dx\,dy$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

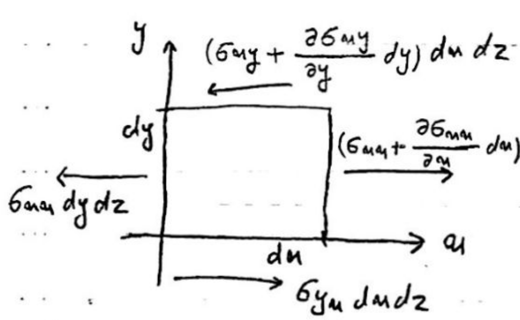
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \nabla\cdot V = 0$$ قانون بقای جرم

for incompressble flow $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ ← ثابت = ρ جریان تراکم ناپذیر

$\nabla\cdot V = 0$ شرط تراکم ناپذیر بودن مثال !

$$۱۲x - ۸x - ۴x = ۰$$

قانون بقای مومنتوم :

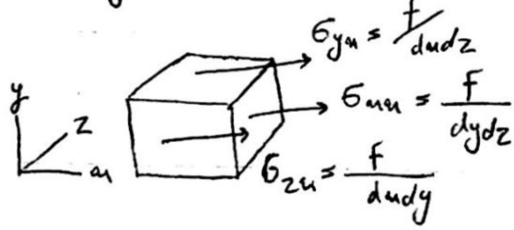


خروجی - ورودی = تجمع

$$\frac{\partial}{\partial t}(mV)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V)\, dx\,dy\,dz$$

$$\sigma_{xx} = \frac{f_x}{A_x} = \frac{f_x}{dy\,dz}$$



$$f_x = \sigma_{xx}\, dy\,dz + \sigma_{yx}\, dx\,dz + \sigma_{zx}\, dx\,dy$$

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \end{cases}$$

ماتریس تنش متقارن است

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)\, dx\, dy\, dz = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) dy\, dz + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy\right) dx\, dz +$$

$$\left(\sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz\right) dx\, dy - \sigma_{xx}\, dy\, dz - \sigma_{xy}\, dx\, dz - \sigma_{xz}\, dx\, dy$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)\, dx\, dy\, dz = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\, dy\, dz + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dx\, dy\, dz + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dx\, dy\, dz$$

$$+ \rho g_x\, dx\, dy\, dz \quad + \rho g_x$$

معادلات حرکت

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u) = \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho g_x & \text{جهت } x \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho v) = \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho g_y \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho w) = \dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z \end{cases}$$

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \nabla \cdot \sigma + \rho g$$

معادله حرکت در شکل عمومی

برای سیال نیوتونی

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \sigma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad \sigma_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla \cdot p + \mu \nabla^2 V + \rho g$$

جدول ۵.۱ ص ۹۵ مختصات قطبی کروی

معادلات حرکت برای سیال نیوتونی یا معادلات ناویر استوکس

$$\begin{cases} \rho \dfrac{Du}{Dt} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \rho g_x \\ \rho \dfrac{Dv}{Dt} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \rho g_y \\ \rho \dfrac{Dw}{Dt} = -\dfrac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \rho g_z \end{cases}$$

بقای انرژی

آنتالپی

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = K \nabla^2 T + \cancel{\frac{Dp}{Dt}}^{\,0}$$ اگر برای سیال تراکم ناپذیر

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = K \nabla^2 T \qquad \rho c_p \frac{DT}{Dt} = K \nabla^2 T \qquad \frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T$$

$$\alpha = \frac{K}{\rho c_p}$$

جرم $\dfrac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot V = 0$

مومنتوم $\rho \dfrac{Du}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \rho g$

انرژی $\dfrac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T$

$$\alpha \nabla^2 T \to \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{DT}{Dt} \to u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial t}$$

$Eu = \frac{\Delta p}{\rho U^2}$ Pe   Nu

Fr   Sc

M   Sh

We   Pr

فصل ۶ آنالیز ابعادی

واحد کمیت های فیزیکی ـ مکانیکی

واحد جمله های معادلات مکانیکی

اعداد بدون بعد

موازنه ی انرژی (J)

$$m\frac{V_2^2}{2} + m\frac{P_2}{\rho} + m z_2 g = m\frac{V_1^2}{2} + m\frac{P_1}{\rho} + m z_1 g$$

$$\frac{kg\,m^2}{s^2} \qquad kg\frac{Pa}{\frac{kg}{m^3}} \qquad \frac{kg\,m\,m}{s^2}$$

$$N.m \qquad \frac{N.m^3}{m^2} \qquad N.m$$

$$N = kg\frac{m}{s^2} \qquad Pa = \frac{N}{m^2} \qquad J = N.m$$

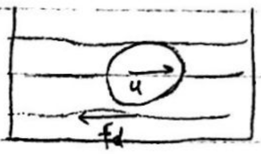
$\div mg$ — هد انرژی (m)

$$\frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + z_2 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + z_1$$

$\div mgz_2$ — بدون بعد

$$\frac{V_2^2}{2gz_2} + \frac{P_2}{\rho g z_2} + 1 = \frac{V_1^2}{2gz_2} + \frac{P_1}{\rho g z_2} + \frac{z_1}{z_2}$$

مثال:



نیروی درگ F_D Drag Force   نیروی اصطکاک

$$F_D \propto (\mu, u, \rho, R)$$

$\mu_1 \quad V_1 \quad \rho_1 \quad R_1$ تعداد آزمایش ها $3^4 = 81$

$\mu_2 \quad V_2 \quad \rho_2 \quad R_2$

$\mu_3 \quad V_3 \quad \rho_3 \quad R_3$

اگر بتوان دسته‌بندی کرد به جای ۸۱ تا می توان ۳ تا آزمایش انجام داد.

توسط تئوری Buking ham می توان تعداد گروه ها را فهمید.

$$\frac{F_D}{\rho U^2 R^2} \propto \left(\overset{(Re)}{\frac{\rho U R}{\mu}}\right)$$

$$\frac{N}{\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{m}{s}\cdot m^2} = 1 \qquad \frac{\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{m}{s}\cdot m}{\frac{N}{m^2}\cdot s} = \frac{\frac{kg}{m.s}}{\frac{kg\,m}{s^2}\cdot\frac{s}{m^2}} = 1$$

تئوری Buking ham می گوید تعداد گروه های بی بعد یا درجه آزادی برابر با تعداد کمیت ها منهای تعداد واحدها

تعداد کمیت ها   تعداد واحدها

$$\Pi = n - m$$ تعداد گروه های بی بعد

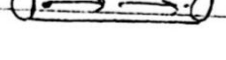
kg, s, m

$$\Pi = 5 - 3 = 2 \rightarrow A \propto B \rightarrow 3^1 = 3$$ آزمایش باید انجام دهیم ۳

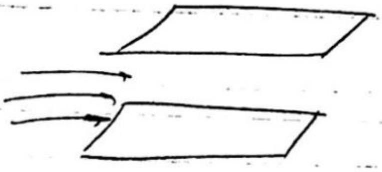
اگر ۳ بود می شد $A \propto (B, C)$ و $3^2 = 9$ آزمایش باید انجام دهیم.

Entrance flows

فصل ۷ جریان‌های داخلی



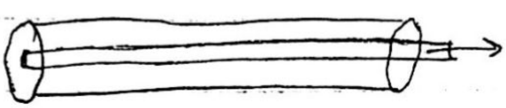
جریان داخل لوله



جریان بین دو صفحه موازی

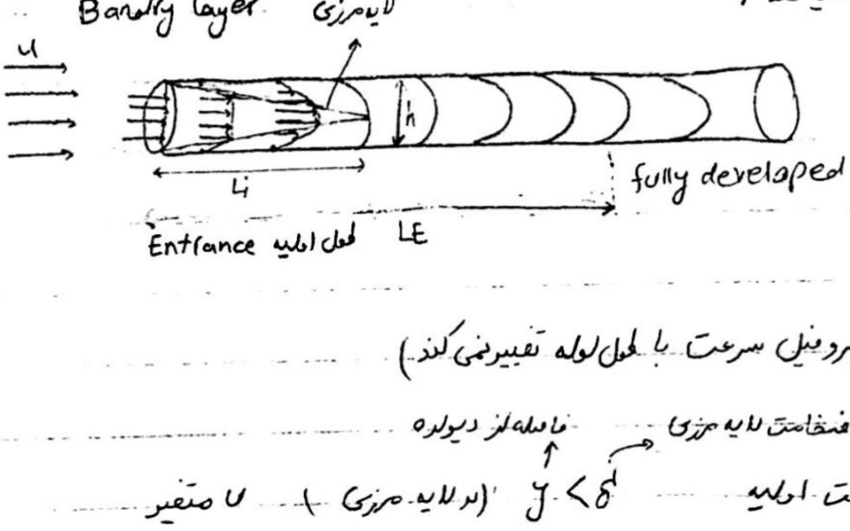
جریان بین ۲ استوانه چرخان

جریان بین دو استوانه که یکی کشیده شود.



جریان پایدار:

جریان توسعه یافته:



توسعه یافته (پروفیل سرعت با طول لوله تغییر نمی‌کند)

$\delta(x)$ ضخامت لایه مرزی ← y فاصله از دیواره

در قسمت اولیه $y < \delta$ (در لایه مرزی) u متغیر

$y > \delta$ (بیرون لایه مرزی) u یکنواخت

در قسمت توسعه یافته

سرعت وابسته به r $\quad u = U_{max}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$

لوله: $\frac{L_E}{D} = 0.065\,Re \quad L_i = \frac{1}{2}L_E$

بین دو صفحه: $\frac{L_E}{h} = 0.04\,Re \quad L_i = \frac{1}{2}L_E$

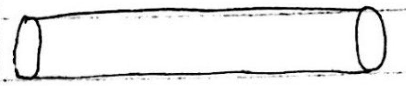
جریان متلاطم: $\frac{L_E}{D} \simeq 40 \sim 120$

فرضیات

جریان داخل لوله

۱- جریان پایدار $\frac{\partial}{\partial t}=0$

۲- جریان توسعه یافته $\frac{\partial}{\partial x}=0$



$V=(u,0,0)$

غیر شعاعی $V_r=0$

غیر چرخشی
$$\begin{cases} V_\theta=0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta}=0 \end{cases}$$

بدست آوردن معادله سرعت : $V(r)$

شروع از معادله حرکت : ارزش دهم

جهت x

(معادله جزئی)

$$\rho\Big(\underbrace{\cancel{V_r}\frac{\partial u}{\partial r}}_{\text{جریان غیر شعاعی}}+\underbrace{\cancel{\frac{V_\theta}{r}}\frac{\partial u}{\partial \theta}}_{\text{جریان غیر چرخشی}}+\underbrace{u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}}_{\text{توسعه یافته}}+\underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}}_{\text{جریان پایدار}}\Big)=-\overbrace{\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}}}^{\frac{\Delta P}{L}}+\mu\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\underbrace{\frac{1}{r^2}\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}}_{\text{غیر چرخشی}}$$

$$+\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\Big)+\rho\,\cancel{g_x}$$

صرف نظر می کنیم

$\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right)$

$$\frac{\Delta P}{\mu L}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} r=R & u=0 \\ r=0 & \frac{\partial u}{\partial r}=0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial r}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r}+r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right]$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\Delta P}{\mu L}\longrightarrow\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=\frac{\Delta P}{\mu L}$$

$$\int d\left(r\frac{du}{dr}\right)=\int\frac{\Delta P}{\mu L}r\,dr+C\longrightarrow r\frac{du}{dr}=\frac{\Delta P}{2\mu L}r^2+C_1$$

$$\frac{du}{dr}=\frac{\Delta P}{2\mu L}r+\frac{C_1}{r}\longrightarrow\int du=\int\left(\frac{\Delta P}{2\mu L}r+\frac{C_1}{r}\right)dr+C_2$$

شرایط مرزی را اعمال می کنیم

$r=0\quad \frac{du}{dr}=0$

$$u=\frac{\Delta P}{4\mu L}r^2+C_1\ln r+C_2 \quad (3)$$

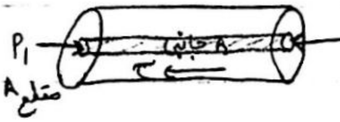
$$\frac{C_1}{0}+\frac{\Delta P}{2\mu L}(0)=0\longrightarrow\boxed{C_1=0}\quad (1)$$

$$0=\frac{\Delta P}{4\mu L}R^2+C_2\longrightarrow\boxed{C_2=\frac{-\Delta P R^2}{4\mu L}}\quad (2)$$

$$①,②,③ \Rightarrow u=\frac{\Delta P}{4\mu L}r^2-\frac{\Delta P R^2}{4\mu L} \Rightarrow u=\frac{-\Delta P R^2}{4\mu L}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

روش اول

المان حجمی (موازنه نیرو)



$$\sum f=0$$

$$P_1 A_{\text{مقطع}} - P_2 A_{\text{مقطع}} - \tau A_{\text{جانبی}} = 0$$

$$P_1 \pi r^2 - P_2 \pi r^2 - \mu \frac{du}{dr}(2\pi r L)=0$$

$$r(P_1-P_2)=2\mu L\frac{du}{dr}$$

$$-\Delta P r = 2\mu L\frac{du}{dr} \rightarrow \frac{-\Delta P}{2\mu L} r\,dr = du \Rightarrow \int \frac{-\Delta P}{2\mu L} r\,dr = \int du$$

$$u=\frac{-\Delta P}{4\mu L}r^2+C$$

$$\begin{cases} r=R \quad u=0 \\ 0=\frac{-\Delta P}{4\mu L}R^2+C \rightarrow C=\frac{\Delta P}{4\mu L}R^2 \\ u=\frac{-\Delta P R^2}{4\mu L}\left(1-\frac{r^2}{R}\right) \end{cases}$$

با استفاده از u می توان:

u_{max} را بدست آوریم: $\quad r=0 \quad u=u_{max}=\frac{-\Delta P R^2}{4\mu L}$

سرعت متوسط را بدست آوریم:

$$\bar{u}=\frac{\int u\,dA}{\int dA}=\frac{\frac{-\Delta P R^2}{4\mu L}\int_0^R\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)2\pi r\,dr}{\int_0^R 2\pi r\,dr}=\frac{-\Delta P R^2}{8\mu L}$$

$2\pi r \rightarrow dA=2\pi r\,dr$

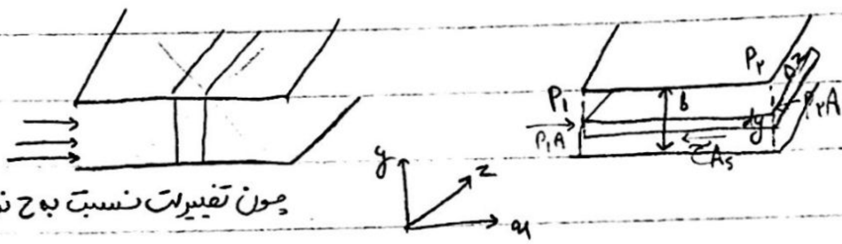
تنش برشی روی دیواره را بدست آوریم:

اگر به جای $r \leftarrow R$ و به جای $\frac{\mu du}{dr} \leftarrow \tau$ می نویسیم.

$$P_1\pi R^2-P_2\pi R^2-\tau_s(2\pi R L)=0 \rightarrow \underset{\text{تنش برشی}}{\tau_s}=\frac{-\Delta P R}{2L}$$

ضریب اصطکاک $f = \frac{8\tau_s}{\rho v^2} \longrightarrow h_L = f\,\frac{L}{D}\,\frac{v^2}{2g}$

ب) جریان بین دو صفحه موازی :



چون تغییرات نسبت به z نداریم

$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \qquad \underset{\text{توسعه یافته}}{\frac{\partial}{\partial x} = 0}$ تغییرات نسبت به x نداریم

pressure flow — جریان فشاری Δp

Drag flow — جریان درگ

$y = b \quad v = U$ ثابت

$$A = \Delta z\, dy$$

$$A_s = \Delta z\, L$$

$$\tau\big|_y = \mu \frac{du}{dy}$$

$$\tau\big|_{y+dy} = \tau\big|_y + d\tau$$

$$P_1 A - P_2 A - \tau A_s + (\tau + d\tau) A_s = 0$$

$$(P_1 - P_2)\cancel{\Delta z}\, dy - \underline{\tau \cancel{\Delta z} L} + \underline{\tau \cancel{\Delta z} L} + d\tau\, \Delta z\, L = 0$$

$$-\Delta p\, dy = L\, d\tau \longrightarrow \tau = \frac{-\Delta p}{L} y + C_1$$

$$\mu \frac{du}{dy} = -\frac{\Delta p}{L} y + C_1 \longrightarrow du = \frac{-\Delta p}{\mu L} y\, dy + \frac{C_1}{\mu} dy$$

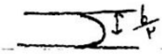
$$\int du = \int \left(\frac{-\Delta p}{\mu L} y + \frac{C_1}{\mu}\right) dy + C_2 \longrightarrow u = \frac{-\Delta p}{2\mu L} y^2 + \frac{C_1}{\mu} y + C_2$$

(pressure flow)

$y=0 \quad u=0 \qquad 0=\frac{-\Delta P}{2\mu L}(0)^2+\frac{c_1}{\mu}(0)+c_2 \rightarrow c_2=0$

$y=b \quad u=0 \qquad 0=\frac{-\Delta P}{2\mu L}b^2+\frac{c_1}{\mu}b \rightarrow c_1=\frac{\Delta P\, b}{\mu L 2}$

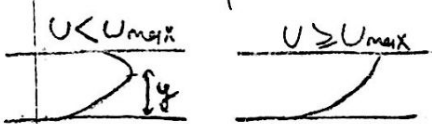
$u=\frac{-\Delta P}{2\mu L}y^2+\frac{\Delta P\, b}{L}y=\frac{\Delta P}{2\mu L}(by-y^2)$ برای u pressure Flow



$\frac{b}{2}$

(Drag and pressure flow)

$B.C\begin{cases} y=0 & u=0 \\ y=b & u=U \text{ ثابت} \end{cases} \longrightarrow U=\frac{-\Delta P}{2\mu L}b^2+\frac{c_1}{\mu}b$



$U<U_{max} \qquad U\geq U_{max}$

$u=\frac{\Delta P}{2\mu L}(by-y^2)+\frac{U}{b}y$

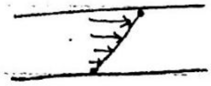
سرعت در y را اگر بخواهیم بدست آوریم مشتق می‌گیریم و مساوی صفر

(Drag flow)

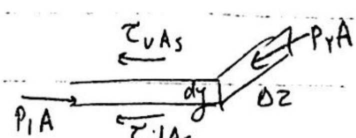
$\Delta P=0 \qquad u=\frac{c_1}{\mu}y+c_2 \qquad \begin{cases} y=0 & u=0 \longrightarrow c_2=0 \\ y=b & u=U \rightarrow U=\frac{c_1}{\mu}b \longrightarrow \end{cases}$

$c_1=\frac{\mu U}{b}$

$u=\frac{U}{b}y$



$u=\frac{\Delta P}{2\mu L}(by-y^2)$



$\bar{u}=?$

$U_{max}=?$

$\tau_0=?$

$f=?$

$h_L=?$

$\bar{u}=\frac{\int u\,dA}{\int dA}=\frac{\int_0^b \frac{\Delta P}{2\mu L}(by-y^2)\Delta z\,dy}{\int_0^b \Delta z\,dy}=\frac{\frac{\Delta P\,\Delta z}{2\mu L}}{\Delta z\, b}\left(\frac{by^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)$

$\frac{\Delta P}{2\mu L b}\left(\frac{b^3}{2}-\frac{b^3}{3}\right)=\frac{\Delta P\, b^2}{12\mu L}$

$(y = \frac{b}{2})$

$$u_{max} = \frac{\Delta P}{2\mu L}\left(b\frac{b}{2} - \frac{b^2}{4}\right) = \frac{\Delta p\, b^2}{8\mu L} \qquad u_{max} = \frac{3}{2}\bar{U}$$

$$\tau_u = \tau_d = \tau_0$$

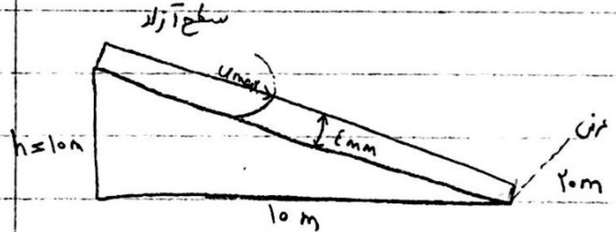
$$p_1 A - p_2 A - \tau_0 A_s - \tau_0 A_s = 0$$

$$(p_1 - p_2)\Delta z\, b - 2\tau_0 (L\Delta z) = 0 \longrightarrow \tau_0 = \frac{\Delta p\, b}{2L}$$

ضریب اصطکاک

$$f = \frac{8\tau_0}{\rho \bar{U}^2} = \frac{4\Delta p\, b}{\rho L \bar{U}^2}$$

$$h_L = \frac{\Delta P}{\rho g} = \underbrace{f\frac{L}{2b}}_{K}\frac{\bar{U}^2}{2g} \longrightarrow h_L = K\frac{\bar{U}^2}{2g}$$



مثال 7.2

$\rho_{water} = 1\ g/cm^3$

$\rho_{Air} = 1\ kg/m^3$

$\mu_w = 1\ cp = 0.001\ pa.s$ در دمای محیط

$Q = \bar{U}.A = ? \longrightarrow A = 20 \times 0.004 = 0.08\ m^2$

$\tau_0 = ?$ $\quad \bar{U} = \frac{b^2\Delta p}{12\mu L} = \frac{(0.008)^2 \times 1000}{12 \times 0.001 \times 10} = \frac{64}{120} = 0.53\ m/s \longrightarrow Q = \frac{16}{30} \times \frac{8}{100} = 0.04\ m^3/s$

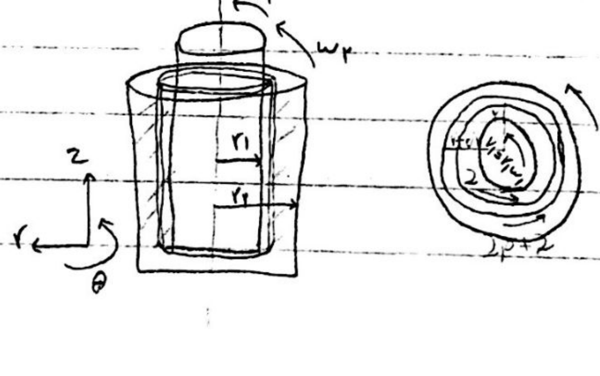
$Re = ?$ $\quad \tau_0 = \frac{b\,\Delta p}{2L} = \frac{0.008 \times 1000}{2 \times 10} = 0.4\ pa$

* $\Delta p = \rho g h = 10000 \times 0.1 \times 1000$

* $\frac{b}{2} = 4 \to b = 8$ $\quad Re = \frac{\rho \bar{u} b}{\mu} = \frac{1000 \times \frac{16}{30} \times 0.008}{0.001} = 425$ بی‌بعد

ج) دو استوانه‌ی چرخان :

$V_2 = r_2 \omega_2$



$\mu \propto T$

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \qquad \begin{cases} V_r = 0 \\ V_z = 0 \\ V_\theta = V(r) \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$$

موازنه گشتاور

$$\tau A_s r\Big|_r = \tau A_s r\Big|_{r+dr}$$

$$\tau\, 2\pi r L\, r = (\tau + d\tau)\, \underbrace{2\pi (r+dr) L}_{A_s}\, \underbrace{(r+dr)}_{\text{شعاع}}$$

$$\cancel{\tau r} = \cancel{\tau r} + 2\tau r\,dr + r^2 d\tau + 2r \underbrace{d\tau\, dr}_{0} + d\tau \underbrace{(dr)^2}_{0}$$

$$2\tau r\,dr = r^2 d\tau \longrightarrow 2\tau\,dr = r\,d\tau \quad ②$$

از جدول کتاب (تنش در مختصات قطبی):

$$\tau_{r\theta} = \mu r \frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r}\right) \quad ①$$

$$①,② \rightarrow 2r\mu \frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r}\right) = r\mu \frac{d}{dr}\left(r \frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r}\right)\right) \Rightarrow 2\frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r}\right) = \frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r}\right)\right]$$

$$r\frac{d\left(\frac{v}{r}\right)}{dr} + 2\frac{v}{r} = C_1 \longrightarrow v = \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r} \quad ③$$

$$B.C \begin{cases} r = r_1 & v = r_1 w_1 \\ r = r_2 & v = r_2 w_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} r_1 w_1 = \frac{C_1}{2} r_1 + \frac{C_2}{r_1} \\ r_2 w_2 = \frac{C_1}{2} r_2 + \frac{C_2}{r_2} \end{cases}$$

دستگاه دو معادله دو مجهول

$$C_1 = 2\frac{r_2^2 w_2 - r_1^2 w_1}{r_2^2 - r_1^2} \quad ①$$

$$C_2 = \frac{r_1^2 r_2^2 (w_1 - w_2)}{r_2^2 - r_1^2} \quad ①$$

$$①,①,③ \Rightarrow v = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2}\left[(r_2^2 w_2 - r_1^2 w_1) r + \frac{r_1^2 r_2^2}{r} \times (w_1 - w_2)\right]$$

۱ ۱۱ ۱۴ ۲۴

۷-۱ , ۷-۲ , ۷-۳

اگر $\omega_2 = 0$ باشد $\Leftarrow$

$$v = \frac{\omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(\frac{r_2^2}{r} - r\right)$$

$$\tau_1 = \mu r \left.\frac{\partial\left(\frac{v}{r}\right)}{\partial r}\right|_{r=r_1} = \frac{2\mu r_2^2 \omega_1}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$T = f \cdot r = \tau_1 \cdot A \cdot r \longrightarrow T = \frac{2\mu r_2^2 \omega_1}{r_2^2 - r_1^2} \cdot 2\pi r_1 L \cdot r_1$$

$$T = \frac{4\pi \mu r_2^2 r_1^2 L \omega_1}{r_2^2 - r_1^2} \qquad \boxed{\mu = \frac{T(r_2^2 - r_1^2)}{4\pi r_2^2 r_1^2 L \omega}}$$

مثال ۷.۳ خوانده شود.

فصل اول

سؤال ۳ -

چگالی هوا

$$P_{atm} = 100\,kpa - \frac{\rho g h}{1000} = 100 - \frac{1 \times 10 \times ۳000}{1000} = ۷۰\ kpa$$

تبدیل به kpa

$$P_{abs} = ۷۰ - ۲۵ = ۴۵\ Kpa$$

سؤال ۶ -

فشار لاستیک زمانی که سرد $P_{1_{real}} = ۲۵۰\,kpa \longrightarrow ۲۵۰ + 100 = ۳۵۰\ Kpa = P_{1\,abs}$

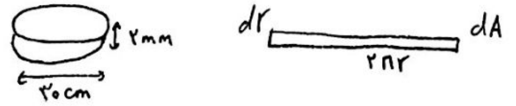
$$T_1 = -۱۵^\circ c \longrightarrow ۲۷۳ - ۱۵ = ۲۵۸\ K$$

$$T_۲ = ۶۵^\circ c \longrightarrow ۲۷۳ + ۶۵ = ۳۳۸\ K$$

$$PV = mRT$$

$$\frac{P_۲}{P_1} = \frac{T_۲}{T_1} \longrightarrow P_{۲_{abs}} = ۳۵۰ \times \frac{۳۳۸}{۲۵۸} = ۴۶۰ - 100 = ۳۶۰\ kpa = P_{۲_{real}}$$

سؤال ۵ -



$$D = ۳۰\ cm \longrightarrow R = ۰/۱۵\ m$$

$$\omega = ۸۰۰\ rpm \times \frac{۲\pi}{۶۰} = ۲۶,۶\ \frac{rad}{s}$$

$$h = ۰/۰۰۲\ m$$

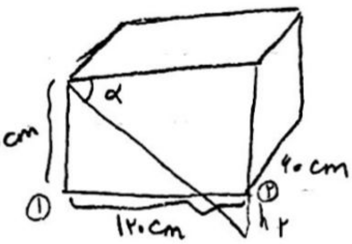
از جدول کتاب انگلیسی $\mu = ۰/۳۸\ Pa.s$ $\qquad T = F \times r \longrightarrow T = \int r\, df$

$$df = \overset{pa}{\tau} \times dA = \mu \frac{r\omega}{h} dA = ۰/۳۸\ \frac{r \times ۲۶,۶}{۰/۰۰۲} \times (۲\pi r\, dr) = ۳۱۸۰۰\, \pi r^۲ dr \quad pa.m^۲$$

$$T = \int r\ ۳۱۸۰۰\, \pi r^۲ dr = ۳۱۸۰۰\, \pi \int r^۳ dr = ۳۱۸۰۰\, \pi \times \frac{r^۴}{۴}\Big|_۰^{۰/۱۵} = ۱۲,۷\ N.m$$

فصل ۲

سؤال ۵ -



$P_1 = \rho g h_1 = 1000 \times 10 \times 1 = 10000 \ pa$

$P_2 = \rho g h_2 = 1000 \times 10 \times h_2$

$P_2 = 10000 \times (-0/2) = -2000$

$\tan\alpha = \frac{1+h_2}{1/2} \rightarrow 1 = \frac{1+h_2}{1/2} \rightarrow h_2 = 0/2$

$\tan\alpha = \frac{a_x}{g} = \frac{10}{10} = 1$

$A = 1/2 \times 0/6 = 0/72 m^2$

نیروی کف مخزن $f = \frac{P_1 + P_2}{2} \times A = \frac{10000 - 2000}{2} \times 0/72 = 2800 \ N$

$mg = \rho V g = 1000 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 0/6 \times 10 = 3000 \ N$

سؤال ۱۱ -

$S = 0/75$ $\quad S = \frac{\rho}{\rho_w} \Rightarrow S \times \rho_w = \rho \rightarrow \rho = 0/75 \times 1000 = 750 \ kg/m^3$

$\Delta p = 200 \ kpa$

$h = ?$

$\Delta p = \rho g h \rightarrow h = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{200000}{7500} = 26/7$

$$P_2 = \cancel{P_1}^{0} + \rho g L = 10000 \times 0/4 = 4000\,pa$$ (الف

$$P_3 = P_2 + \rho a_x L = 4000 + 1000 \times 6 \times 0/4 = 6400\,pa$$

$$P_4 = P_3 - \rho g L = 6400 - 1000 \times 0/4 = 2400\,pa$$

$$P_B = \cancel{P_1}^{0} + \rho g L = 0 + 1000 \times 10 \times 0/5 = 5000\,pa$$ (ج

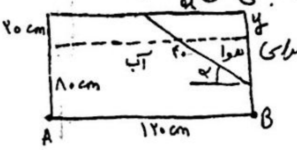
$$P_C = P_B + \rho a_x L = 5000 + 1000 \times 4 \times 0/5 = 7000\,pa$$

$$P_A = P_C - \rho g L = 7000 - 1000 \times 10 \times 0/5 = 2000\,pa$$

روش دوم : مستقیم P_A را حساب کردیم.

$$P_A = P_1 + \rho a_x L = 0 + 1000 \times 4 \times 0/5 = 2000\,pa$$

۵- مخزن مثال ۵.۲ از آب پرشده است اما دارای سطح کوچکی در قسمت بالا انتهای چپ باشد. حال نیروی وارده برکف مخزن را بدست آورید. تمام کمیت های دیگر همانطوری که در مثال بیان شد باقی می مانند.



خط فشار ثابت نسبی صفر از گوشه چپ بالا عبور کرده و زیر B در فاصله z کشیده می شود (شکلی که دارای یک مثلث با ضلع چپ به ارتفاع cm(z+100) و قاعده به طول ۱۲۰cm را رسم کنید.) که z از رابطه زیر بدست می آید.

$$\tan\alpha = \frac{10}{9/81} = \frac{100+z}{120} \longrightarrow z = 22/3\,cm$$

نقطه ی B ۲۲٫۳cm بالای خط فشار صفر است

بنا براین فشار در B برابر است با:

$$P_B = -\gamma z = -9810 \times 0/223 = -2190\,pa$$

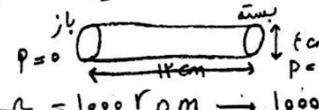
فشار در A و فشار متوسط روی سطح کف عبارتند از:

$$P_A = 9810 \times 1/0 = 9810\,pa \quad و \quad P_{avg} = \frac{P_A + P_B}{2} = \frac{9810 - 2190}{2}$$

نیروی کف در این صورت عبارت است از:

$$F = P_{avg} A = 3810\,(0/6 \times 1/2) = 2740\,N$$

۶- یک لوله آزمایش در دستگاهی درحال دوران قرارداده شده است که به تدریج زمانیکه با سرعت به اندازه کافی زیاد دوران می کند لوله را در موقعیت افقی قرار می دهد. اگر سرعت آن 1000 rpm باشد فشار در کف لوله آزمایش با قطر نسبتاً کوچک را در صورتیکه لوله محتوی آب بوده و طول آن 12cm باشد. برآورد نمایید. قسمت فوقانی لوله دارای شعاع 4cm از محور دوران می باشد. سهمی گون حاصل از دوران، یک سطح فشار ثابت است. آن که از بالای لوله آزمایش درحال دوران عبور می کند یک سطح فشار صفر است اگر نقطه ۱ را روی محور دوران و ۲ را روی کف لوله آزمایش قرار دهیم در این صورت رابطه (۲۹.۲) شکل زیر را می گیرد.



$$\Omega = 1000\,rpm \longrightarrow 1000 \times \frac{2\pi}{60}\ \frac{rad}{s}$$

$$P_2 - P_1 = -\rho a_n dr \qquad P = 1000\left(1000 \times \frac{2\pi}{60}\right)^2 \left[(0/12)^2 - 0^2\right] = 79\,kpa$$

$r\omega^2$

۱۵- توزیع دمای $T = 288 - 0.0065z$ K را فرض کرده و جهت یافتن فشار در 10 km در اتمسفر با فرض $p = 101.3$ kPa در $z=0$ انتگرال بگیرید خطا را محاسبه کنید؟

الف $\rho_{air} = 1\ \frac{kg}{m^3}$ ثابت

ب ρ_{air} = متغیر $= \frac{P}{RT}$ $\quad T = 288 - 0.0065z \rightarrow \rho = \frac{P}{R(288-0.0065z)}$

الف

$P_{\text{در ارتفاع 10000 متری}} = P_0 - \rho g h = 101000 - 1\times10\times10000 = 101000 - 10000 = 91000\ Pa = 91\ kPa$

ب

$dp = -\rho g\, dz \rightarrow dp = -\frac{P g}{R(288-0.0065z)}dz \rightarrow \int \frac{dP}{P} = \frac{-g}{R}\int_0^{10000} \frac{1}{\underbrace{288-0.0065z}_{u}} dz$

RH: $du = -0.0065\, dz$ $\quad \begin{cases} z=0 & u=288 \\ z=10000 & u=223 \end{cases}$

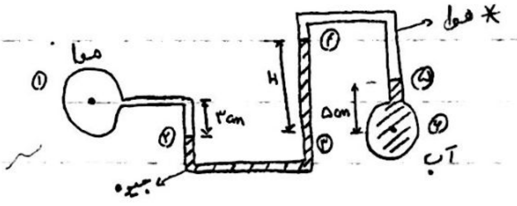
$RH = \frac{-g}{R}\times\frac{-1}{0.0065}\int_{288}^{223}\frac{1}{u}du = \frac{-9}{0.0065R}\times Ln\frac{288}{223} \rightarrow \frac{P}{P_0} = e^{\frac{-g}{0.0065R}\times Ln\frac{288}{223}} \rightarrow$

$P = P_0\, e^{\frac{-g}{0.0065R}Ln\frac{288}{223}}$

LH: $\int_{P_0}^{P}\frac{dp}{p} = Ln p - Ln p_0 = Ln\frac{P}{P_0}$

۱۸- اختلاف فشار بین لوله هوا و لوله آب در شکل ۱۴.۲ را محاسبه کنید در صورتیکه H برابر باشد با:

الف) 5 cm ب) 8 cm ج) 10 cm



* از هوا صرف نظر می‌کنیم

$H = 10\ cm = 0.1\ m$

$\rho_{آب} = 1000 \qquad \rho_{هوا} = 0$

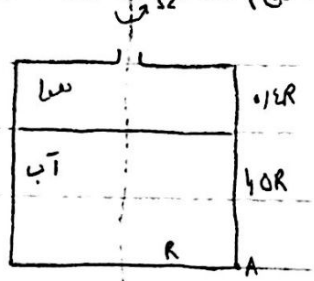
$S_{Hg} = 13.6$

$P_1 - H\times\rho\times g\times S + 0.05\times\rho\times g = P_4$

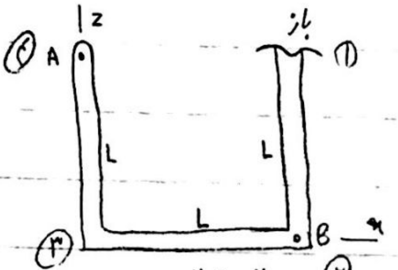
$P_1 - P_4 = \underbrace{10\times0.1\times1000\times13.6}_{13600} - \underbrace{0.05\times1000\times10}_{500} = 13100\ Pa = 13.1\ kPa$

۱۹- فشارها در نقاط A و B در آب درون لوله U در شکل ۲۵.۲ را محاسبه کنید در صورتیکه:

الف) $L = 30\ cm$ و $a_x = 6\ m/s^2$ ب) $L = 60\ cm$ و $a_z = -10\ m/s^2$ ج) $L = 50\ cm$ و ω ...



۲۴-۲



۲۵-۲

حل کلاس

$$\begin{cases} \rho = 1000 \\ \mu = 10^{-3} \\ d = 0/008\,m \end{cases} \longrightarrow Re = \frac{1000 \times 0/485 \times 0/008}{10^{-3}} = 3880$$

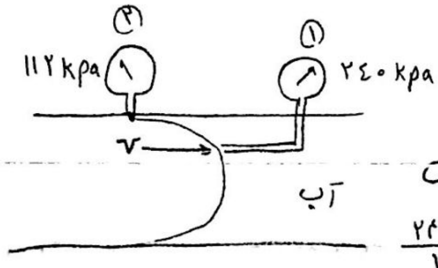
$$V = \frac{Q}{A} = \frac{2\times 10^{-2}/82}{\pi \times 0/004^2} = 0/485$$

با استفاده از ویسکوزیته جنبشی آب حدود $10^{-6}\ m^2/s$ عدد رینولدز عبارت است از :

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{Vh}{\nu} = \frac{0/485 \times 0/008 \times 0/5}{10^{-6}} = 3880$$

این مقدار از ۲۰۰۰ بزرگتر است بنابراین اگر لوله صاف نباشد یا ورودی کاملاً گرد شده نباشد جریان آشفته می‌شود اگرچه می‌تواند آرام باشد اگر با دقت از ارتعاشات ساختاری و نوسانات آب با استفاده از یک لوله‌ی صاف جلوگیری می‌شود.

۵- میله‌های پیتوت و پیزومتر مانند شکل ۱۴.۳ فشارهای کل و استاتیک را می‌خوانند. سرعت V را محاسبه کنید.



معادله‌ی برنولی به صورت زیر در می‌آید :

$$\frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g h_2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g h_1$$

که نقطه‌ی ۲ درست داخل لوله‌ی پیتوت است. با استفاده از اطلاعات داده شده نتیجه می‌شود : $\frac{240000}{1000} = \frac{V_1^2}{2} + \frac{112000}{1000}$ $V_1 = 16\ m/s$

واحدهای موجود در جمله‌ی نخست معادله‌ی بالا را بررسی کنید :

$$\frac{N/m^2}{kg/m^3} = \frac{(kg \cdot m/s^2)}{kg/m^3} = \frac{m^2}{s^2}$$

(فرمول استاد) $\left(\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + h_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_2\right)$

۶- یک نازل روی یک شیلنگ آب را از قطر 4 cm به قطر 1 cm شتاب می‌دهد. اگر فشار بالادست نازل 400 kpa باشد حداکثر سرعت در خروجی نازل چه قدر است ؟

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$\pi \times 2^2 \times V_1 = \pi \times 0/5^2 \times V_2 \qquad V_2 = 16 V_1$$

براساس معادله‌ی برنولی می‌نویسیم :

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{400000}{1000} + g h_1 = \frac{256\, V_1^2}{2} + \frac{100000}{1000} + g h_2$$

$$V_1 = 1/534\ m/s \quad , \quad V_2 = 24/5\ m/s$$

این بیانگر مقدار ماکزیمم است زیرا فرض کردیم هیچ نوع تلفاتی به سبب اثرات ویسکوز نداریم و نیز پروفیل سرعت را یکنواخت در نظر گرفته‌ایم.

فصل سوم

۱- یک میدان سرعت در یک جریان صفحه‌ای به صورت $\mathbf{V} = \overbrace{2yt\hat{i}}^{u} + \overbrace{x\hat{j}}^{v}\ \mathrm{m/s}$ همانند مثال ۱.۳ داده شده است شتاب سرعت زاویه‌ای و بردار ورتیسیته را در نقطه‌ی (۴m و ۲m) در t=۳s بیابید؟

$$a = \frac{\partial V}{\partial t} + u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} + w\cancel{\frac{\partial V}{\partial z}} = 2y\hat{i} + 2yt\hat{j} + x(2t\hat{i}) = 2(xt+y)\hat{i} + 2yt\hat{j}$$

در نقطه‌ی (۲،۴) و t=۳s شتاب عبارت است از:

$$a = 2(4\times3+2)\hat{i} + 2\times2\times3\hat{j} = 28\hat{i} + 12\hat{j}\ \mathrm{m/s^2}$$

سرعت زاویه‌ای به صورت زیر است:

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial w}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial v}{\partial z}}\right)i + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial w}{\partial x}}\right)\hat{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)K = \frac{1}{2}(1-2t)K$$

در t=۳s داریم:

$$\Omega_z = \frac{1}{2}(1-2\times3) = -\frac{5}{2}\ \mathrm{rad/s}$$

بردار ورتیسیته دو برابر بردار سرعت زاویه‌ای است بنابراین داریم: $\omega = -5K\ \mathrm{rad/s}$

۲- نرخ تغییر چگالی را در یک جریان لایه‌ای که $\rho = 1000(1-0/2z)$ و سرعت $V = 10(z-z^2)i$ است بیابید. سرعت تنها در راستای z است و چگالی با z تغییر می‌کند (معمولاً راستای عمودی) مشتق مادی چنین جواب می‌دهد:

$$\frac{D\rho}{Dt} = u\cancel{\frac{\partial\rho}{\partial x}} + v\cancel{\frac{\partial\rho}{\partial y}} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} + \cancel{\frac{\partial\rho}{\partial t}} = 0$$

بنابراین تغییری در چگالی یک ذره مشخص وقتی جریان داخل میدان جریان حرکت می‌کند وجود ندارد.

۳- یک میدان سرعت در مختصات استوانه‌ای به شرح ذیل داده شده است: $V_r = (2-\frac{8}{r^2})\cos\theta\ \mathrm{m/s}$

شتاب در نقطه (۳m , ۹۰°) چه قدر است؟ $V_\theta = -(2+\frac{8}{r^2})\sin\theta\ \mathrm{m/s}$ $\quad V_z = 0$

جدول ۱.۳ مؤلفه‌ی شتاب را می‌دهد.

$$a_r = V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta} + V_z\cancel{\frac{\partial V_r}{\partial z}} - \frac{V_\theta^2}{r} + \cancel{\frac{\partial V_r}{\partial t}}$$

$$= (2-\frac{8}{r^2})\cancel{\cos\theta}\left(\frac{16}{r^3}\right)\cancel{\cos\theta} + \left(\frac{2}{r}+\frac{8}{r^3}\right)\sin\theta\left(2-\frac{8}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{1}{r}\left(2+\frac{8}{r^2}\right)^2\sin^2\theta$$

$$= 0 + \left(\frac{2}{3}+\frac{8}{27}\right)\left(2-\frac{8}{9}\right) - \frac{1}{3}\left(2+\frac{8}{9}\right)^2 = -1/712\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_\theta = V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_r}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta} + V_z\cancel{\frac{\partial V_\theta}{\partial z}} + \frac{V_rV_\theta}{r} + \cancel{\frac{\partial V_\theta}{\partial t}}$$

$$= \left(2-\frac{8}{r^2}\right)\cancel{\cos\theta}\left(\frac{16}{r^3}\right)\sin\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{2}{r}+\frac{8}{r^2}\right)^2\sin\theta\cancel{\cos\theta} - \left(\frac{2}{r}-\frac{8}{r^2}\right)\cos\theta\left(2+\frac{8}{r^2}\right)\sin\theta = 0$$

$a_z = 0$

توجه داشته باشید که $\cos 90° = 0$ و $\sin 90° = 1$ است.

۴- جریان آرام از آب ۲۰°C در یک لوله به قطر ۸ mm صد قطر است. یک محفظه‌ی ۲L ، برای گرفتن آب در ۸۲s پر می‌شود آیا جریان آرام است؟

$$n = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = \frac{1\hat{i} + 2\hat{j}}{\sqrt{5}}$$ ادامه سؤال ۱۳

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k} = 1\hat{i} + 2\hat{j} \longrightarrow |\nabla \phi| = \sqrt{5}$$ ادامه فصل سوم

۱۱- توزیع سرعت سموی در یک جریان داخل کانال به صورت $v(y) = 0/2(1-y^2)\ \frac{m}{s}$ با y اندازه گیری شده به واحد سانتی‌متر بیان می شود. شتاب یک ذره سیال در خط مرکز که $y=0$ است چه قدر است؟ در جائیکه $y = 0/5\,cm$ است به چه میزان است؟

$$U = 0/2(1-y^2)\ \frac{m}{s} \qquad a = ?$$

$$a = \frac{DV}{Dt} = \cancel{\frac{\partial V}{\partial t}} + U\cancel{\frac{\partial V}{\partial x}} + \cancel{V\frac{\partial V}{\partial y}} + \cancel{w\frac{\partial V}{\partial z}} = 0$$

۱۳- بردار یکه ی عمود بر خط جریان در نقطه ی $(2, -1)$ وقتی $t = 2s$ باشد بیابید اگر میدان سرعت به صورت زیر باشد: الف) $V = \overbrace{2xy}^{u}\,\hat{i} + \overbrace{y^2 t}^{v}\,\hat{j}\ \frac{m}{s}$

$$a = \frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} + \cancel{w\frac{\partial V}{\partial z}} = y^2\hat{j} + 2xy(2y\hat{i}) + y^2 t(2x\hat{i} + 2yt\hat{j})$$

$$a = y^2\hat{j} + 4xy^2\hat{i} + 2y^2tx\hat{i} + 2yt\,y^2t\hat{j} = 1\hat{j} + 4\times2\times1\hat{i} + 2\times1\times2\times2\hat{i} + 2(-1)\times2\times1\times2\hat{j}$$

$$a = 1\hat{j} + 4\hat{i} + 8\hat{i} - 8\hat{j} = 12\hat{i} - 7\hat{j}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2xy & y^2t & 0 \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = (y^2t\,dz - 0)\hat{i} - (2xy\,dz - 0)\hat{j} + (2xy\,dy - y^2t\,dx)\hat{k}$$

$$\cancel{2xy}\,dy = y^2t\,dx \longrightarrow x\,dy = y\,dx \longrightarrow \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}$$

$$Lny = Lnx + LnC \longrightarrow Lny = LnCx \longrightarrow e^{Lny} = e^{LnCx} \longrightarrow y = Cx \longrightarrow -1 = 2C$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x} \longrightarrow \boxed{2y + x = 0} \longrightarrow \phi_{x,y,z}$$

۱۲- سرعت و شتاب یک ذره سیال را در نقطه ی $(1, 2, -3)$ وقتی $t = 2s$ می باشد حساب کنید اگر میدان سرعت به صورت زیر باشد الف) $V = \overbrace{2xy}^{u}\,\hat{i} + \overbrace{y^2t}^{v}\,\hat{j} + yz\,\hat{k}\ \frac{m}{s}$

$$a = \frac{DV}{Dt} = (0 + y^2\hat{j} + 0) + (2xy)(2y)\hat{i} + (y^2t)(2x\hat{i} + 2yt\hat{j} + z\hat{k}) + (yz)(y\hat{k})$$

$$a = y^2\hat{j} + 4xy^2\hat{i} + 2xy^2t\hat{i} + 2y^3t^2\hat{j} + zy^2t\hat{k} + y^2z\hat{k}$$

$$a = 2xy^2(2+t)\hat{i} + y^2(1+2yt^2)\hat{j} + zy^2(1+t)\hat{k}$$

$$a_x = 2xy^2(2+t) \qquad a_y = y^2(1+2yt^2) \qquad a_k = zy^2(1+t)$$

$$2\times2\times1(2+2)$$

$$4xy^2 + 2xy^2t = 4\times2\times1 + 2\times2\times1\times2 = 8 + 8$$

$$a=\frac{DV}{Dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+u\frac{\partial V}{\partial x}+v\frac{\partial V}{\partial y}+w\frac{\partial V}{\partial z}\rightarrow a=xy\hat{j}+(2y^2)(yt)\hat{j}+(xyt)(4y\hat{i}+xt\hat{j})$$

$$a=4xy^2t\,\hat{i}+(xy+2y^3t+x^2yt^2)\hat{j}\Rightarrow a=14\hat{i}-22\hat{j}$$

راه اول $w=\nabla\times V=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2y^2 & xyt & 0\end{vmatrix}$

$$w=-\frac{\partial(xyt)}{\partial z}\hat{i}-\left(\frac{\partial 2y^2}{\partial z}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial(xyt)}{\partial x}-\frac{\partial(2y^2)}{\partial y}\right)\hat{k}$$

۱۴- معادله خط جریانی که از نقطه (۱-،۲) در t=۲s می‌گذرد چیست. اگر میدان سرعت به صورت زیر باشد:

الف) $V=\overset{u}{2xy}\hat{i}+\overset{v}{y^2t}\hat{j}\ \ m/s$ ب) $V=\underset{u}{2y^2}i+\underset{v}{xyt}\hat{j}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2y^2 & xyt & 0\\ dx & dy & dz\end{vmatrix}=0\rightarrow(xyt\,dz)\hat{i}-(2y^2dz)\hat{j}+(2y^2dy-xyt\,dx)k=0$$

راه دوم $w(0,0,2)$
$$\begin{cases} w_x=\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y} & w_x=0\\ w_y=-\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x} & w_y=0\\ w_z=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x} & w_z=2\end{cases}$$

$$2y^2dy-xyt\,dx=0\rightarrow y\,dy=x\,dx\rightarrow\int y\,dy=\int x\,dx+c$$

$$\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}x^2+c\rightarrow c=-\frac{3}{2}\rightarrow y^2=x^2-3\rightarrow$$ مسیر جریان

$$n=\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\rightarrow\nabla\phi=-2x\,i+2y\hat{j}$$

$$|\nabla\phi|=\sqrt{4x^2+4y^2}\rightarrow n=\frac{-2x\hat{i}+2y\hat{j}}{\sqrt{4x^2+4y^2}}\rightarrow n=\frac{-4}{\sqrt{20}}\hat{i}-\frac{}{\sqrt{20}}$$

۱۵- شتاب (بردار و اندازه) ذره‌ی سیال موجود در نقطه‌ی $(\overset{x}{1},\overset{y}{1},\overset{z}{-2})$ و t=۲s را تعیین کنید اگر میدان سرعت به صورت زیر باشد: الف) $V=\overset{u}{2xy}\hat{i}+\overset{v}{xz}\hat{j}+\overset{w}{yz}\hat{k}\ \ m/s$

$$a=\cancel{\frac{\partial V}{\partial t}}^{0}+u\frac{\partial V}{\partial x}+v\frac{\partial V}{\partial y}+w\frac{\partial V}{\partial z}=2xy(2y\hat{i}+z\hat{j})+xz(2x\hat{i}+z\hat{k})+$$

$$yz(x\hat{j}+y\hat{k})=2xy\,2y\,\hat{i}+2xyz\hat{j}+2xxz\hat{i}+xz^2\hat{k}+yzx\hat{j}+yzy\hat{k}$$

$$=2\times(-2)\times1\times2\,\hat{i}+2(-2)\hat{j}+2\times4\times1\,\hat{i}+(-2)(1)\hat{k}+1\times(-2)\hat{j}+1\hat{k}$$

$$=\cancel{-8\hat{i}}+(-4)\hat{j}+\cancel{8\hat{i}}+(-2)\hat{k}+(-2)\hat{j}+1\hat{k}=-6\hat{j}-2\hat{k}$$

۱۶- بردارهای سرعت زاویه‌ای در ترتیبیه را در نقطه‌ی (۳،۲،۱) وقتی t=۳s است برای میدان‌های سرعت زیر بیابید: الف) مسئله ۱۳.۳ الف.

$$\Omega=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{i}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{j}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)k$$

ادامه فصل ۳

۱۷ - میدان سرعت در یک جریان سیال به صورت $V = \overset{u}{2y}\hat{i} + \overset{v}{x}\hat{j} + \overset{w}{t}\hat{k}$ داده شده است. بزرگی شتاب سرعت زاویه‌ای و ورتیسیته را در نقطه‌ی (۲، ۱، -۱) وقتی t=۴ است بیابید؟

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial w}{\partial y}} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{i} + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial w}{\partial x}}\right)\hat{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)k$$

$$\Omega = \frac{1}{2}(1 - 2)\hat{k} = -\frac{1}{2}K \qquad \Omega_z = -\frac{1}{2} \qquad \omega = 2X = \frac{-1}{2} = -1$$

$$a = \frac{\partial V}{\partial t} + u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} + w\frac{\partial V}{\partial z}$$

۱۸ - میدان دمای یک جریان که $V = 2y\hat{i} + x\hat{j} + t\hat{k}$ است به صورت $T(x,y,z) = 20xy\ C^\circ$ می باشد نرخ تغییر دمای یک ذره سیال را در نقطه ی (۲، ۱، -۲) و t=۲s بدست آورید؟

$$a = \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\frac{D}{Dt}(\nabla t)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla T = 20y\,\hat{i} + 20x\,\hat{j}$$

مسئله ی ۳.۱

$$V = 2yt\,\hat{i} + x\hat{j}$$

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = 2y + 2yt(0) + x(2t) + 0$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial t} + w\frac{\partial v}{\partial z} = 0 + (2yt)(1) + (x)(0)$$

$$a_z = 0 \longrightarrow a = 2y\,\hat{i} + 2yt\,\hat{j}$$

سوال ۳۶.

$$\frac{V_1^2}{2}+\frac{P_1}{\rho}=\frac{\cancel{V_2^2}^{\,0}}{2}+\frac{P_2}{\rho}$$

$$V_1=\sqrt{\frac{2}{\rho}(P_2-P_1)}=\sqrt{\frac{2}{\rho_{\text{آب}}}(\rho_{\text{آب}} gh-\rho_{\text{جیوه}} gh)}=\sqrt{\frac{2gh}{\rho_{\text{آب}}}(\rho_{\text{جیوه}}-\rho_{\text{آب}})}$$

$$=\sqrt{2(0/1)(13/6-1)}=\sqrt{2gh\left(\frac{\rho_{\text{جیوه}}}{\rho_{\text{آب}}}-1\right)}=\sqrt{2g}=\sqrt{2\times 12/6}\simeq 5 \quad \times$$

سوال ۳۷.

$$\frac{P_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}=\frac{P_3}{\rho}+\frac{V_3^2}{2} \qquad \frac{P_1}{\rho}=\frac{1}{32}V_3^3$$

$\boxed{h_1=h_2}$

سوال ۳۶ -

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\rho_A g}+h_1=\cancel{\frac{V_2^2}{2g}}^{\,0}+\frac{P_2}{\rho_A g}+h_2 \qquad V_1^2=2\frac{(P_2-P_1)}{\rho}\longrightarrow$$

$$V_1=\sqrt{\frac{2}{\rho}\underbrace{(P_2-P_1)}_{\star}}\longrightarrow V_1=\sqrt{\frac{2}{\rho_A}(\rho_B gh-\rho_A gh)}$$

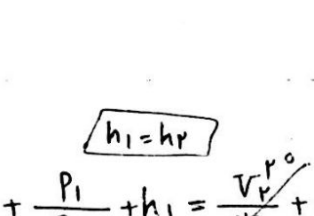
الف) $\rho_A=1$ $\rho_B=1000$

$$V=\sqrt{2gh\left(\frac{\rho_B-\rho_A}{\rho_A}\right)}\longrightarrow V_1=\sqrt{\frac{2}{1}\times(1000\times10\times0/1-1\times10\times0/1)}\longrightarrow V_1=\sqrt{2000}\ \text{m/s}$$

ب) $\rho_A=1000$ $\rho_B=13600$

$$V=\sqrt{2gh\left(\frac{\rho_B}{\rho_A}-1\right)}=\sqrt{2(13/6-1)}=\sqrt{25/2}\simeq 5\ \text{m/s}$$

$\star\ \boxed{P_2-P_1=\rho_B gh-\rho_A gh}$



فصل ۴

۶- دریچه‌ای جهت کنترل جریان قرار داده شده است که دارای ۲۵cm عمق و ۳۵۰cm عرض می‌باشد. سرعت متوسط جریان ۲٫۲ m/s می‌باشد. اگر دریچه بتواند طوری ساخته شود که جریان آزاد روی توربین ۱۰cm باشد حداکثر توان خروجی را با ۸۸ درصد راندمان توربین برآورد بنویسید؟

دبی جریان آب عبوری از درون توربین برابر است با :

$$Q = A_1V_1 = 0.25 \times 3.5 \times 2.2 = 1.925$$

معادله‌ی انرژی بین سطح صفر پشت دریچه که $p_1=0$ ، $V_1=0$ ، $z_1=10$ و خروجی توربین که $V_2=0$ و $p_2=0$ و $z_2=0$ به کار می‌رود

$$\frac{\dot w_s}{\dot m g} = \frac{V_2^2}{2g} + \cancel{\frac{P_2}{\gamma_2}} + z_2 - \cancel{\frac{P_1}{\gamma_1}} - \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} - z_1 + h_L$$

$$\dot w_s = \dot m g z_1 = (1000 \times 1.925) \times 9.81 \times 10 = 189000\ W$$

افت‌های توربین با استفاده از راندمان لحاظ شده‌اند. حداکثر خروجی توربین عبارت است :

$$\dot w_T = \eta_T \times \dot w_s = 0.88 \times 189 = 166\ kW$$

مثال ۱.۴

آب در یک لوله به قطر ۶cm با دبی ۰٫۰۲ m^3/s جریان می‌یابد. قطر لوله تا ۲٫۸cm تقلیل می‌یابد حداکثر سرعت در لوله را محاسبه کنید. همچنین دبی جرمی را محاسبه کنید. پروفیل‌های سرعت را یکنواخت فرض کنید؟

حل : حداکثر سرعت در لوله جایی خواهد بود که قطر دارای کمترین مقدار باشد در مقطعی با ۲٫۸cm قطر داریم

$$Q = AV \Rightarrow 0.02 = \pi \times 0.014^2 V_2 \longrightarrow V_2 = 32.5\ m/s$$

دبی جرمی برابر است با

$$\dot m = \rho Q = 1000 \times 0.02 = 20\ kg/s$$

مثال ۲.۴ ؟؟؟

آب به درون حجمی که دارای یک اسفنج می‌باشد با دبی ۰٫۰۲ m^3/s جریان می‌یابد و از طریق دو لوله از حجم کنترل خارج می‌شود یکی به قطر ۲cm و دیگری با دبی جرمی ۱۰ kg/s در صورتیکه سرعت خروجی از لوله به قطر ۲cm برابر ۱۵ m/s باشد. شدت تغییر در جرم داخل حجم را بدست آورید؟ حل : معادله پیوستگی (۱۲.۴) استفاده می‌شود که به شکل زیر نوشته می‌شود

تجمع

$$0 = \frac{d m_{vol}}{dt} + \dot m_2 + \rho A_3 V_3 - \rho Q_1 \qquad \dot m V A$$

که $m_{vol} = \int \rho\, dV$ و دو خروجی و یک ورودی با سه عبارت دیگر محاسبه می‌شوند با بیان عبارت مشتق به صورت $\dot m_{vol}$ معادله پیوستگی خواهد شد

$$\dot m_{vol} = \rho Q_1 - \dot m_2 - \rho A_3 V_3 = 1000 \times 0.02 - 10 - 1000 \times \pi \times 0.01^2 \times 15 = 5.29\ kg/s$$

اسفنج آب را با شدت ۵٫۲۹ kg/s جذب می‌کند.

مثال ۳.۴

آب از یک مخزن ذخیره با ارتفاع ۳۰m از طریق یک لوله با قطر ۵cm که دارای یک نازل در انتهای آن می باشد مطابق شکل ۳.۴ به بیرون جریان می یابد. ضریب افت در سراسر لوله به صورت $K=1.2$ داده شده است دبی جریان آب از لوله را برآورد نمایید. همچنین فشار دقیقاً کمی در بالادست نازل را پیش بینی نمایید. (افت ها از درون نازل می تواند صرف نظر شود) نازل در ارتفاع ۱۰m قرار دارد.

حل: معادله انرژی به شکل زیر نوشته می شود

$$\cancel{\frac{w_s}{mg}} = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \cancel{\frac{P_2}{\gamma_2}} - \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} - z_1 - \cancel{\frac{P_1}{\gamma_1}} + K\frac{V^2}{2g}$$

که فشار در سطح ۱ و خروجی ۲ برابر صفر است سرعت در سطح صفر فرض باشد و هیچ کار شفتی وجود ندارد (هیچ پمپ یا توربینی وجود ندارد) ضریب افت بر مبنای سرعت مشخصه V در لوله خواهد بود و نه بر مبنای سرعت خروجی V_2 معادله پیوستگی را جهت مرتبط ساختن سرعت ها استفاده کنید

$$V = \frac{A_2}{A}V_2 = \frac{d_2^2}{d^2}V_2 = \frac{4}{25}V_2$$

$$0 = \frac{V_2^2}{2g} + 10 - 30 + 1.2\left(\frac{4}{25}\right)^2\frac{V_2^2}{2g} \qquad V_2 = 19.5\ m/s$$

فشار درست قبل از نازل را با به کارگیری معادله انرژی از میان نازل با فرض عدم وجود افت ها بدست می آید (معادله برنولی نیز می تواند استفاده شود) که شکل زیر را می گیرد.

$$-\frac{w_s}{mg} = \frac{V_2^2}{2g} + \cancel{\frac{P_2}{\gamma}} + \cancel{z_2} - \frac{V^2}{2g} - \frac{P}{\gamma} - \cancel{z}$$

که سطح ۲ در خروجی قرار داشته و P و V بالادست نازل می باشند معادله ی انرژی نتیجه می دهد

$$0 = \frac{19.5^2}{2\times9.81} + \cancel{\frac{P_2}{\gamma}} + \cancel{z_2} - \left(\frac{4}{25}\right)^2\frac{19.5^2}{2\times9.8} - \frac{P}{9810} - \cancel{z}$$

$$P = 185300\ Pa \ \text{یا}\ 185.3\ kPa$$

مثال ۴.۴ ؟؟؟

یک زوج با تجربه در زمینه ی انرژی تصمیم گرفتند که نهر جاری بعد از کلبه خودشان را مسدود کنند و برآورد کنند که از ارتفاع ۴m می تواند در قسمت بالای خروجی به طرف توربین ایجاد شود برآورد شده است که نهر دارای دبی $0.8\ m^3/s$ می باشد حداکثر قدرت خروجی توربین با فرض عدم وجود افت ها و سرعت در خروجی توربین $3.6\ m/s$ چقدر است؟ حل: معادله انرژی به صورت زیر به کار می رود.

$$-\frac{w_s}{mg} = \frac{V_2^2}{2g} + \cancel{\frac{P_2}{\gamma}} + \cancel{z_2} - \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} - \cancel{\frac{P_1}{\gamma}} - z_1 + h_L$$

X ۱ـ بالون با آب پر می شود تا نقطه‌ای که قطر آن 50cm شود اگر دبی جریان به درون بالون $200 \frac{gal}{min}$ باشد نرخ افزایش در قطر چقدر است؟

نرخ افزایش در حجم بالون عبارت است از:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 4\pi R^2 \frac{dR}{dt} = \frac{\pi}{2} D^2 \frac{dD}{dt}$$

$\frac{gal}{min}$ را به $\frac{m^3}{s}$ تبدیل کنید:

$$200 \frac{gal}{min} \times 0/0037854 \frac{m^3}{gal} \times \frac{1}{60} \frac{min}{sec} = 0/01262 \frac{m^3}{s}$$

دو عبارت فوق درصورت وجود بقای جرم بایستی مساوی باشند (در این حالت بقای حجم وجود دارد زیرا آب غیرقابل تراکم است) این نتیجه می دهد: $\frac{\pi}{2} \times 0/5^2 \times \frac{dD}{dt} = 0/01262$ $\frac{dD}{dt} = 0/0321 \frac{m}{s}$

۲- هوا در $40°c$ و 250kpa درلوله‌ای به قطر ۳۲ سانتی متر با سرعت $15 \frac{m}{s}$ درحال جریان است. قطر لوله تا 20cm و چگالی هوا تا $3/5 \frac{kg}{m^3}$ تغییر می کند. سرعت درلوله با قطر کوچک تر را بدست آورید.

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 \quad \frac{P_1}{RT_1}\pi\frac{d_1^2}{4}V_1 = \rho_2 \pi \frac{d_2^2}{4} V_2 \quad V_2 = \frac{d_1^2 P_1}{\rho_2 d_2^2 RT_1} V_1$$

اطلاعات داده شده را در معادله قرار دهید تا:

$$V_2 = \frac{d_1^2 P_1}{\rho_2 d_2^2 RT_1} V_1 = \frac{0/32^2 \times 350}{3/5 \times 0/20^2 \times 0/287 \times 313} \times 15 = 28/5 \frac{m}{s}$$

توجه فشار درصورت مسئله فشار نسبی فرض می شود لذا 100 kpa اضافه می شود تا تبدیل به فشار مطلق شود. فشار به صورت kpa استفاده می شود زیرا ثابت گاز دارای واحد $\frac{KJ}{kg \cdot K}$ است.

X ۳ ـ مایعی به صورت جریان یکنواخت درمجرای مستطیلی 2cm × 4cm جریان می یابد. مجرا با لوله ای به قطر 2cm با پروفیل سهمی تخلیه می شود. درصورتیکه حداکثر سرعت درلوله $4 \frac{m}{s}$ باشد سرعت درمجرای مستطیلی چقدر است؟

معادله ی سهموی برای $U(r)$ بایستی سرعت را در $r=0$ برابر $4 \frac{m}{s}$ و در $r=0/01$ m برابر $0 \frac{m}{s}$ نتیجه می دهد

پروفیل سرعتی که این را نتیجه می دهد عبارت است از: $U(r) = 40000(0/01^2 - r^2)$

معادله پیوستگی جریان غیرقابل تراکم (مایع) شکل زیر را می گیرد

$$A_1 V_1 = \int_{A_2} U(r)\, 2\pi r\, dr = \int_0^{0/01} 40000(0/01^2 - r^2)\, 2\pi r\, dr$$

که $2\pi r dr$ در انتگرال مساحت دیفرانسیلی است که سیال از میان آن جریان می یابد معادله فوق نتیجه می دهد

$$V_1 = \frac{40000 \times 2\pi}{0/02 \times 0/04}\left(0/01^2 \times \frac{0/01^2}{2} - \frac{0/01^4}{4}\right) = 0/785 \frac{m}{s}$$

۴- توربینی برای جذب انرژی از منبع آب در حال جریانی از درون لوله‌ای به قطر ۱۰cm در فشار ۸۰۰kPa با سرعت متوسط ۱۰m/s طراحی شده است. اگر توربین دارای راندمان ۹۰ درصد باشد چه میزان انرژی می‌تواند تولید شود درصورتیکه آب از طریق لوله‌ای به قطر ۲۰cm به اتمسفر خارج شود؟

دبی جریان و سرعت در خروجی عبارت است از:

$$A_1V_1 = A_2V_2$$

$$Q = A_1V_1 = \pi \times 0.05^2 \times 10 = 0.0785 \ m^3/s \qquad V_2 = V_1\frac{d_1^2}{d_2^2} = 10\times\frac{10^2}{20^2} = 2.5 \ m/s \quad ???$$

$$\dot m = \rho A_1V_1 = 1000 \times 10 \times \frac{\pi}{4}\times(0.1)^2 = 78.5 \ kg/s$$

فشار در خروجی اتمسفر کی فرض شود یعنی $p_2=0$ معادله انرژی بین ورودی و خروجی توربین به کار برده می‌شود.

$$-\frac{\dot W_s}{\dot m g} = \frac{V_2^2}{2g} + \cancel{\frac{p_2}{\gamma_2}} + \cancel{z_2} - \frac{p_1}{\underset{\rho g}{\gamma_1}} - \frac{V_1^2}{2g} - \cancel{z_1} + \cancel{h_L}$$

که از افت ارتفاع چشم پوشی شده و به عنوان راندمان توربین لحاظ شده است با جایگذاری اطلاعات مناسب نتیجه می‌دهد.

$$-\frac{\dot W_s}{1000\times 0.0785} = \frac{2.5^2-10^2}{2} - \frac{800000}{1000} \qquad \dot W_s = 72300 \ W$$

که توان جذب شده از آب است توان تولید شده به دلیل افت‌های درون توربین از این مقدار کمتر خواهد بود که با استفاده از راندمان محاسبه می‌شود یعنی

$$\dot W_T = \eta_T \dot W_s = 0.9\times 72.3 = 65.1 \ kW$$

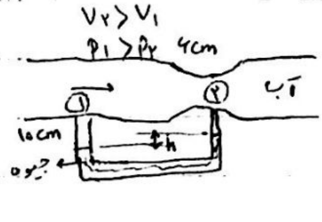
واحدها را در روابط فوق کنترل کنید تا مطمئن شوید آن‌ها سازگار هستند.

۵- دبی جریان درون یک لوله با استفاده از ونتوری متر نشان داده شده در شکل ۱۲.۴ تعیین می‌شود با استفاده از اطلاعات داده شده در شکل، و $h=4cm$ دبی جریان را با فرض جریان یکنواخت و عدم وجود افت‌ها محاسبه کنید (این فرضیات برای جریان‌های بسیار آشفته معقول می‌باشند)

مانومتر فشارها را (از خط مرکزی لوله اندازه‌گیری شده‌اند) را به صورت زیر مرتبط می‌کند.

$$p_1 + 9810\times z + 0.04\times 9810 = p_2 + 9810\times z + 0.04\times 13.6\times 9810 \quad ???$$

$$p_1 - p_2 = 4944 \ Pa$$



که z از بالای جیوه تا خط مرکزی سنجیده می‌شود. معادله‌ی پیوستگی V_1 و V_2 را مرتبط می‌کند

$$V_2 = V_1\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{10^2}{6^2}V_1 = 2.778V_1$$

در این صورت معادله انرژی استفاده می‌شود تا:

$$\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\underset{\rho g}{\gamma}} + z_2 = \frac{p_1}{\underset{\rho g}{\gamma}} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_L \quad \text{یا} \quad \frac{2.778^2V_1^2 - V_1^2}{2\times 9.81} = \frac{4944}{9810}$$

دبی جریان عبارت است از $Q = A_1V_1 = \pi\times 0.05^2\times 1.213 = 0.00953 \ m^3/s$

فصل ٤

سؤال ۵ :

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + \cancel{Z_1} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + \cancel{Z_2}$$

$$1, 2 \quad \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}$$

$$1, 2 \quad V_1 A_1 = V_2 A_2 \longrightarrow V_2 = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 (V_1) = \left(\frac{10}{6}\right)^2 V_1 \Rightarrow \boxed{V_2 = 2{,}78\, V_1}$$

$$\frac{V_1^2}{2}(2{,}78^2 - 1) \longrightarrow V_1 = \sqrt{\frac{1}{3{,}30} \frac{P_1 - P_2}{\rho}}$$

$$Q_{۲} = \frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{۱۰}{۱۰۰۰} = ۰/۰۱ \left(\frac{m^{۳}}{s}\right) \qquad V_{۲} = \frac{Q}{A_{۲}} = \frac{۰/۰۱}{\frac{\pi(۰/۰۲)^{۲}}{۴}} = \frac{۱۰۰}{\pi} = ۳۱{,}۸ \ \frac{m}{s}$$

تجمع = ورودی - خروجی

$$۰ = \dot{m}_{۱} - (\dot{m}_{۲} + \dot{m}_{۳}) \longrightarrow \dot{m}_{۳} = \dot{m}_{۱} - \dot{m}_{۲} = ۲۵ - ۱۰ = ۱۵ \left(\frac{kg}{s}\right)$$

$$Q_{۳} = \frac{\dot{m}_{۳}}{\rho_{۳}} = \frac{۱۵}{۱۰۰۰} = ۰/۰۱۵ \left(\frac{m^{۳}}{s}\right)$$

$$V_{۳} = \frac{Q_{۳}}{A_{۳}} = \frac{۰/۰۱۵}{\frac{\pi \times (۰/۰۳)^{۲}}{۴}}$$

فصل ۴ سؤال ۴۷ و ۴۹ حذف است درس داده نشده

~~این فقط ارتفاع آب بالای توربین است که توان توربین را فراهم می‌کند، سرعت خروجی از توان تفریق می‌شود~~

با استفاده از $\dot m = \rho Q = 1000 \times 0.8 = 800 \frac{kg}{s}$ نتیجه می‌شود.

$$\dot W_T = \dot m g z_1 - \dot m \frac{V_2^2}{2} = 800 \times 9.81 \times 4 - 800 \times \frac{3.6^2}{2} = 26220 \frac{J}{s}$$ یا $26.2 kW$

اجازه بدهید نشان دهیم که واحدهای مربوط به $\dot m g z_1$، J/s می‌باشند. واحدهای مربوط به $\dot m g z_1$ عبارت‌اند از:

$$\frac{kg}{s} \times \frac{m}{s^2} \times m = \frac{kg.m}{s^2} \times \frac{m}{s} = \frac{N.m}{s} = J/s$$

که از $F = ma$ مشاهده می‌کنیم که $N = \frac{kg.m}{s^2}$ در صورتیکه واحدهای مناسب در بخش های معادلات ها وارد شوند واحدها همانطوری که انتظار می‌رود بدست می‌آیند مثلاً واحدهای مربوط به $\dot W_T$ بایستی J/s باشند.

۱۹ - آب در عمق ۴۰cm درون یک لوله فاضلاب به قطر ۱۰۰cm جریان دارد دبی جریان و دبی جرمی را در صورتیکه سرعت متوسط ۳m/s باشد محاسبه کنید؟

$Q = AV = 1 \times 0.4 \times 3 = 1.2$

$\dot m = \rho Q = 1000 \times 1.2 = 1200$

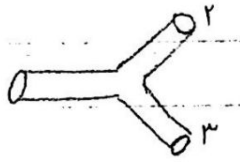
۲۱ - هوا در کانال به قطر ۲۰cm در ۱۲۰°c و ۱۲۰kpa با دبی جرمی ۵kg/s جریان دارد کانالی دایروی به کانال مربعی به ضلع ۲۰cm تبدیل می‌شود که در آن دما و فشار به ترتیب ۱۴۰°c و ۱۴۰kpa می‌باشند سرعت ها را در هر دو مقطع کانال تعیین کنید؟

$5 = \rho Q = 1 Q \longrightarrow Q = 5 \frac{kg}{s}$

$Q = AV \longrightarrow (0.1)^2 \times \pi \times V \longrightarrow V = \frac{5}{0.01 \times \pi}$

$V \times 0.2 \times 0.2 \longrightarrow V = \frac{5}{0.04}$

۲۳ - آب در لوله‌ای به قطر ۴cm در ۲۰m/s جریان دارد لوله به دو لوله یکی به قطر ۲cm و دیگری به قطر ۳cm تقسیم می‌شود در صورتیکه ۱۰kg/s از لوله با قطر ۲cm جریان یابد دبی جریان از لوله به قطر ۳cm را محاسبه کنید؟



① $\{ D_1 = 4cm,\ V_1 = 20 \frac{m}{s} \}$ ② $\{ D_2 = 2cm,\ \dot m_2 = 10 \frac{kg}{s} \}$ $Q, V_2 = ?$ ③ $\{ D_3 = 3cm,\ Q = ?,\ \dot m = ?\ V = ? \}$

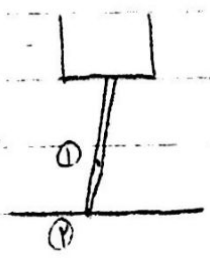
$$\dot m_1 = \rho A V = 1000 \times \frac{\pi (0.04)^2}{4} \times 20 = 8\pi \left(\frac{kg}{s}\right) = 25.1$$

$$\dot Q_1 = AV = \frac{\dot m}{\rho} = \frac{25.1}{1000} = 0.0251 \left(\frac{m^3}{s}\right)$$

۲۵ـ هوای پرسرعت در ۲۰c° و 100kPa مطلق، درون مجرایی در ۶۰۰ m/s جریان دارد. جریان دستخوش یک تغییر ناگهانی (موج ضربه‌ای) تا ۲۶۴ m/s و ۴۳۸c° بدون تغییر در ابعاد مجرا می‌شود. دبی جرمی و فشار پایین دست را در صورتیکه مجرا دارای مساحت سطح مقطع $500\,cm^2$ باشد بدست آورید؟

R.??

۳۴ـ جت سرعت بالا برای بریدن مواد جامد مورد استفاده قرار می‌گیرد. حداکثر فشار ایجاد شده روی ماده را برآورد کنید در صورتیکه سرعت خارج شونده از جت آب برابر باشد با الف) ۱۰۰ m/s



$$\begin{cases} P_1 = 0 \\ V_1 = \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_2 = \\ V_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{}$$

۹- نازلی به یک شلنگ به قطر ۶cm وصل شده است به طوریکه فاز افقی آب را با زاویه ۹۰° چرخش می دهد خروجی نازل دارای قطر ۳cm بوده و دبی جریان ۵۰۰ L/min می باشد. مؤلفه های نیروی آب روی نازل و مقدار نیروی برایند را بدست آورید. فشار درون شلنگ ۴۰۰kpa بوده و آب به اتمسفر تخلیه می شود؟

ابتدا حجم کنترل بایستی ترسیم شود زیرا در صورت مسئله داده نشده است آن به صورت نشان داده شده در شکل ۱۴.۴ ظاهر می شود حجم کنترل آب را با مؤلفه های نیروی نازل روی آب نشان می دهد سرعت ها به صورت زیر محاسبه می شوند

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.5 \times 0.6}{\pi \times 0.03^2} = 2.95 \, s$$

$$V_2 = 4 \times V_1 = 11.79 \, m/s$$

فشار p_1 با استفاده از معادله انرژی بدست می آید. افت ها در جریان نسبتا بدلیل حجم پوشی شده اند.

$$\frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_1 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 \qquad p_1 = 1000\left(\frac{11.79^2 - 2.95^2}{2}\right) = 65150 \, Pa$$

معادله مومنتوم مؤلفه های نیرو را ارائه می دهد

$$p_1 A_1 - f = rh(V_{2z} - V_{1z})$$

$$65150 \times \pi \times 0.03^2 - f = -(0.50$$

حل سر کلاس :

$$Q_1 = A_1 V_1$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{0.008^3}{\underbrace{\pi \times (3 \times 10^{-2})^2}_{A_1}} \rightarrow V_1 = 2.93 \, m/s$$

$$V_2 = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 V_1 \rightarrow V_2 = \left(\frac{6}{3}\right)^2 2.93 = 11.73 \, m/s$$

$$\Sigma F_x = \dot{m}(\cancel{V_{2x}}^{0} - V_{1x}) \rightarrow p_1 A_1 - F_x = \dot{m}(0 - 2.93)$$

$$400 \times 10^3 \times (3 \times 10^{-2})^2 - F_x = 8.3 (0 - 2.93)$$

$$F_x = 1155 \, N$$

$$500 \, \frac{L}{min} \times \frac{1 m^3}{1000} \times \frac{1 min}{60 s} = \frac{5}{6} \times 10^{-2}$$

$$\dot{m} = \rho Q$$

١٤-١٩
٢٣-٢٨

$$\Sigma f_y = \dot m\,(V_{2y} - V_{1y})$$

$$f_y = 8.3\,(11.72 - 5)$$

سئوال ٦-

عمق = ٢٥cm

$$Q = A\bar V = 0.25 \times 3.5 \times 2.2 = 1.9\ \frac{m^3}{s}$$

عرض = ٣٥٠cm

$$\frac{\dot w_s}{\dot m g} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}}^{\,0} + \cancel{\frac{P_1}{\rho g}}^{\,0} + z_1 = \cancel{\frac{V_2^2}{2g}}^{\,0} + \cancel{\frac{P_2}{\gamma_2}}^{\,0} + \cancel{z_2} + h_L$$

در سطح آب V را صفر فرض کنیم چون پهن هم هست و بزرگ

قابل چشم پوشی

$\bar V = 2.2\ m/s$

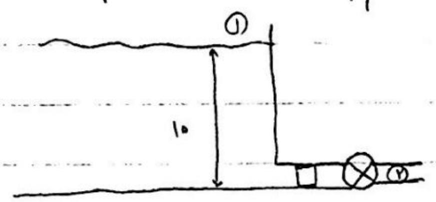
$z_1 = 10m$

$\eta_T = \%0.88$

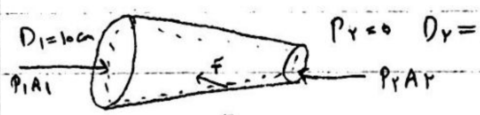
$$\dot w_s = \dot m g z_1 = (\rho \times Q) g \times z_1 = 1000 \times 1.9 \times 10 \times 10 = 190000\ J/s$$

$w_T = ?$

$$w_T = \eta_T \times \dot w_s = 0.88 \times 190000 = 167200$$



سوال ٤٥-



$P_2 = 0 \quad D_2 = 4cm$

$$Q = 0.04\ \frac{m^3}{s}$$

$$V_1 = \frac{Q}{A} = \frac{0.04}{25\pi \times 10^{-4}}$$

$$\Sigma f = \dot m\,(V_{2x} - V_{1x})$$

$$V_2 = \frac{A_2}{A_1} V_1$$

$$P_1A_1 - P_2A_2 + f = Q\rho\,(V_2 - V_1)$$

$$\frac{V_2^2}{2} + \cancel{\frac{P_2}{\rho}} + \cancel{g z_2} = \frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + \cancel{g z_1}$$

$$P_1 = 2\rho(V_2^2 - V_1^2) \rightarrow P_1A_1 - f = \rho Q\,(V_2 - V_1)$$

فصل ۵

۱۴- اگر در یک جریان صفحه‌ای مؤلفه‌های سرعت به صورت زیر داده شده:

$8x^2 + 8y^2$

$$u(x,y) = 8(x^2+y^2) \qquad v(x,y) = 8xy$$

$\frac{D\rho}{Dt}$ در $(1,2)\,m$ چه قدر است؟ اگر در آن نقطه $\rho = 2\ \frac{kg}{m^3}$ باشد.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\nabla\cdot V = 0 \rightarrow u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} + \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\,\nabla\cdot V = -2(16x + 8x + 0) = -2(16+8) = -48\ \frac{kg}{m^3\cdot s}$$

۱۵- میدان سرعت برای یک $\boxed{\text{جریان صفحه‌ای}}$ ویژه $(w=0)$ از هوا به صورت زیر است:

$$u(x,y) = \frac{4y}{x^2+y^2} \qquad v(x,y) = \frac{-4x}{x^2+y^2}$$

plan flow $= \frac{\partial}{\partial z} = 0\ ,\ w=0$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\,\nabla V \rightarrow \left[\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}\right) = -\rho\left[\frac{-2x(2y)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-2y(-4x)}{(x^2+y^2)^2}\right]\right.$$

$$-\frac{8xy + 8xy}{(x^2+y^2)^2} = 0 \qquad \text{تراکم ناپذیر}$$

$\nabla\cdot V = 0$ شرط تراکم ناپذیر بودن

نشان دهید که یک جریان تراکم ناپذیر است.

$u(x,y) = 4 + \frac{2x}{x^2+y^2}$

۱۶- اگر $u(x,y) = $ در یک $\boxed{\text{جریان صفحه‌ای}}$ تراکم ناپذیر باشد درصورتی که $v(x,0)=0$ باشد مقدار $v(x,y)$ را بیابید؟

۱۷- اگر $v(x,y) = \frac{8+4y}{x^2+y^2}$ در یک $\boxed{\text{جریان صفحه‌ای}}$ تراکم ناپذیر باشد. درصورتی که $u(0,y)=0$ باشد مقدار $u(x,y)$ را بیابید؟

۱۸- مؤلفه‌ی سرعت در یک $\boxed{\text{جریان صفحه‌ای}}$ تراکم ناپذیر $V_\theta = -\left(25 + \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta$ است درصورتی که $V_r(2,0) = 0$ مقدار $V_r(r,\theta)$ را بیابید؟

۱۹- مولفه‌ی سرعت در یک جریان صفحه‌ای تراکم ناپذیر $v_\theta = -25\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{50}{r^2}$ است درصورتی که $v_r(2, 90^\circ) = 0$ مقدار $v_r(r,\theta)$ را بیابید؟

(19-

$$\frac{DP}{Dt} + \rho \cdot \nabla V = 0 \quad \xrightarrow{\text{تراکم ناپذیر}} \quad \frac{DP}{Dt} = 0 \rightarrow \rho \cdot \nabla V = 0 \longrightarrow \nabla \cdot V = 0$$

$$\nabla V = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}\right) = 0 \qquad u(x,y) = 4 + \frac{2x}{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(x^2+y^2) - 4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-\partial u}{\partial x} \longrightarrow v = \int -\frac{\partial u}{\partial x}\, dy + C$$

$$v = \int \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy + C = \frac{-2y}{(x^2+y^2)} + C \longrightarrow 0 = \frac{-2\times 0}{x^2+0} + C \longrightarrow C = 0 \qquad v = \frac{-2y}{x^2+y^2}$$

(18-

$$\frac{DP}{Dt} + \rho \nabla V = 0 \quad \text{تراکم ناپذیر} = \frac{DP}{Dt} = 0 \qquad \rho\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}}\right] = 0$$

جریان صفحه‌ای Plan Flow

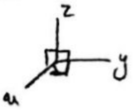
$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) = \frac{-1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right) \rightarrow r v_r = -\int \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} dr \rightarrow r v_r = -\int \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\, dr + C$$

$$v_\theta = -\left(25 + \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta \;,\; v_r(1,0) = 0$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = +\left(25 + \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta \qquad r v_r = -\int \left(25 + \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta\, dr + C$$

$$r v_r = -5r\sin\theta + \frac{1}{r}\sin\theta + C_1 \longrightarrow v_r = \left(-25 + \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta + C$$

$$v_r = 0 \xrightarrow{\theta = 0} 0 = \left(-25 + \frac{1}{r^2}\right)\sin(0) + C \longrightarrow C = 0 \qquad v_r = \left(-25 + \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta$$



$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1 \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1 \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1 \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0 \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0 \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0$$

مفتمات متعامد:

۲۳- با استفاده از $\boxed{\text{مفتمات متعامد}}$ فرض جریان پایا، $\frac{DV}{Dt}=(V\cdot\nabla)V$ را تصدیق کنید؟

چون جریان پایدار است.

$$\frac{DV}{Dt}=(V\cdot\nabla)V \quad \frac{\partial u}{\partial t}=0 ,\ \frac{\partial v}{\partial t}=0 ,\ \frac{\partial w}{\partial t}=0$$

$$\frac{DV}{Dt}=\frac{Du}{Dt}i+\frac{Dv}{Dt}j+\frac{Dw}{Dt}k$$

$$\frac{Du}{Dt}=\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}^{0}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=(ui+vj+wk)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}k\right)=\vec{V}\cdot\vec{\nabla u}$$

$$\frac{Dv}{Dt}=\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}^{0}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=(ui+vj+wk)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)=\vec{V}\cdot\vec{\nabla v}$$

$$\frac{Dw}{Dt}=\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}}^{0}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=(ui+vj+wk)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)=\vec{V}\cdot\vec{\nabla w}$$

حل کلاس:

$$V\nabla u+V\cdot\nabla v+V\nabla w=V\cdot\nabla(ui+vj+wk)=(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})V$$

$$\frac{DV}{Dt}=\cancel{\frac{\partial V}{\partial t}}^{\text{جریان پایدار}\ 0}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$(V\cdot\nabla)V=\left[(u\hat{i}+v\hat{j}+w\hat{k})\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)\right]V$$

اگر جریان پایدار باشد صادق است.

$$(V\cdot\nabla)V=\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)V=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}$$

۲۴- تغییر فشار ∇p را برای جریان تراکم‌ناپذیر معادله‌ی 15.5 با فرض جریان غیرویسکوز با اثرات گرانش قابل صرف نظر بیابید؟

در جریان غیر ویسکوز است در این حالت هم صفر نیست پس باید مفروض شود.

$$\rho\frac{DV}{Dt}=-\nabla p+\cancel{\mu\nabla^2 V}^{0}+\cancel{\rho g}^{0}$$

$$x:\ \rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}^{0}+\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{داریم}}+\underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{داریم}}+\cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}}^{0}\right)=\frac{-\partial p}{\partial x}+\mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{0}+\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}^{0}+\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}^{0}\right)+\rho \cancel{g_x}^{0}$$

$$y:\ \rho\left(\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}^{0}+\cancel{u\frac{\partial v}{\partial x}}+\cancel{v\frac{\partial v}{\partial y}}+\cancel{w\frac{\partial v}{\partial z}}^{0}\right)=\frac{-\partial p}{\partial y}+\mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}^{0}+\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}^{0}+\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}^{0}\right)+\rho\cancel{g_y}^{0}$$

اضافه

$$z:\ \rho\left(\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}}+\cancel{u\frac{\partial w}{\partial x}}+\cancel{v\frac{\partial w}{\partial y}}+\cancel{w\frac{\partial w}{\partial z}}\right)=\frac{-\partial p}{\partial z}+\cancel{\mu}^{0}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\overset{\text{ثابت هست}}{\rho g_z}\longrightarrow\frac{\partial p}{\partial z}=\rho g_z\rightarrow\frac{dp}{dz}=\rho g_z$$

$$\Delta p=\rho g h$$

۱- صفر فرض کردن سهم تراکم پذیری ویسکوز ۲- صفر فرض کردن فقط سهم ویسکوز ۳- با فرض وجود ویسکوزیته و سهم تراکم پذیری

برای جریان تراکم‌ناپذیر صفر است تک تک صفر نیست پس ۲ مقدار $v\frac{\partial u}{\partial y}$ ، $u\frac{\partial u}{\partial x}$ داریم.

۲۶- معادله‌ی ناویر استوکس را برای جریان بین صفحات موازی با فرض $u=u(y)$ و گرانش در راستای z ساده کنید فرض بر این است که خطوط جریان موازی صفحات هستند بطوریکه $v=w=0$ است؟

چون u فقط تابع y است

$$x:\ \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}^{0}+\overset{0}{v}\frac{\partial u}{\partial y}+\overset{0}{w}\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}^{0}\right)=\frac{-\partial p}{\partial x}+\mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{0}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}^{0}\right)+\rho g_x \quad \rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{-\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

سرعت در جهت y و z صفر بوده پس معادلات آن‌ها را نمی‌نویسیم. $v=w=0$

$$V=w=0 \quad u=u(y) \quad \boxed{\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\Delta p}{L}}$$

اضافه

$$0=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\rightarrow\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\rightarrow\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\partial y$$

انتگرال گیری $\rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{L}y+C_1$ می‌دانیم $\frac{\partial u}{\partial y}=0\rightarrow C_1=0$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta P}{L} y \longrightarrow du = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta P}{L} y\, dy \xrightarrow{\text{انتگرال}} u = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta P}{L}\frac{y^2}{2} + C$$

$$0 = \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta P}{L} b^2 + C_1 \qquad C_1 = \frac{-1}{2\mu}\frac{\Delta P}{L} b^2 \qquad u = 0 \quad y = \pm b$$ روی دیواره

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta P}{L} y^2 - \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta P}{L} b^2 \qquad v = \frac{-\Delta P}{2\mu L} b^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

۲۷- معادله‌ی ناویراستوکس را برای جریان داخل یک لوله با فرض $v_z = v_z(r)$ و گرانش در راستای z ساده کنید. خطوط جریان فرض شده‌اند موازی با دیواره‌ی لوله هستند به نحوی که $v_\theta = v_r = 0$ است؟. با توجه به ص ۹۰ کتاب

$$v_z = v_z(r) \qquad v_\theta = v_r = 0$$

جهت r: $0 - 0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + 0 + 0$

جهت θ: $-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + 0 + 0$

جهت z: $\rho \frac{Dv_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \nabla^2 v_z$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\cancel{v_r} + \cancel{\frac{v_\theta}{r}}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}\right)$$

۲۸- استوانه‌ی داخلی از دو استوانه‌ی هم مرکز می‌چرخد که نتیجه به صورت $v_\theta = v_\theta(r)$ و $v_r = 0$ است. معادلات مورد نیاز برای یافتن پروفیل سرعت و با فرض عمود بودن استوانه‌ها چیست؟

۲۵

گرادیان فشار ∇P را برای جریان تراکم ناپذیر مسئله ی ۲.۵ با فرض جریان غیر ویسکوز با اثرات گرانش قابل چشم پوشی بیابید؟

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-8xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4(x^2+y^2) - 8y(4y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^2 - 4y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-4(x^2+y^2) + 8x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^2 - 4y^2}{x^2+y^2} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{8xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\nabla V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\left(\frac{-32xy^2}{(x^2+y^2)^3} - \frac{16(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho\left(\frac{16y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} - \frac{32x^2y}{(x^2+y^2)^3}\right) = \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{\partial p}{\partial y} j + \frac{\partial p}{\partial z} k = \frac{-16}{(x^2+y^2)^3}\left[x(x^2+y^2)\hat{i} + y(x^2+y^2)\hat{j}\right] + \rho g_x$$